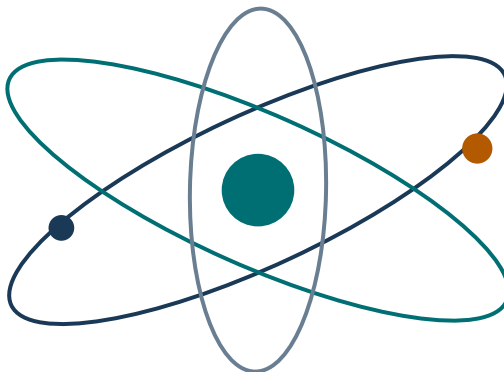


東京大学大学院物理学専攻・入学試験対策

東大院への物理

過去問の解法を理解するための理論物理学

数学・量子力学・統計力学・電磁気学・古典力学



導出・適用条件・解法選択・総合例題・確認演習

taku 著

takuphys.com

2026 年 10 月校正版／東京大学の非公式・独立制作教材

本書の読み方

本書は、東京大学大学院物理学専攻の過去 25 年度（2001–2026 年度、2021 年度除外）の出題主題を参考に、最低限の公式と解法パターンを整理したもの。問題の文章そのものではなく、自力で導出・計算することに重点を置く。収録範囲：2001–2026 年度（2021 年度除く）の 25 年度を中心に、歴史的参考例として 1993–2000 年度の主題も参照する。量子・統計・数学の年度別主題に加え、電磁気学・力学は 2001–2013 年度の原題代表設問も照合した。ただし過去問全小問の独立解答検証を終えたわけではない。本書は出題問題集そのものではなく、解法を身につけるための講義である。

解法の順序

1. 問題を読んだら未知量、保存量、パラメータ、初期・境界条件を列挙する。
2. 章末の症状 → 手法表から、最初に立てる基本方程式を選ぶ。
3. 途中式は原理 → 基底／変数変換 → 条件の適用 → 最終結果の順で記す。
4. 最後に次元・符号・特別な極限・保存則を確認する。

構成：前半は頻出分野の基礎公式と標準的な導出、続いて初見問題の共通アルゴリズム・分野別詳解例題・4 大問の総合演習を掲載する。本改訂版ではさらに「理解をつなぐ講義ノート」を加え、式を選ぶ理由、途中の導出、誤答の原因を丁寧に補った。巻末には総点検と年度別の主題照合表を置く。各節の公式の条件も試験範囲と考えること。校正版では熱力学の仕事符号、非可換量子系の応答、状態密度の記号、および定石例番号を統一した。

注意

本書は東京大学公式の試験資料ではなく、著者による非公式学習教材である。過去問の出題文章や答案を大量複製せず、標準的な数学・物理公式を独立に整理した。SI 単位系、電磁場の時間因子 $e^{-i\omega t}$ 、Fourier 変換 $\hat{f}(k) = \int f(x)e^{-ikx}dx$ を原則とする。

目次

本書の読み方	2
1 基礎解法 I：量子調和振動子・摂動・波束	12
1.1 正準交換関係と生成消滅演算子	12
1.2 非縮退摂動論とパリティ	12
1.3 平方完成は摂動論の検算になる	13
1.4 Heisenberg 方程式とクエンチ	13
1.5 コヒーレント状態と回帰確率	14
2 基礎解法 II：理想 Bose 気体・比熱	15

2.1	波数空間の状態計数と状態密度	15
2.2	Bose 分布・熱的波長・ g_s 積分	15
2.3	凝縮温度と凝縮割合	15
2.4	エネルギーと定積比熱	16
2.5	異方的有効質量は Jacobian で解く	16
3	基礎解法 III：界面電磁波と薄膜	18
3.1	Maxwell 方程式を平面波に適用する	18
3.2	接線境界条件をアドミタンスで統一する	18
3.3	エネルギー保存・Brewster 角・全反射	19
3.4	薄膜の多重反射を和として扱う	19
4	基礎解法 IV：行列指数・Green 関数	21
4.1	2 階微分方程式を 1 階行列系にする	21
4.2	Cayley–Hamilton 定理で指数を 2 項に減らす	21
4.3	重根では Jordan 型を確認する	21
4.4	因果的 Green 関数と Fourier 応答	22
4.5	エネルギー法と漸近安定	22
5	過去問対策・量子力学の追加必修事項	23
5.1	1 次元 Schrödinger 方程式と境界条件	23
5.2	有限井戸・共鳴・移送行列	23
5.3	周期ポテンシャル・Bloch 条件（2026 年度主題）	23
5.4	時間依存摂動・二光子過程（2025 年度主題）	24
5.5	不確定関係・自由波束・スクイズド状態	24
5.6	スピン 1/2・磁気共鳴・量子相関	25
5.7	角運動量・水素原子・Landau 準位	25
5.8	断熱近似・Berry 位相	25
6	過去問対策・統計力学の追加必修事項	27
6.1	統計集団の選択と熱力学微分	27
6.2	古典気体・吸着サイト・回転子	27
6.3	Fermi/Bose 気体と状態密度	28
6.4	トラップ Bose 凝縮と低次元分散	28
6.5	Ising 模型・転送行列・感受率	28
6.6	平均場・Landau 自由エネルギー・相分離	29

6.7	高分子・2 状態分子・揺らぎと応答	29
6.8	フォノン・黒体放射・低温比熱	29
7	過去問対策・電磁気学と古典力学の追加必修事項	31
7.1	Maxwell 方程式・境界条件・エネルギー	31
7.2	Poisson 方程式・鏡像法・多重極展開	31
7.3	誘電体・界面波・Fresnel 法の選択	31
7.4	Rayleigh 散乱・光の運動量	32
7.5	同軸線路・表皮効果・伝播定数	32
7.6	荷電粒子運動・Lagrange 法・回転座標	32
7.7	連成振動・固有モード・安定性	33
7.8	特殊相対論と重力波の最小公式	33
8	過去問対策・数学の追加必修事項	34
8.1	固有値・射影・Cayley–Hamilton・冪零	34
8.2	最小ノルム・階数 1 摂動・行列の安定性	34
8.3	直交変換・Pauli 行列・回転群	35
8.4	Fourier・Laplace 変換・デルタ関数	35
8.5	複素解析と留数・積分の評価	35
8.6	偏微分方程式・Green 関数・熱核	36
8.7	Sturm–Liouville・Hermite・Bessel	36
8.8	変分法・最急降下法・確率過程	36
8.9	極小セット：問題の症状から手法を決める	37
9	短期演習：出題主題をつなぐ 16 の定石	38
定石例・01	二準位系と時間依存摂動	38
定石例・02	1 次元 Ising 転送行列	38
定石例・03	同軸伝送線路	38
定石例・04	Fourier 変換と Green 関数	39
定石例・05	縮退摂動・角運動量	39
定石例・06	Fermi 気体と Sommerfeld 展開	39
定石例・07	磁場中の荷電粒子	40
定石例・08	複素積分と Laplace 法	40
定石例・09	1 次元量子散乱	41
定石例・10	高分子鎖の張力と揺らぎ	41
定石例・11	連成振動子・断熱不変量	41

定石例・12	特性曲線法と拡散	42
定石例・13	2 量子ビットと量子相関	42
定石例・14	平均場相転移 (Curie–Weiss)	42
定石例・15	電気双極子放射	43
定石例・16	Sturm–Liouville 理論	43
10	初見問題を解くための共通アルゴリズム	44
10.1	基本の五段階	44
10.2	問題文の特徴と使う手法	44
10.3	難問で部分点を残す技術	44
11	実戦例題 I：量子力学 – 表現を選ぶ技術	45
11.1	例題 Q1：デルタ型引力の束縛状態と散乱	45
11.2	例題 Q2：四次摂動の一次補正と選択則	45
11.3	例題 Q3：縮退した 2 次元振動子の分裂	46
11.4	例題 Q4：短いパルスによる遷移	46
11.5	例題 Q5：スクイーズした波束の幅の時間発展	46
12	実戦例題 II：統計力学 – 状態を数え、対数を微分する	48
12.1	例題 S1：任意次元・任意分散の状態密度	48
12.2	例題 S2：3 次元自由 Bose 気体の臨界温度	48
12.3	例題 S3：異方的調和トラップの BEC	48
12.4	例題 S4：1 次元 Ising 模型の熱容量	49
12.5	例題 S5：高分子鎖の弾性と揺らぎ応答	49
12.6	例題 S6：固定粒子数の低温 Fermi 比熱	50
13	実戦例題 III：電磁気学・力学 – 境界と保存則を使う	51
13.1	例題 E1：鏡像法で力とポテンシャルエネルギー	51
13.2	例題 E2：Fresnel 反射を流束から検証する	51
13.3	例題 E3：誘電体球の分極と Rayleigh 散乱	51
13.4	例題 E4：双極子放射の角度積分	52
13.5	例題 E5：一様直交電磁場でのドリフト	52
13.6	例題 E6：同軸線路の電磁気と波動速度	53
14	実戦例題 IV：数学 – 線形化・変換・特性曲線	54
14.1	例題 M1：冪零行列は指数級数が止まる	54

14.2	例題 M2：減衰振動子の行列指数と臨界減衰	54
14.3	例題 M3：熱方程式の基本解	54
14.4	例題 M4：特性曲線と破綻時刻	55
14.5	例題 M5：留数計算の極配置	55
14.6	例題 M6：階数 1 更新の行列式と逆行列	55
14.7	例題 M7：Sturm–Liouville の直交性と境界条件	56
14.8	例題 M8：Laplace 法と退化した停留点	56
15	総合演習：公式を組み合わせる新作 4 大問	57
15.1	総合問 A（量子・25 点）：二準位系の急激な切替	57
15.2	総合問 B（統計・25 点）：二状態鎖の力学応答	57
15.3	総合問 C（電磁・25 点）：平行平板のエネルギーと力	58
15.4	総合問 D（数学・25 点）：熱方程式と時間依存の点源	58
16	応用問題で必要となる共通の検算法	60
16.1	記号計算や数値計算に頼る前に	60
16.2	自習に使う 7 日間の手順	60
16.3	全 25 年度を使った学習の位置づけ	60
17	理解をつなぐ講義ノート：公式の前に考えること	61
17.1	数式の前に、対象・条件・求める量を三列に分ける	61
18	理解補強 I：量子力学	61
18.1	固有値問題とは境界条件込みの問題である	61
18.2	散乱の振幅と確率を混同しない	62
18.3	生成消滅演算子は微分計算を選択則に変える	62
18.4	摂動論の分母は「どの準位から混ざるか」を表す	63
18.5	時間依存摂動は Fourier 成分を選ぶ	63
18.6	二準位系は「ベクトルの回転」とみなせる	64
19	理解補強 II：統計力学	64
19.1	なぜ $\log Z$ を微分すると平均エネルギーが出るのか	64
19.2	状態密度を覚えるより、球の体積を数える	64
19.3	Bose 凝縮は「励起状態の収容限界」で理解する	65
19.4	比熱の落とし穴：固定粒子数なら化学ポテンシャルも変わる	65
19.5	Fermi 気体は Fermi 面の近くしか温度で励起されない	65

19.6	転送行列では「最大固有値」が熱力学を決める	66
20	理解補強 III：電磁気学と古典力学	66
20.1	Maxwell 方程式の境界条件は小さい箱と輪から導く	66
20.2	Fresnel 係数は 2 本の一次方程式を解くだけ	67
20.3	鏡像法で境界を満たしても、像電荷は実物ではない	67
20.4	荷電粒子の問題では力学と幾何を分ける	68
20.5	連成振動子は「連立 ODE」ではなく「行列の固有値問題」	68
21	理解補強 IV：数学	68
21.1	行列指数は「微分方程式を一度に解く装置」	68
21.2	Fourier 変換は微分を掛け算へ変える	69
21.3	Green 関数は「点源に対する応答」	69
21.4	複素積分は極の位置で答えが決まる	69
21.5	特性曲線法では時間と空間を同時に動かす	70
21.6	Sturm–Liouville の直交性は部分積分から出る	70
22	ゆっくり解く 4 つの総合例題：知識が答案に変わるまで	71
22.1	詳解例題 A：調和振動子に突然一定の外力を加える	71
22.2	詳解例題 B：二状態の高分子鎖を伸ばす	72
22.3	詳解例題 C：同軸伝送線路の電磁波とエネルギー流	73
22.4	詳解例題 D：強制減衰振動子の Green 関数	74
22.5	4 題に共通する「採点される答案の骨格」	75
23	理解度確認：1 行の公式を、3 行の理由に戻す	76
24	解法エッセンス：25 年分を貫く思考の地図	78
24.1	近似法を選ぶ前の三つの問い	78
24.2	解けても点を落とす四種類の誤り	78
25	量子力学：境界・スペクトル・時間発展を一つの手順で扱う	79
25.1	E-Q1：デルタ障壁から Bloch 分散式を白紙で導く	79
25.2	E-Q2：トンネル透過率を流束で求める	79
25.3	E-Q3：スクイズド状態を共分散行列で理解する	80
25.4	E-Q4：時間依存摂動を遷移周波数の Fourier 解析にする	80
25.5	E-Q5：縮退摂動と角運動量の判定	80
25.6	E-Q6：密度行列と部分トレースは既出テーマに含まれる	81

26	統計力学：何を固定して微分するかが解法を決める	82
26.1	E-S1：分配関数の微分から揺らぎを導出する	82
26.2	E-S2：任意の分散則の状態密度を数える	82
26.3	E-S3：トラップ中 Bose 気体の凝縮温度	82
26.4	E-S4：固定粒子数の Fermi 気体の低温熱	83
26.5	E-S5：Ising 模型の転送行列は最大固有値に帰着する	83
26.6	E-S6：高分子鎖の張力は自由エネルギーから出す	84
26.7	E-S7：平均場・Landau 展開の安定性を見分ける	84
27	電磁気学・古典力学：場の方程式と境界条件を組み合わせる	85
27.1	E-E1：Poisson 方程式と境界条件から鏡像法を作る	85
27.2	E-E2：多重極展開を対称性から簡略化する	85
27.3	E-E3：Rayleigh 散乱は静電極化率から始まる	85
27.4	E-E4：Fresnel 反射は境界の 2 本の一次式を解く	86
27.5	E-E5：同軸線路では電場・磁場・流束を別々に積分する	86
27.6	E-E6：荷電粒子・回転座標系は変数の置き方で整理する	87
27.7	E-E7：小振動は二つの行列で決まる	87
28	数学：演算子の形を見て、対角化・変換・境界を選ぶ	88
28.1	E-M1：Jordan 型を意識した行列指数	88
28.2	E-M2：階数 1 摂動は逆行列を丸ごと計算しない	88
28.3	E-M3：Fourier 変換は微分を代数式に変える	88
28.4	E-M4：Green 関数のジャンプ条件と自己共役性	89
28.5	E-M5：留数と Fourier 積分は極の位置で選ぶ	89
28.6	E-M6：特性曲線法と拡散を混ぜない	89
28.7	E-M7：Sturm–Liouville の直交性と展開	90
28.8	E-M8：漸近積分は「最大点の周りの二次式」に戻す	90
29	4 分野横断：自力で解法を選ぶための確認演習	91
29.1	確認 1：摂動と厳密解の整合	91
29.2	確認 2：自由粒子と Dirac 粒子の状態密度を比較	91
29.3	確認 3：界面電磁波のエネルギー保存を求める	91
29.4	確認 4：非対角化可能な行列の初期値問題	91
30	25 年度・100 学習枠：解法対応台帳（主題索引レベル）	92
30.1	量子力学：25 年度の対応	92

30.2	統計力学：25 年度の対応	93
30.3	電磁気学・力学：25 年度の対応	93
30.4	数学：25 年度の対応	94
30.5	古い 13 年度の代表設問と全小問監査の区別	95
30.6	過去問を解くときの台帳の使い方	95
第 III 編 解法を自分で組み立てるための詳解講義		96
31	数学：式の形から解法を決める	96
31.1	未知量がベクトルか関数かを最初に判定する	96
31.2	無次元化で本質的なパラメータを減らす	96
31.3	行列の対角化：固有値だけでなく射影を作る	96
31.4	Jordan ブロック：指数関数に多項式が出る理由	97
31.5	階数 1 摂動を行列式補題で処理する	97
31.6	Fourier 変換：微分方程式を代数に変える	97
31.7	Green 関数は「点源に対する解」	97
31.8	特性曲線法：波が交差する前までが古典解	98
31.9	球対称問題では最初に $u(r) = rR(r)$ を作る	98
32	量子力学：支配方程式からスペクトルと遷移へ	98
32.1	境界条件だけで決まるものを先に決める	98
32.2	有限井戸：超越方程式は図で根の個数を数える	98
32.3	摂動の 2 次補正が負になる理由	99
32.4	四次摂動を一度だけ丁寧に展開する	99
32.5	時間依存摂動：遷移振幅から確率を作る	99
32.6	二次遷移と時間順序：単純な平方ではない	100
32.7	二準位系：Pauli 行列で時間発展を短縮する	100
32.8	断熱近似は「時間変化が遅い」だけではない	100
32.9	周期ポテンシャルと Bloch 条件の接続	100
32.10	WKB：適用できない点を先に見つける	101
33	統計力学：状態計数から熱力学量を導く	101
33.1	何が固定されているかで分配関数が変わる	101
33.2	分配関数の微分は「揺らぎ」を自動的に与える	101
33.3	2 状態分子：伸長と揺らぎを同時に計算する	102

33.4	状態密度：分散関係と次元を一緒に変える	102
33.5	Bose 凝縮を状態密度から一気に導く	102
33.6	トラップ中の Bose 気体：体積 V を代入しない	102
33.7	Fermi 気体：Sommerfeld 展開は状態密度を評価する手順	103
33.8	転送行列で 1 次元 Ising 模型を解く	103
33.9	Landau 展開は偶数次の安定性から始まる	103
34	電磁気学・古典力学：境界と保存則から解く	103
34.1	静電場の境界条件は小さな箱から出す	103
34.2	鏡像電荷法：電位の境界条件を検査する	104
34.3	電磁ポテンシャルのゲージと Lagrangian	104
34.4	電磁波：時間因子を宣言してから複素波数を解く	104
34.5	反射と透過：まず接線の E と H を連続にする	104
34.6	矩形導波管：遮断周波数が先に決まる	105
34.7	Lorentz 力で磁場が仕事をしないことを確認する	105
34.8	連成振動：運動方程式を一般化固有値問題にする	105
34.9	中心力運動と散乱：有効ポテンシャル	105
34.10	特殊相対論：固有加速度を積分する	106
34.11	回転系：有効ポテンシャルと Jacobi 積分	106
35	総合例題：途中式を答案へ変える	106
35.1	総合例題 A：量子系の外力切替えと測定	106
35.2	総合例題 B：統計系の張力と比熱	107
35.3	総合例題 C：電磁波の境界とエネルギー	107
35.4	総合例題 D：数学の Green 関数と減衰振動	107
36	理解度確認：16 問と詳しい解答	107
37	白紙演習：計算を省略せず、根拠を一つずつ書く	109
37.1	演習 1：2 準位模型を厳密に解いて摂動論を検算する	109
37.2	演習 2：四次摂動の二次補正を全中間状態で求める	109
37.3	演習 3：箱の境界条件からエネルギー量子化へ	109
37.4	演習 4：2 次元電子気体の Fermi 波数と低温比熱	110
37.5	演習 5：フォノンの比熱が T^3 になる過程	110
37.6	演習 6：Ising 模型の相関長を求める	110
37.7	演習 7：Dirichlet 境界を満たす Green 関数	111

37.8	演習 8：境界で電場と電束密度の何が連続か	111
37.9	演習 9：平面電磁波の Poynting 流束	111
37.10	演習 10：二自由度の固有モードの初期値問題	111
37.11	演習 11：一様電磁場の不変量	112
37.12	演習 12：安定な円軌道の判定	112
37.13	演習 13：Gauss 積分の正規化を検査する	112
37.14	演習 14：留数から振動積分を計算する	113
37.15	演習 15：逆行列がないときの固有値問題	113
37.16	演習 16：弱結合を無次元の比で書き直す	113
38	試験直前の最終チェックリスト	114
	最低限の検算 4 点	114
	到達目標	114
39	年度別の主題照合（索引）	115
39.1	量子力学と統計力学：25 年度すべて索引確認	115
39.2	数学 25 年度と電磁気学・力学 25 年度：代表主題を照合	115
39.3	資料範囲・確認上の制約	116
39.4	最初に習得する最小セット	117

1 基礎解法 I：量子調和振動子・摂動・波束

対応：既出主題例：2019 年（摂動）、2013・2004・2002 年（振動子）、2024・2022 年（量子状態）

1.1 正準交換関係と生成消滅演算子

出発点は $[x, p] = i\hbar$ 、 $H_0 = p^2/(2m) + m\omega^2 x^2/2$ 。次の x_*, p_* は次元を整理するための基底状態の標準偏差である。

必須公式

$$\begin{aligned} x_* &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, & p_* &= \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}, \\ a &= \frac{x}{2x_*} + \frac{ip}{2p_*}, & a^\dagger &= \frac{x}{2x_*} - \frac{ip}{2p_*}, \\ [a, a^\dagger] &= 1, & H_0 &= \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \\ x &= x_*(a + a^\dagger), & p &= ip_*(a^\dagger - a), \\ a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, & a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \end{aligned}$$

最短の導出： $[x, p]$ を代入して $[a, a^\dagger]$ を計算。 $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$ を使い H_0 の x^2, p^2 に戻す。

$$\langle n|x^2|n\rangle = x_*^2(2n+1) = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

選択則： $x \propto a + a^\dagger$ は $\Delta n = \pm 1$ 、 x^2 は $\Delta n = 0, \pm 2$ だけを結ぶ。 $\langle n|x|n\rangle = 0$ 。

1.2 非縮退摂動論とパリティ

$H = H_0 + V$ 、非縮退固有状態 $|n\rangle$ を考える。 $\Delta E_n^{(2)}$ の分母の符号を失わないこと。

必須公式

$$\begin{aligned} \Delta E_n^{(1)} &= \langle n|V|n\rangle, \\ \Delta E_n^{(2)} &= \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k|V|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}, \\ |\psi_n\rangle &= |n\rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\langle k|V|n\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |k\rangle + O(V^2). \end{aligned}$$

基礎演習の変形 $V_\varepsilon = \varepsilon m\omega^2 x^2/2$ 、 $V_F = -Fx$ では

$$\Delta E_n^{(1,\varepsilon)} = \frac{\varepsilon\hbar\omega}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \Delta E_n^{(1,F)} = 0, \quad \Delta E_n^{(2,F)} = -\frac{F^2}{2m\omega^2}.$$

x^2 は偶、 x は奇なので二次の εF 交差項は**パリティでゼロ**。基底状態は

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle + \frac{Fx_*}{\hbar\omega} |1\rangle - \frac{\sqrt{2}}{8}\varepsilon |2\rangle + O(\varepsilon^2, \varepsilon F, F^2).$$

この表示のノルムと 1 との差は二次以上。 $\langle x \rangle = F/(m\omega^2) + O(\varepsilon F, F^3)$ 。

注意

非縮退摂動論はエネルギー差が摂動行列要素より大きい領域で使う。**縮退した準位**にはそのまま適用できない。 εF^2 はゼロと断定せず、低次の打ちりに含める。

1.3 平方完成は摂動論の検算になる

必須公式

$$\begin{aligned}\Omega &= \omega\sqrt{1+\varepsilon}, & x_c &= \frac{F}{m\Omega^2}, \\ H_{\varepsilon,F} &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2}(x-x_c)^2 - \frac{F^2}{2m\Omega^2}, \\ E_n(\varepsilon, F) &= \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{F^2}{2m\Omega^2}.\end{aligned}$$

使い方：定数外力の線形項を**座標の平行移動**として解釈する。 $\varepsilon > -1$ が安定性条件。 $\sqrt{1+\varepsilon} \simeq 1 + \varepsilon/2$ 、 $(1+\varepsilon)^{-1} \simeq 1 - \varepsilon$ を展開すると摂動結果が再現される。

$$[E_n] = J, \quad \left[\frac{F^2}{m\omega^2} \right] = J.$$

1.4 Heisenberg 方程式とクエンチ

$t=0$ で突然 $H_0 - Fx$ へ切り替え、初期状態を**元の** $|0\rangle$ とする。状態が変わらなくても発展を支配する H は変わる。

必須公式

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{p}{m}, & \dot{p} &= -m\omega^2 x + F, \\ \langle x(t) \rangle &= \frac{F}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t), & \langle p(t) \rangle &= \frac{F}{\omega} \sin \omega t, \\ (\Delta x)^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}, & (\Delta p)^2 &= \frac{m\hbar\omega}{2}, \\ \Delta x \Delta p &= \frac{\hbar}{2}.\end{aligned}$$

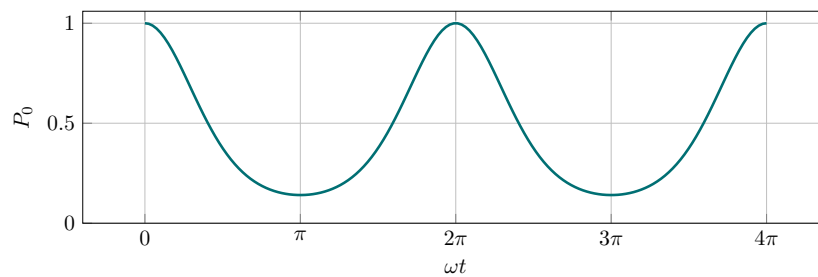
最短導出：演算子運動 $\ddot{x} + \omega^2 x = F/m$ を初期条件 $x(0) = x, p(0) = p$ で解く。その後、元の真空で期待値を取る。定数外力は波束の中心だけを移動させるので分散は不変。

1.5 コヒーレント状態と回帰確率

必須公式

$$\begin{aligned}
 |\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, & a|\alpha\rangle &= \alpha|\alpha\rangle, \\
 g &= \frac{Fx_*}{\hbar\omega}, & \alpha(t) &= g(1 - e^{-i\omega t}), \\
 P_0(t) &= |\langle 0|\alpha(t)\rangle|^2 = \exp\left[-4g^2 \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right].
 \end{aligned}$$

区別：重なり振幅は $e^{-|\alpha|^2/2}$ 、確率は $e^{-|\alpha|^2}$ 。 $t = 2\pi j/\omega$ で $P_0 = 1$ 、 $F \rightarrow 0$ で $P_0 \rightarrow 1$ 。



模式図： $g = 0.7$ での回帰確率。 g は無次元。

解法の順序

問 1 の 6 小問： (1) $[a, a^\dagger]$ と選択則 → (2) 対角期待値と 2 次摂動 → (3) 固有状態補正 → (4) 平方完成 → (5) Heisenberg 方程式 → (6) coherent state の重なり。

2 基礎解法 II：理想 Bose 気体・比熱

対応：既出主題例：2025 年（捕獲 Bose）、2018・2013 年（Bose）、2009 年（量子統計）

2.1 波数空間の状態計数と状態密度

周期境界 $k_j = 2\pi n_j/L$ から、波数空間の 1 状態の体積は $(2\pi)^3/V$ 。単一粒子の二次分散 $\epsilon = \hbar^2 k^2/(2m)$ なら球内部の状態数を微分する。

必須公式

$$N(\epsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2m\epsilon}{\hbar^2} \right)^{3/2},$$

$$D(\epsilon) = \frac{dN}{d\epsilon} = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} \quad (\epsilon > 0).$$

重要：これはスピン縮退なし。 D は全系の状態密度で、体積当たりなら D/V 。 $[D] = \text{energy}^{-1}$ 。 $k = 0$ の基底状態は連続積分から分ける。

2.2 Bose 分布・熱的波長・ g_s 積分

必須公式

$$\beta = (k_B T)^{-1}, \quad z = e^{\beta\mu} \leq 1,$$

$$\bar{n}(\epsilon) = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1},$$

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}, \quad g_s(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell^s},$$

$$\int_0^\infty \epsilon^{s-1} e^{-a\epsilon} d\epsilon = \Gamma(s) a^{-s},$$

$$z \frac{dg_s}{dz} = g_{s-1}(z) \quad (0 < z < 1).$$

使う手順： $1/(z^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1) = \sum_{\ell \geq 1} z^\ell e^{-\ell\beta\epsilon}$ に展開し、各項を Γ 積分する。 $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ 、 $\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$ 。

$$N_{\text{ex}} = \int_0^\infty D(\epsilon) \bar{n}(\epsilon) d\epsilon = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z).$$

2.3 凝縮温度と凝縮割合

凝縮の本質は $\mu \leq 0$ （基底エネルギーゼロ）ゆえ $z \leq 1$ となり、励起数が有限な上限を持つこと。

必須公式

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{n}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}, \quad n = \frac{N}{V},$$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (0 < T < T_c), \quad z = 1 \quad (T < T_c).$$

理由： $N_{\text{ex}}^{\text{max}} = V\lambda_T^{-3}\zeta(3/2)$ 。 $T = T_c$ で $N = N_{\text{ex}}^{\text{max}}$ を解く。 $T < T_c$ では余剰の $N - N_{\text{ex}}$ を N_0 が担う。

2.4 エネルギーと定積比熱

必須公式

$$U = \frac{3}{2} \frac{V k_B T}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z),$$

$$\frac{C_{V,<}}{N k_B} = \frac{15}{4} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2},$$

$$\left. \frac{dz}{dT} \right|_{N,V} = - \frac{3z}{2T} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} \quad (T > T_c),$$

$$\frac{C_{V,>}}{N k_B} = \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}.$$

計算の核： $C_V = (\partial U / \partial T)_{N,V}$ 。 $T > T_c$ では $z(T)$ を固定して微分してはいけない。 $N = V\lambda_T^{-3}g_{3/2}(z)$ を微分して dz/dT を得る。

$$\lim_{T \rightarrow T_c^-} \frac{C_V}{N k_B} = \lim_{T \rightarrow T_c^+} \frac{C_V}{N k_B} = \frac{15}{4} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)},$$

ここで $z \rightarrow 1-$ のとき $g_{1/2}(z) \rightarrow \infty$ 。 $z \ll 1$ では古典極限 $C_V \rightarrow 3Nk_B/2$ 。

2.5 異方的有効質量は Jacobian で解く

分散 $\epsilon = \hbar^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2/\alpha)/(2m)$ 、 $\alpha > 0$ 。

必須公式

$$q_z = k_z/\sqrt{\alpha}, \quad d^3k = \sqrt{\alpha} dk_x dk_y dq_z,$$

$$D_\alpha(\epsilon) = \sqrt{\alpha} D_1(\epsilon),$$

$$\frac{T_c(\alpha)}{T_c(1)} = \alpha^{-1/3}.$$

予備知識：一般の正定値二次形式 $\epsilon \propto \mathbf{k}^\top M^{-1} \mathbf{k}$ では、状態密度の体積係数は $\sqrt{\det M}$ に比例する。

注意

$T \rightarrow T_c$ で $g_{1/2}(1)$ を有限数として代入しない。 $g_s(1) = \zeta(s)$ の級数表示は $s > 1$ でのみ収束する。熱力学極限・固定 α の仮定を保持する。

解法の順序

問 2 の 6 小問：(1) 球殻の計数 $\rightarrow$ (2) 分布の級数展開と Γ 積分 $\rightarrow$ (3) 励起数の飽和 $\rightarrow$ (4) $U \propto T^{5/2} \rightarrow$ (5) 粒子数を固定して陰関数微分 $\rightarrow$ (6) k_z の変数変換。

3 基礎解法 III：界面電磁波と薄膜

対応：既出主題例：2022 年（Fresnel・全反射）、2014 年（表皮効果・反射）

3.1 Maxwell 方程式を平面波に適用する

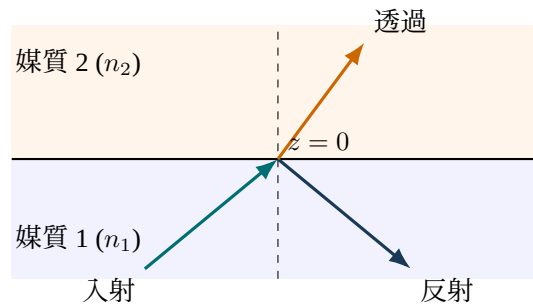
損失なし、線形等方、 $\mu = \mu_0$ 、 $\epsilon = \epsilon_0 n^2$ を仮定。 $\mathbf{E} = \text{Re}\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\}$ に代入する。

必須公式

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, & \nabla \times \mathbf{H} &= \partial_t \mathbf{D}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 &= \omega \mu_0 \mathbf{H}_0, & \mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 &= -\omega \epsilon_0 n^2 \mathbf{E}_0, \\ |\mathbf{k}| &= \frac{n\omega}{c}, & \mathbf{H}_0 &= \frac{n}{\mu_0 c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0. \end{aligned}$$

位相整合：界面 $z = 0$ のすべての x, t で位相が一致するので、 $k_{x,i} = k_{x,r} = k_{x,t}$ 。従って

$$\theta_r = \theta_i, \quad n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t.$$



注：界面を水平に描いた模式図。入射側を下、透過側を上としている。法線方向は上向き。

3.2 接線境界条件をアドミタンスで統一する

自由表面電荷・電流なし：接線 $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ が連続。振幅の定義を固定する。

必須公式

$$\begin{aligned} \text{TE(s)}: \quad E_{\parallel} &= E_y, \quad Y_s = \frac{n \cos \theta}{\mu_0 c}, \\ \text{TM(p)}: \quad E_{\parallel} &= E_x, \quad Y_p = \frac{n}{\mu_0 c \cos \theta}, \\ 1 + r &= t, \quad Y_1(1 - r) = Y_2 t, \\ r &= \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad t = \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2}. \end{aligned}$$

Y_1, Y_2 へ s と p の値を代入すれば両方の Fresnel 係数が出る。

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, & t_s &= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \\ r_p &= \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}, & t_p &= \frac{2n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}. \end{aligned}$$

注意

本書の r_p は接線電場 E_x の振幅比。反射波の局所偏光基底を用いる教科書の r_p と符号が逆になる場合がある。垂直入射で $r_s = r_p = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ が検算点。

3.3 エネルギー保存・Brewster 角・全反射

時間平均 Poynting ベクトル $\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*)$ 。正面から界面に入るエネルギー流束を比べる。

必須公式

$$\begin{aligned} R &= |r|^2, & T &= \frac{Y_2}{Y_1} |t|^2, & R + T &= 1 \\ \theta_B &= \arctan \frac{n_2}{n_1} \quad (n_1 \neq n_2), \\ \theta_c &= \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (n_1 > n_2), \\ \kappa &= \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2} \quad (\theta_i > \theta_c). \end{aligned}$$

$R + T = 1$ の確認： $Y_j > 0$ の場合

$$\frac{(Y_1 - Y_2)^2 + 4Y_1 Y_2}{(Y_1 + Y_2)^2} = 1.$$

全反射の区別： $k_{z,2} = i\kappa$ 、透過側の場合は $e^{-\kappa z}$ 、時間平均法線方向流束はゼロだが、場自体はゼロではない。
 $n_1 = n_2$ なら界面反射は全角度でゼロなので Brewster 角は一意に定まらない。

3.4 薄膜の多重反射を和として扱う

必須公式

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \frac{n_i - n_j}{n_i + n_j}, & \phi &= \frac{2\pi n_2 d}{\lambda_0}, \\ r_{\text{film}} &= \frac{r_{12} + r_{23} e^{2i\phi}}{1 + r_{12} r_{23} e^{2i\phi}}, \\ n_2^2 &= n_1 n_3, \quad d = \frac{\lambda_0}{4n_2} \implies r_{\text{film}} = 0. \end{aligned}$$

導出の芯：膜内部の反射は毎回 $e^{2i\phi}$ を獲得。振幅の幾何級数を足し、 $r_{21} = -r_{12}$ を使って整理。 $\phi = \pi/2$ で $e^{2i\phi} = -1$ 、屈折率の条件で $r_{12} = r_{23}$ 。

解法の順序

問3の7小問：(1) Maxwell $\rightarrow$ (2) 接線位相 $\rightarrow$ (3),(4) 境界条件を Y で一括処理 $\rightarrow$ (5) 法線流束 $\rightarrow$ (6) $r_p = 0$ または k_z 虚数 $\rightarrow$ (7) 往復位相と幾何級数。

4 基礎解法 IV：行列指数・Green 関数

対応：既出主題例：2026・2023 年（行列指数）、2015 年（Cayley–Hamilton・Green 関数）

4.1 2 階微分方程式を 1 階行列系にする

必須公式

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2.$$

使い方： $\gamma < \omega_0$ ：不足減衰（振動）、 $\gamma = \omega_0$ ：臨界、 $\gamma > \omega_0$ ：過減衰。 $\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ 。

4.2 Cayley–Hamilton 定理で指数を 2 項に減らす

$B = A + \gamma I$ とおくと $B^2 = (\gamma^2 - \omega_0^2)I \equiv \Delta^2 I$ 。偶数幂・奇数幂に分けるだけで指数が閉じる。

必須公式

$$e^{At} = e^{-\gamma t} \left[\cosh(\Delta t) I + \frac{\sinh(\Delta t)}{\Delta} (A + \gamma I) \right].$$

$\Delta = i\nu$ 、 $\nu = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ なら $\cosh(i\nu t) = \cos \nu t$ 、 $\sinh(i\nu t)/(i\nu) = \sin \nu t/\nu$ 。

$$e^{At} = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos \nu t + \frac{\gamma}{\nu} \sin \nu t & \frac{\sin \nu t}{\nu} \\ -\frac{\omega_0^2}{\nu} \sin \nu t & \cos \nu t - \frac{\gamma}{\nu} \sin \nu t \end{pmatrix}.$$

$x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ の場合

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \left[\cos \nu t + \frac{\gamma}{\nu} \sin \nu t \right].$$

4.3 重根では Jordan 型を確認する

$\gamma = \omega_0 > 0$ では $B^2 = 0$ 、 $B \neq 0$ 。したがって固有値は重複しても固有ベクトルは 1 本。

必須公式

$$e^{At} = e^{-\gamma t} (I + tB) = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} 1 + \gamma t & t \\ -\gamma^2 t & 1 - \gamma t \end{pmatrix}, \quad x(t) = x_0 (1 + \gamma t) e^{-\gamma t}.$$

検算： $\nu \rightarrow 0$ で $\sin(\nu t)/\nu \rightarrow t$ 。重根 $\Rightarrow$ 必ず対角化可能、ではない。

4.4 因果的 Green 関数と Fourier 応答

Green 関数 $LG = \delta$ 、 $L = \partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2$ 。因果性 $G(t < 0) = 0$ とジャンプ条件 $G'(0^+) - G'(0^-) = 1$ を使う。

必須公式

$$\begin{aligned} G(t) &= \Theta(t)e^{-\gamma t} \frac{\sin \nu t}{\nu} \quad (0 \leq \gamma < \omega_0), \\ x(t) &= \int_0^t G(t-s)f(s)ds \quad (\text{零初期値}), \\ \chi(\Omega) &= \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega} \quad (\text{時間因子 } e^{-i\Omega t}). \end{aligned}$$

手順：デルタ源で G' に単位ジャンプを課す → 畳み込み。調和外力の定常応答は時間微分を $-i\Omega$ に置換する。 χ の次元は時間²。

4.5 エネルギー法と漸近安定

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2), \quad \dot{E} = -2\gamma\dot{x}^2 \leq 0.$$

$\gamma > 0$ 、 $\omega_0 > 0$ なら $\dot{E} = 0$ が全時刻続く唯一の解は $x = \dot{x} = 0$ 。線形固有値の実部がすべて負であることから漸近安定。 $\gamma = 0$ は保存振動で、漸近安定とはいえない。

解法の順序

問4の7小問：(1) 一次化・固有値 → (2) Cayley–Hamilton → (3) $\Delta = i\nu$ → (4) $B^2 = 0$ → (5) デルタ源と畳み込み → (6) $\partial_t \mapsto -i\Omega$ → (7) $\dot{E}$ の符号。

5 過去問対策・量子力学の追加必修事項

対応：量子力学 2001–2026 年度の索引 25 年度分：有限井戸・散乱・スピン・角運動量・Landau 準位・量子状態・バンド理論

5.1 1 次元 Schrödinger 方程式と境界条件

必須公式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

$$\psi(0^+) = \psi(0^-),$$

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(0)$$

後半は $V(x) = \lambda\delta(x)$ の場合。有限の段差だけなら ψ' も連続。無限壁では $\psi = 0$ (Dirichlet 条件)。

解く順序：領域分割 → 波数 $k_j^2 = 2m(E - V_j)/\hbar^2$ → 各領域に正逆進行波または指数減衰 → 境界条件 → 連立一次方程式。束縛状態は無限遠で正規化可能な解だけを残す。

注意

デルタポテンシャルでは導関数が不連続。境界の両側の波数が違うと透過率は $T = (k_R/k_L)|t|^2$ であり、単に $|t|^2$ ではない。

5.2 有限井戸・共鳴・移送行列

幅 $2a$ の対称井戸 $V = -V_0$ ($|x| < a$)、外で 0、 $-V_0 < E < 0$ を考える。

必須公式

$$k = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar,$$

$$\kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar,$$

$$\text{偶状態: } k \tan(ka) = \kappa,$$

$$\text{奇状態: } -k \cot(ka) = \kappa.$$

最短導出：偶・奇対称性で井戸内 $\cos(kx)$ または $\sin(kx)$ を選ぶ。 $x = a$ で関数と導関数を一致させ、振幅を消去する。散乱では $(A_R, B_R)^\top = M(A_L, B_L)^\top$ を使うと複数障壁を積で扱える。共鳴透過は干渉により反射振幅が打ち消されるエネルギーを探す。

5.3 周期ポテンシャル・Bloch 条件 (2026 年度主題)

格子間隔 a 、 $V(x) = \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - na)$ 、自由領域の波数 $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ を考える。

必須公式

$$\begin{aligned}\psi_K(x+a) &= e^{iKa} \psi_K(x), \\ \cos(Ka) &= \cos(ka) + \frac{m\lambda}{\hbar^2 k} \sin(ka).\end{aligned}$$

$|\cos(ka) + (m\lambda/\hbar^2 k) \sin(ka)| \leq 1$ が許容帯の条件。

解く順序：一胞の自由伝播行列 $\times$ デルタの接続行列 $\rightarrow$ 行列式 1 の単胞移送行列 $M \rightarrow$ 固有値 $e^{\pm iKa} \rightarrow \text{Tr } M = 2 \cos(Ka)$ 。 $\lambda \rightarrow 0$ で自由粒子へ戻る。

5.4 時間依存摂動・二光子過程（2025 年度主題）

相互作用表示 $V_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} V(t) e^{-iH_0 t/\hbar}$ 。

必須公式

$$\begin{aligned}c_f^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle f | V_I(t_1) | i \rangle dt_1, \\ c_f^{(2)}(t) &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle f | V_I(t_1) | n \rangle \langle n | V_I(t_2) | i \rangle.\end{aligned}$$

方法：遷移の選択則を先に確認する。一次がゼロなら二次の中間状態和を調べる。共鳴周波数はエネルギー差から決め、有限時間の sinc 幅と摂動の有効性も検討する。

5.5 不確定関係・自由波束・スクイーズド状態

必須公式

$$\begin{aligned}\Delta A \Delta B &\geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|, & \Delta x \Delta p &\geq \hbar/2, \\ \sigma_x(t)^2 &= \sigma_0^2 + \left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_0}\right)^2, \\ \Delta x^2 &= x_*^2 e^{-2r}, & \Delta p^2 &= p_*^2 e^{2r}.\end{aligned}$$

自由波束の幅の式は初期無相関の最小 Gaussian 波束に限る。スクイーズド状態は適切な位相の実数 r に対する公式。**方法：**共分散行列を計算し、不確定積と時間発展を追う。 $\langle xp + px \rangle/2 - \langle x \rangle \langle p \rangle \neq 0$ なら自由波束の幅に交差項が加わる。単なる $\Delta x \Delta p = \hbar/2$ は一般状態の等式ではない。

5.6 スピン 1/2 ・ 磁気共鳴 ・ 量子相関

必須公式

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_j &= \delta_{ij} I + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \\ e^{-i\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2} &= I \cos(\theta/2) - i(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin(\theta/2), \\ H &= \frac{\hbar}{2}(\Delta \sigma_z + \Omega \sigma_x), \\ P_{- \rightarrow +}(t) &= \frac{\Omega^2}{\Delta^2 + \Omega^2} \sin^2\left(\frac{t\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}}{2}\right), \\ \rho_A &= \text{Tr}_B \rho_{AB}, \quad \langle \sigma_i \otimes \sigma_j \rangle = \text{Tr}(\rho_{AB} \sigma_i \otimes \sigma_j).\end{aligned}$$

方法：基底と状態の直積順序を固定する → Pauli 行列で 2×2 または 4×4 に落とす → 固有値または行列指数で発展を求める → 確率・相関を跡で計算する。

5.7 角運動量 ・ 水素原子 ・ Landau 準位

必須公式

$$\begin{aligned}[L_i, L_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k, & L^2 |\ell m\rangle &= \hbar^2 \ell(\ell+1) |\ell m\rangle, \\ L_{\pm} |\ell m\rangle &= \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)} |\ell, m \pm 1\rangle, \\ E_n^{\text{H}} &= -\frac{m_r e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2}, \\ E_n^{\text{Landau}} &= \hbar \omega_c (n + \tfrac{1}{2}), \quad \omega_c = \frac{|q|B}{m}, \\ \frac{N_{\text{states}}}{A} &= \frac{|q|B}{2\pi\hbar} \quad (\text{単一 Landau 準位、端効果無視}).\end{aligned}$$

方法：回転対称なら共通固有関数へ分離。磁場では $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$ を使い、ゲージによらないスペクトルに到達する。磁束量子あたりの状態数を数え、スピン縮退と混同しない。

5.8 断熱近似 ・ Berry 位相

必須公式

$$\begin{aligned}H(\lambda(t))|n(t)\rangle &= E_n(t)|n(t)\rangle, \\ \frac{\hbar |\langle m|\dot{H}|n\rangle|}{|E_m - E_n|^2} &\ll 1 \quad (m \neq n), \\ \gamma_n &= i \int \langle n(t)|\partial_t n(t)\rangle dt.\end{aligned}$$

方法：準位間の最小ギャップを確認する → 遷移振幅を抑える速度条件を評価する → 力学位相 $-\int E_n dt/\hbar$ と幾何学的位相を区別する。閉路位相は固有ベクトルのゲージに依らない量として整理する。

6 過去問対策・統計力学の追加必修事項

対応：統計力学索引 25 年度分：分配関数・高分子・Ising・Bose/Fermi・比熱・揺らぎ・相転移

6.1 統計集団の選択と熱力学微分

必須公式

$$\begin{aligned}
 Z_N(T, V) &= \sum_s e^{-\beta E_s}, & F &= -k_B T \log Z_N, \\
 U &= -\frac{\partial \log Z_N}{\partial \beta}, & S &= -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{N, V}, \\
 \Xi &= \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N, & z &= e^{\beta \mu}, \\
 \Omega_G &= -k_B T \log \Xi, & \langle N \rangle &= z \frac{\partial \log \Xi}{\partial z}, \\
 \langle (\Delta N)^2 \rangle &= k_B T \left(\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu} \right)_{T, V}.
 \end{aligned}$$

方法：粒子数固定なら正準、化学ポテンシャル固定なら大正準。 $H = H_0 - fX$ で X が f に依存しない場合、 $\langle X \rangle = \beta^{-1} \partial_f \log Z$ 。さらに古典系または $[H_0, X] = 0$ の量子系なら $\partial_f \langle X \rangle = \beta \text{Var}(X)$ 。非可換な量子系では虚時間相関を用いる。微分時に何を固定するかを書く。

6.2 古典気体・吸着サイト・回転子

必須公式

$$\begin{aligned}
 \lambda_T &= \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}, & Z_N^{\text{ideal}} &= \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \right)^N, \\
 p_{\text{occ}} &= \frac{ze^{-\beta \epsilon}}{1 + ze^{-\beta \epsilon}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}, \\
 Z_{\text{rot}} &= \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) g_J e^{-\beta B J(J+1)}.
 \end{aligned}$$

吸着式は **1 サイト最大 1 個** の場合であり、フェルミ粒子以外でも占有排他の 2 状態模型として成立する。回転子の g_J は核スピン統計などによる付加縮退度で、分子種と温度で異なる。**方法：**1 自由度の Z_1 を先に作る → 独立自由度を積にする → 物理量を $\log Z$ の微分で取り出す。

6.3 Fermi/Bose 気体と状態密度

必須公式

$$\begin{aligned}\bar{n}_B(\epsilon) &= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}, & \bar{n}_F(\epsilon) &= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}, \\ \log \Xi_B &= - \sum_j \log(1 - ze^{-\beta\epsilon_j}), & \log \Xi_F &= \sum_j \log(1 + ze^{-\beta\epsilon_j}), \\ D_3(\epsilon) &= \frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{\epsilon}, & N &= \int_0^\infty D_3(\epsilon) \bar{n}(\epsilon) d\epsilon.\end{aligned}$$

g は内部縮退度。 D_3 は 3 次元非相対論的自由粒子の状態密度。 Bose 凝縮では基底状態占有 N_0 を積分から別に取り出す。 Sommerfeld 展開は $k_B T \ll \epsilon_F$ かつ $D(\epsilon)$ が μ 近傍で滑らかな場合に使う。

6.4 トラップ Bose 凝縮と低次元分散

必須公式

$$\begin{aligned}D_{\text{trap}}(\epsilon) &\simeq \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z}, \\ k_B T_c &= \hbar(\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} \left(\frac{N}{\zeta(3)}\right)^{1/3}, \\ D_d(\epsilon) &\propto \epsilon^{d/2-1} \quad \left(\epsilon = \frac{p^2}{2m}\right), \\ D_{\text{Dirac},d}(\epsilon) &\propto |\epsilon|^{d-1} \quad (\epsilon \propto |p|).\end{aligned}$$

方法：まず分散関係・捕獲条件を確認し、位相空間の体積を微分して状態密度を求める。 3 次元一様気体の $T_c \propto n^{2/3}$ を調和トラップの $T_c \propto N^{1/3}$ へ流用しない。 Dirac 点近傍では状態密度の冪が低温比熱の温度依存を決める。

6.5 Ising 模型・転送行列・感受率

必須公式

$$\begin{aligned}H &= -J \sum_{j=1}^N s_j s_{j+1} - h \sum_j s_j, \quad s_j = \pm 1, \\ T_{ss'} &= \exp\{\beta J s s' + \frac{\beta h}{2}(s + s')\}, \\ Z_N &= \text{Tr } T^N, \\ \langle s \rangle &= \frac{\partial \log \lambda_{\max}}{\partial(\beta h)}, \\ f_\infty &= -k_B T \log \lambda_{\max}, \\ \chi_h &= \left. \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial h} \right|_{h=0} = \beta e^{2\beta J}.\end{aligned}$$

上式の χ_h はスピン 1 個のエネルギー単位の h についての感受率（周期・熱力学極限）。反強磁性なら $J < 0$ とすれば同じ転送行列法を用いられる。転送行列で $\lambda_- < 0$ になっても $\lambda_{\max}$ は正で、相関長には $|\lambda_-|$ を用いる。

6.6 平均場・Landau 自由エネルギー・相分離

必須公式

$$\begin{aligned} f(m) &= f_0 + \frac{a}{2}m^2 + \frac{b}{4}m^4 - hm, \quad b > 0, \\ 0 &= f'(m) = am + bm^3 - h, & f''(m) > 0 \quad (\text{局所安定}), \\ m_{\pm}(h=0) &= \pm\sqrt{-a/b} \quad (a < 0), \\ \chi_{h=0, a>0} &= 1/a. \end{aligned}$$

方法：各成分の混合エントロピー $-k_B \sum_i x_i \log x_i$ と相互作用エネルギーから f を作る → 定常点 → 曲率 → 共存する極小の自由エネルギーを比較。 $f'' < 0$ は不安定、 $f'' > 0$ だけでは大域最小とは限らない。

6.7 高分子・2 状態分子・揺らぎと応答

必須公式

$$\begin{aligned} Z_N(f) &= [Z_1(f)]^N, & \langle X \rangle &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log Z_N}{\partial f}, \\ \text{Var}(X) &= \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \log Z_N}{\partial f^2}, \\ \langle X \rangle_{f \approx 0} &= \beta f \text{Var}_0(X) + O(f^2) \quad (\langle X \rangle_0 = 0), \\ S_{\text{mix}} &= -k_B N \{x \log x + (1-x) \log(1-x)\}. \end{aligned}$$

方法：局所状態のエネルギー・長さを表にする → 単量体の Z_1 を作る → 張力微分 → 小力・大力で検算。有限伸長の飽和と線形応答の適用範囲を確認する。

6.8 フォノン・黒体放射・低温比熱

必須公式

$$\begin{aligned} \langle n_{\omega} \rangle &= \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}, \\ C_V^{\text{Debye}} &\simeq \frac{12\pi^4}{5} N k_B \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \quad (T \ll \Theta_D), \\ u(\omega) &= \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \quad (\text{黒体、単位角周波数・単位体積}), \\ U_{\text{osc}} &= \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + \langle n_{\omega} \rangle \right). \end{aligned}$$

方法：正規モード $\rightarrow$ 状態密度 $\rightarrow$ Bose 分布で内部エネルギー $\rightarrow C_V = \partial_T U$ 。光子は $\mu = 0$ で 2 偏光。 Θ_D は 3 音響分枝を積分した正規化で定義する。

7 過去問対策・電磁気学と古典力学の追加必修事項

対応：電磁気・力学 2014–2026 年度の確認済み 12 年度分の索引、および古典電磁気・力学の基礎

7.1 Maxwell 方程式・境界条件・エネルギー

必須公式

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_f + \partial_t \mathbf{D}, \\
 \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0, & \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma_f, \\
 \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{K}_f, & \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0, \\
 \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H}, & u &= \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}).
 \end{aligned}$$

u の式は非分散・線形・無損失媒質を想定する。調和場の平均エネルギー流は $\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$ 。界面では自由表面電荷・電流があるかを問題文から判断。

7.2 Poisson 方程式・鏡像法・多重極展開

必須公式

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \phi &= -\rho/\epsilon_0, & \mathbf{E} &= -\nabla \phi, \\
 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \\
 \phi(r \gg a) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \frac{Q_{ij} \hat{r}_i \hat{r}_j}{2r^3} + \dots \right), \\
 Q &= \int \rho d^3r, \quad \mathbf{p} = \int \rho \mathbf{r} d^3r, \\
 Q_{ij} &= \int \rho(3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) d^3r'.
 \end{aligned}$$

鏡像法：無限接地導体平面 $z=0$ の上側に点電荷 q が高さ d にあるとき、上側の解は鏡像位置 $z=-d$ の電荷 $-q$ と実電荷のポテンシャルで表せる。境界上 $\phi=0$ と無限遠での条件を確認し、反対側の物理的電場まで鏡像を延長しない。

7.3 誘電体・界面波・Fresnel 法の選択

方法：角度を法線から測る $\rightarrow$ 接線波数保存 $k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 \rightarrow$ TE は E_y 、TM は基底ベクトルと接線成分の符号を固定 $\rightarrow$ 境界の 2 条件を解く。反射率 $R = |r|^2$ 、透過率は法線の Poynting 流束の比。全反射では透過側の法線波数が虚数となり、エバネッセント場でも接線方向に流束はあり得る。

7.4 Rayleigh 散乱・光の運動量

小球半径 $R \ll \lambda$ 、真空中、非磁性・誘電率比 ϵ_r の場合（吸収なし）

必須公式

$$\begin{aligned}\alpha &= 4\pi\epsilon_0 R^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}, & \mathbf{p}(t) &= \alpha \mathbf{E}(t), \\ \sigma_{\text{sca}} &= \frac{k^4 |\alpha|^2}{6\pi\epsilon_0^2}, & I &= \frac{1}{2} \epsilon_0 c |\mathbf{E}_0|^2, \\ \langle \mathbf{F}_{\text{grad}} \rangle &\simeq \frac{1}{4} \text{Re} \alpha \nabla |\mathbf{E}_0|^2 \quad (\text{緩変化・双極子近似}).\end{aligned}$$

方法：誘起双極子 → 遠方放射 → 角度積分 → 全散乱断面積。吸収・放射反作用が無視できないときは静電分極率だけでは足りない。散乱力と勾配力は区別する。

7.5 同軸線路・表皮効果・伝播定数

必須公式

$$\begin{aligned}C' &= \frac{2\pi\epsilon}{\log(b/a)}, & L' &= \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{b}{a}, \\ Z_0 &= \sqrt{L'/C'}, & v &= (L'C')^{-1/2}, \\ \delta &= \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}, & \tilde{k} &\simeq (1+i)\delta^{-1} \quad (e^{-i\omega t} \text{ 規約で } e^{i\tilde{k}z}).\end{aligned}$$

方法：Gauss・Ampère から半径方向場を決める → 単位長さの静電・磁気エネルギーから C', L' を求める。表皮深さは $\sigma \gg \omega\epsilon$ の良導体極限で使う。位相因子の規約を変えたら複素波数の虚部の符号も変わる。

7.6 荷電粒子運動・Lagrange 法・回転座標

必須公式

$$\begin{aligned}m\dot{\mathbf{v}} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \\ L &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} - q\phi, \\ \mathbf{p}_{\text{can}} &= m\mathbf{v} + q\mathbf{A}, \\ \mathbf{a}_{\text{inert}} &= \mathbf{a}_{\text{rot}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\text{rot}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}.\end{aligned}$$

方法：慣性系の運動方程式を立てる → 必要なら回転系に変換 → 保存量や有効ポテンシャルを調べる。ゲージ変換は L に全時間微分を付けるだけなので運動方程式は変わらない。

7.7 連成振動・固有モード・安定性

必須公式

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\top M \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top K \mathbf{q},$$

$$\det(K - \omega^2 M) = 0, \quad K \mathbf{u}_j = \omega_j^2 M \mathbf{u}_j,$$

$$\mathbf{u}_i^\top M \mathbf{u}_j = \delta_{ij}.$$

方法：平衡点でポテンシャルを2次まで展開 → 質量行列 M と剛性行列 K を得る → 一般化固有値 → モード重ね合わせ。 $\omega^2 < 0$ は指数的不安定、ゼロモードは拘束・対称性も検査する。

7.8 特殊相対論と重力波の最小公式

必須公式

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4,$$

$$t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad x' = \gamma(x - vt),$$

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + (at/c)^2} - 1 \right] \quad (\text{原点静止発進・一定固有加速度 } a),$$

$$P_{\text{GW}} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle, \quad Q_{ij} = \sum_A m_A (x_{Ai} x_{Aj} - \frac{1}{3} r_A^2 \delta_{ij}).$$

方法：固有時 $d\tau = dt/\gamma$ と座標時刻を区別する。重力波の式は非相対論的・弱重力・遠方・四重極近似の放射損失。質点系の力学的エネルギー減少 $\dot{E} = -P_{\text{GW}}$ から軌道変化を求める。

8 過去問対策・数学の追加必修事項

対応：数学 25 年度分の 191 ページ原資料・年度別見出し：線形代数、Fourier/Laplace、複素解析、PDE、特殊関数、変分

8.1 固有値・射影・Cayley–Hamilton・冪零

必須公式

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0, & e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \\ p_A(A) &= 0 & & \text{(特性多項式),} \\ A = \sum_j \lambda_j P_j \implies e^{tA} &= \sum_j e^{t\lambda_j} P_j \quad (\text{対角化可能}), \\ N^r = 0 \implies e^{tN} &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k N^k}{k!}, \\ \det(x_i^{j-1})_{i,j=1}^n &= \prod_{i < j} (x_j - x_i). \end{aligned}$$

方法：固有値を求める → 代数的・幾何学的重複度を比較 → 必要なら Jordan 鎖を作る → 多項式関数 $f(A)$ を計算する。非対角化可能な行列では単純な射影公式に頼らない。

8.2 最小ノルム・階数 1 摂動・行列の安定性

必須公式

$$\begin{aligned} A^+ b &= \text{最小二乗の最小ノルム解,} \\ (A + uv^\top)^{-1} &= A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u}, \\ \det(A + uv^\top) &= \det A (1 + v^\top A^{-1}u), \\ \dot{x} = Ax \text{ の漸近安定条件: } &\max_j \operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0. \end{aligned}$$

後二式は A 可逆、逆行列式は分母非零の場合。正規行列なら最小ノルム解は直交固有基底から導ける。非正規行列では固有値だけで過渡増幅を完全には評価できない。

8.3 直交変換・Pauli 行列・回転群

必須公式

$$\begin{aligned} R^\top R &= I, & R_{\hat{n}}(\theta) &= I + \sin \theta [\hat{n}]_\times + (1 - \cos \theta) [\hat{n}]_\times^2, \\ (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})I + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \\ [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, & \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij}I. \end{aligned}$$

$[\hat{n}]_\times \mathbf{v} = \hat{n} \times \mathbf{v}$ とする。 R が回転ならさらに $\det R = +1$ 。固有値 1 の軸と複素共役の固有値 $e^{\pm i\theta}$ を利用する。

8.4 Fourier・Laplace 変換・デルタ関数

必須公式

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, & f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(k) e^{ikx} dk, \\ \widehat{f'}(k) &= ik\hat{f}(k), & \widehat{f * g}(k) &= \hat{f}(k)\hat{g}(k), \\ \mathcal{L}\{f\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, & \mathcal{L}\{f'\} &= sF(s) - f(0), \\ \delta(ax) &= \frac{1}{|a|} \delta(x), & \int \delta(x-a) f(x) dx &= f(a). \end{aligned}$$

方法：微分方程式に初期条件があれば Laplace、全空間の並進不変作用素なら Fourier。 2π と微分符号を先頭に宣言。変換が存在する関数空間・境界条件を把握する。

8.5 複素解析と留数・積分の評価

必須公式

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= 2\pi i \sum_{z_j \text{ inside}} \text{Res}(f; z_j), \\ \text{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)}; z_0\right) &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad (\text{単純極}), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \frac{\pi}{a} \quad (a > 0). \end{aligned}$$

方法：奇点の位置 → 適切な積分路 → 閉路方向と円弧の寄与 → 留数と和。分岐関数 $\log z, z^\alpha$ には分岐切断を宣言する。積分路上の極は通常の留数定理をそのまま使わない。

8.6 偏微分方程式・Green 関数・熱核

必須公式

$$\begin{aligned}
\partial_t u &= D \partial_x^2 u, & G_H(x, t) &= \frac{e^{-x^2/(4Dt)}}{\sqrt{4\pi Dt}} \quad (t > 0), \\
\partial_t^2 u &= c^2 \partial_x^2 u, & u(x, t) &= f(x - ct) + g(x + ct), \\
\partial_t u + c \partial_x u &= 0, & u(x, t) &= u_0(x - ct), \\
(-\partial_x^2 + \kappa^2)G &= \delta, & G(x) &= \frac{e^{-\kappa|x|}}{2\kappa}, \\
\nabla^2 \frac{1}{4\pi r} &= -\delta^{(3)}(\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

方法：一次式は特性曲線、定係数二次式は Fourier または固有関数、点源は Green 関数。境界がある問題では全空間熱核を無修正で使わず、像法か固有関数展開で境界条件を満たす。

8.7 Sturm–Liouville・Hermite・Bessel

必須公式

$$\begin{aligned}
-(py')' + qy &= \lambda wy, \quad p, w > 0, \\
H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx &= 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}, \\
x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y &= 0 \quad (\text{Bessel}).
\end{aligned}$$

方法：重み付き内積と境界項の消滅 → 自己共役性 → 直交性 → 展開係数。特殊関数は微分方程式・漸近形・正規化をセットで使う。端点特異問題では定義域に注意する。

8.8 変分法・最急降下法・確率過程

必須公式

$$\begin{aligned}
\delta \int_{x_0}^{x_1} L(y, y', x) dx &= 0 \implies \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \\
\int e^{-\lambda \phi(x)} a(x) dx &\sim a(x_*) e^{-\lambda \phi(x_*)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda \phi''(x_*)}}, \\
\partial_t p &= -\partial_x [b(x)p] + D \partial_x^2 p \quad (\text{It\^o: } dX = bdt + \sqrt{2D}dW), \\
x_{n+1} &= x_n - \eta \nabla f(x_n) \quad (\text{gradient descent}).
\end{aligned}$$

Laplace 法は内部の非退化最小点 $\phi''(x_*) > 0$ が主寄与の場合。勾配降下は二次の正定値 Hessian の最

大固有値 L に対して $0 < \eta < 2/L$ が収束の目安。Fokker–Planck は確率流束 $J = bp - D\partial_x p$ の保存則 $\partial_t p + \partial_x J = 0$ から導く。

8.9 極小セット：問題の症状から手法を決める

問題文の表現	最初を選ぶ道具
遷移、吸収、共鳴、選択則	$\langle f V i\rangle$ 、時間依存摂動
井戸、障壁、デルタ、バンド	領域別解、跳び条件、Bloch・移送行列
基底状態、コヒーレント、スクイーズ	$a, a^\dagger$ 、変位・Bogoliubov 変換
粒子数、温度、磁化率	適切な統計集団、 $\log Z$ の微分
Bose 凝縮、Fermi 低温	状態密度、Bose 積分／Sommerfeld
鎖、Ising、相分離	転送行列／平均場、自由エネルギー比較
境界の電場、光の反射	Poisson／Maxwell 接線境界条件
電線路、金属の波、放射	C', L' ／skin depth／遠方 $1/r$ 場
行列の時間発展	固有分解・Jordan・Cayley–Hamilton
波・熱・移流・点源	Fourier／Laplace／特性曲線／Green 関数
直交多項式、固有値境界問題	Sturm–Liouville、重みと境界項
非線形積分、確率密度の発展	最急降下法／Fokker–Planck

9 短期演習：出題主題をつなぐ 16 の定石

この章は独自の 16 テーマ別公式集であり、既出の出題内容をそのまま再現したものではない。標準模型に対して成立する公式をまとめる。

定石例・01 二準位系と時間依存摂動

$H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z$ 、横摂動 $V(t) = \hbar\Omega f(t)\sigma_x$ 。 σ_z 固有状態を $|\pm\rangle$ とする。

必須公式

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle f|V_I(s)|i\rangle ds, \quad \langle f|V_I(t)|i\rangle = e^{i\omega_{fi}t} \langle f|V(t)|i\rangle,$$

$$\int_0^\tau e^{i\delta t} dt = \tau e^{i\delta\tau/2} \text{sinc}(\delta\tau/2).$$

解法：無摂動準位差 $\hbar\omega_0 \rightarrow$ 相互作用表示 $\rightarrow$ 積分 $\rightarrow P = |c_f^{(1)}|^2$ 。 $\text{sinc } u = \sin u/u$ 。 共鳴近傍で遷移振幅が増大したら一次近似の有効範囲を確認。

定石例・02 1 次元 Ising 転送行列

環状鎖 $s_j = \pm 1$ 、 $H = -J \sum s_j s_{j+1} - h \sum s_j$ 、 $K = \beta J, H_f = \beta h$ 。

必須公式

$$T_{ss'} = \exp\left[Kss' + \frac{H_f}{2}(s + s')\right], \quad Z_N = \text{Tr } T^N,$$

$$\lambda_{\pm} = e^K \cosh H_f \pm \sqrt{e^{2K} \sinh^2 H_f + e^{-2K}},$$

$$f = -k_B T \log \lambda_+, \quad m = \frac{\partial \log \lambda_+}{\partial H_f},$$

$$\xi^{-1} = \log \left(\frac{\lambda_+}{|\lambda_-|} \right), \quad \xi(h=0) = -\frac{1}{\log |\tanh K|}.$$

解法：結合の場を両端へ半分ずつ配分 $\rightarrow T$ の固有値 $\rightarrow N \rightarrow \infty$ では最大固有値 $\rightarrow$ 微分で磁化。 $J < 0$ の反強磁性では $\tanh K < 0$ なので、相関長に必要なのは $|\tanh K|$ であり相関符号は距離とともに交替する。 $T > 0$ に特異点がなく 1 次元短距離 Ising に有限温度相転移はない。

定石例・03 同軸伝送線路

半径 $a < b$ 、一様媒質 ϵ, μ 、完全導体、TEM・損失なし。

必須公式

$$\begin{aligned}
 C' &= \frac{2\pi\epsilon}{\log(b/a)}, & L' &= \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{b}{a}, \\
 v &= \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, & Z_0 &= \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{\log(b/a)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \\
 \partial_x V &= -L' \partial_t I, & \partial_x I &= -C' \partial_t V.
 \end{aligned}$$

解法：Gauss $\rightarrow E_r \rightarrow C'$ 、Ampère $\rightarrow H_\phi \rightarrow$ 磁場エネルギーから L' 。 C' は F/m、 L' は H/m。電力は VI 。

定石例・04 Fourier 変換と Green 関数

空間 Fourier 規約を固定： $\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx$ 、 $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(k) e^{ikx} dk$ 。

必須公式

$$\begin{aligned}
 \widehat{\partial_x f} &= ik \hat{f}, & \widehat{f * g} &= \hat{f} \hat{g}, \\
 (-\partial_x^2 + \kappa^2)G &= \delta, & \hat{G}(k) &= \frac{1}{k^2 + \kappa^2}, \\
 G(x) &= \frac{e^{-\kappa|x|}}{2\kappa} \quad (\kappa > 0), & u &= G * f.
 \end{aligned}$$

解法：作用素を Fourier 変換で乗法にする $\rightarrow$ 逆変換 $\rightarrow$ 減衰境界条件 $\rightarrow$ 畳み込み。 $G'(0^+) - G'(0^-) = -1$ に注意。

定石例・05 縮退摂動・角運動量

必須公式

$$\begin{aligned}
 [L_i, L_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k, \\
 L_\pm |\ell, m\rangle &= \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm 1)} |\ell, m\pm 1\rangle, \\
 L_x &= \frac{1}{2}(L_+ + L_-), \quad PVP\mathbf{c} = \Delta E^{(1)}\mathbf{c}.
 \end{aligned}$$

解法：縮退空間の射影 P を作る $\rightarrow PVP$ を先に対角化 $\rightarrow$ 固有値と固有状態を求める。 $\ell = 1$ では $m = -1, 0, 1$ の 3 状態。一般の非縮退公式をいきなり使わない。

定石例・06 Fermi 気体と Sommerfeld 展開

3次元自由粒子、スピン 1/2 で縮退 2、体積密度 $n = N/V$ 。

必須公式

$$\begin{aligned}\epsilon_F &= \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}, & T_F &= \epsilon_F / k_B, \\ \int_0^\infty \frac{\phi(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} d\epsilon &= \int_0^\mu \phi(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \phi'(\mu) + O(T^4), \\ \mu(T) &= \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} (T/T_F)^2 + O(T^4) \right], \\ \frac{C_V}{Nk_B} &= \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F} + O((T/T_F)^3).\end{aligned}$$

解法：粒子数固定条件から $\mu(T)$ を先に求め、その後 U を微分。Zeeman 磁化はスピン準位の化学ポテンシャル差から求め、Pauli 常磁性の $T=0$ で $\chi/V = 3n\mu_B^2/(2\epsilon_F)$ (磁気モーメント $\pm\mu_B$ の場合)。

定石例・07 磁場中の荷電粒子

必須公式

$$\begin{aligned}m\dot{\mathbf{v}} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), & \omega_c &= \frac{|q|B}{m}, \\ \mathbf{v}_{E \times B} &= \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (\mathbf{E} \perp \mathbf{B}), \\ L &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} - q\phi, \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \quad \phi' = \phi - \partial_t\Lambda, \quad L' = L + q \frac{d\Lambda}{dt}.\end{aligned}$$

解法：符号付き $\omega = qB/m$ で回転方向を判定 → 電場に直交するドリフトを分離 → ゲージ変換が全微分になることを確認。

定石例・08 複素積分と Laplace 法

必須公式

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) dz &= 2\pi i \sum_{z_j \in \text{Int} C} \text{Res}(f, z_j), \\ \text{Res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{h(z)} &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad (h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0), \\ \int_a^b e^{-\lambda\phi(x)} a(x) dx &\sim a(x_0) e^{-\lambda\phi(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\phi''(x_0)}}.\end{aligned}$$

適用条件：最後の式は x_0 が内部の非退化最小点、 $\phi''(x_0) > 0$ 、 $\lambda \rightarrow \infty$ の場合。留数積分では積分路の向き、無限遠円弧の減衰、極が積分路上にないかを先に確認。

定石例・09 1次元量子散乱

一定ポテンシャル区間では $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ 、 $k = \sqrt{2m(E - V)}/\hbar$ (障壁下では虚数)。

必須公式

ψ 連続, ψ' 連続 (有限の段差),

$$j = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \psi'),$$

$$T = \frac{k_R}{k_L} |t|^2, \quad R = |r|^2, \quad R + T = 1 \quad (\text{損失なし}).$$

解法：区間ごとに $A, B \rightarrow$ 境界条件 $\rightarrow$ 移送行列 $\rightarrow$ 振幅 $\rightarrow$ 流束。 $T = |t|^2$ とできるのは左右の漸近波数が同じとき。共鳴は反射振幅消滅・透過最大などで判定する。

定石例・10 高分子鎖の張力と揺らぎ

長さ b の独立な結合 N 本、力 f を z 方向に加え $u = \beta f b$ 。

必須公式

$$Z_1 = \int d\Omega e^{u \cos \theta} = 4\pi \frac{\sinh u}{u}, \quad Z_N = Z_1^N,$$

$$\langle X \rangle = Nb \left(\coth u - \frac{1}{u} \right),$$

$$\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial f} = \beta (\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2),$$

$$\langle X \rangle \simeq \frac{Nb^2 f}{3k_B T} \quad (u \ll 1).$$

解法： $\log Z$ を外力で微分（一次＝平均、二次＝分散）。小 u で $\coth u - 1/u \sim u/3$ 。有限伸長 $\langle X \rangle \rightarrow Nb$ に注意。

定石例・11 連成振動子・断熱不変量

必須公式

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\top M \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top K \mathbf{q},$$

$$K \mathbf{u}_j = \omega_j^2 M \mathbf{u}_j, \quad \mathbf{u}_i^\top M \mathbf{u}_j = \delta_{ij},$$

$$I_j = \frac{E_j}{\omega_j} \simeq \text{一定 (十分ゆっくり変化するとき)}.$$

解法： $M^{-1/2} K M^{-1/2}$ を対角化し正規モードを求める。断熱近似はパラメータ変化がモード間隔に比べ

遅く、強いモード混合や近接縮退がない場合に用いる。

定石例・12 特性曲線法と拡散

必須公式

$$\begin{aligned}\partial_t u + c \partial_x u &= 0 \Rightarrow u(x, t) = u_0(x - ct), \\ \partial_t u + u \partial_x u &= 0 \Rightarrow u(x, t) = u_0(\xi), \quad x = \xi + u_0(\xi)t, \\ t_* &= -\frac{1}{\min_{\xi} u'_0(\xi)} \quad (\text{最小傾きが負の場合}), \\ \partial_t u &= D \partial_x^2 u \Rightarrow \hat{u}(k, t) = e^{-Dk^2 t} \hat{u}_0(k).\end{aligned}$$

解法：一次輸送は曲線 $dx/dt = c$ に沿って u が一定。非線形輸送は曲線交差（勾配発散）で滑らかな解が破れる。拡散は Fourier で各モードが減衰。

定石例・13 2 量子ビットと量子相関

必須公式

$$\begin{aligned}\rho &= |\psi\rangle\langle\psi|, \quad \rho_A = \text{Tr}_B \rho, \\ S(\rho_A) &= -\text{Tr}(\rho_A \log \rho_A), \\ |\Phi^+\rangle &= \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \rho_A = \frac{1}{2}I, \quad S(\rho_A) = \log 2, \\ |\langle\text{CHSH}\rangle| &\leq 2 \text{ (局所隠れ変数)}, \quad \leq 2\sqrt{2} \text{ (量子論)}.\end{aligned}$$

解法：部分トレース → 固有値 → エントロピー。非純粋状態では部分系のエントロピーだけをエンタングルメント量と同一視しない。log は自然対数 (bit なら $\log_2$)。

定石例・14 平均場相転移 (Curie–Weiss)

必須公式

$$\begin{aligned}m &= \tanh[\beta(Jm + h)], \quad k_B T_c = J, \\ f(m) &= k_B T \left[\frac{1+m}{2} \log \frac{1+m}{2} + \frac{1-m}{2} \log \frac{1-m}{2} \right] - \frac{J}{2} m^2 - hm, \\ f(m) &= \text{const} + \frac{k_B T - J}{2} m^2 + \frac{k_B T}{12} m^4 - hm + O(m^6).\end{aligned}$$

解法：自己無撞着方程式 → 自由エネルギーの局所極小で安定枝を選ぶ → T_c 近傍で m を展開。磁化率は $\chi = \partial m / \partial h$ 、 $T > T_c$ かつ $h = 0$ で $\chi = 1/(k_B T - J)$ (h はスピン 1 個あたりエネルギー単位)。

定石例・15 電気双極子放射

SI 単位。遠方 $r \gg$ 波源サイズ、遅延時刻 $t_r = t - r/c$ 、双極子モーメント $\mathbf{p}(t)$ 。

必須公式

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\hat{\mathbf{n}} \times (\ddot{\mathbf{p}}(t_r) \times \hat{\mathbf{n}})}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}, \\ \mathbf{B}_{\text{rad}} &= \frac{1}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}, \\ \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{|\ddot{\mathbf{p}}(t_r)|^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3}, \\ P(t) &= \frac{|\ddot{\mathbf{p}}(t_r)|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}.\end{aligned}$$

解法：遠方放射場の $1/r$ 項だけ残す $\rightarrow \epsilon_0 c |E|^2$ の角度分布 $\rightarrow \int \sin^2 \theta d\Omega = 8\pi/3$ 。調和振動なら時間平均の $\dot{p}^2$ に $1/2$ が付く。

定石例・16 Sturm–Liouville 理論

必須公式

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y &= \lambda w(x)y, \quad p, w > 0, \\ \int_a^b w(x)y_m(x)y_n(x)dx &= 0 \quad (\lambda_m \neq \lambda_n), \\ \int_a^b y_m L y_n dx - \int_a^b (L y_m)y_n dx &= [p(y_n y'_m - y_m y'_n)]_a^b.\end{aligned}$$

解法：2 解にそれぞれ相手を掛けて引く $\rightarrow$ 部分積分 $\rightarrow$ 自己共役境界条件で端点項をゼロにする $\rightarrow \lambda_m \neq \lambda_n$ なら重み付き直交。端点が特異なら追加の定義域・境界条件が必要。

10 初見問題を解くための共通アルゴリズム

過去問を「見覚えのある問題」へ分類するだけでは不十分である。問題文の設定が変わっても、保存量・演算子・分配関数・境界条件・線形化といった**不変の構造**を取り出すことが重要である。本章以降の例題はその訓練のための**独自作問**であり、過去問原文の転載ではない。

10.1 基本の五段階

解法の順序

1. **何を求めるか**：スペクトル、振幅、期待値、熱力学量、流束、一般解のどれかを一行で書く。
2. **何が固定されるか**：正規化、粒子数、温度、化学ポテンシャル、媒質・周波数、境界条件を整理する。
3. **どこで簡単になるか**：対称性で基底を選ぶ／Fourier変換する／対数を微分する／固有モードに分解する。
4. **まず一般形で解く**：定数や固有値を未定のまま進め、最後に初期・境界条件を代入する。
5. **四つの独立検算**：次元、符号、保存則、わかっている極限を確かめる。

10.2 問題文の特徴と使う手法

見つける記述	最初の一手	決定的な検算
有限区間・デルタ障壁・界面	領域ごとの一般解＋接続条件	流束、導関数のジャンプ
生成消滅演算子・弱い相互作用	選択則 → 行列要素 → 摂動展開	パリティ、分母の符号
縮退・二準位	縮退部分空間の行列を対角化	2固有値の和・差
時間依存外力・光吸収	相互作用表示と時間積分	極限 $t \rightarrow 0$ 、共鳴条件
多数粒子・温度・密度	状態密度 $\pm Z$ または Ξ	N 固定か μ 固定か
転送行列・鎖モデル	最大固有値で $\log Z$ を計算	高温・低温極限
誘電体・導体・光	接線 E, H の境界条件	$R + T = 1$ (無損失)
荷電粒子・連成振動	線形系・正規モード・保存量	実固有振動数、極限
偏微分方程式・局所源	Fourier／特性曲線／Green関数	初期値、ジャンプ、規格化
指数行列・重複固有値	最小多項式または Jordan 標準形	$t = 0$ と時間微分

10.3 難問で部分点を残す技術

条件が複雑でも、基本方程式を正しい**単位と境界条件**で書くことには価値がある。たとえば無限和の閉形式を求められなくても、(i) 固有値条件、(ii) 積分表示、(iii) 低次の漸近項まで導出できる場合がある。計算が止まったら、未解決の積分を明示し、そこまでの物理的意味と収束条件を述べる。ただし採点基準は公式に公開されたものではなく、本書の学習上の助言である。

11 実戦例題 I：量子力学 – 表現を選ぶ技術

11.1 例題 Q1：デルタ型引力の束縛状態と散乱

質量 m の 1 次元粒子が $V(x) = -g\delta(x)$ ($g > 0$) にある。束縛状態のエネルギーと正規化波動関数、正エネルギーの透過率を求めよ。

■導出. 束縛状態 $E = -\hbar^2 \kappa^2 / (2m)$ では $x \neq 0$ の方程式は $\psi'' = \kappa^2 \psi$ 。無限遠で減衰し、 $x = 0$ で連続な解は $Ae^{-\kappa|x|}$ 。Schrödinger 方程式を原点の近傍で積分すると

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2mg}{\hbar^2} \psi(0) \implies \kappa = \frac{mg}{\hbar^2}.$$

$\int |\psi|^2 dx = |A|^2 / \kappa = 1$ から

必須公式

$$E_b = -\frac{mg^2}{2\hbar^2}, \quad \psi_b(x) = \sqrt{\kappa} e^{-\kappa|x|}, \quad \kappa = \frac{mg}{\hbar^2}.$$

散乱では $\psi_L = e^{ikx} + re^{-ikx}$ 、 $\psi_R = te^{ikx}$ 。連続性 $t = 1 + r$ とジャンプ条件 $ikt - ik(1 - r) = -2\kappa t$ を連立すると

$$t = \frac{ik}{ik + \kappa}, \quad r = -\frac{\kappa}{ik + \kappa}, \quad T = \frac{k^2}{k^2 + \kappa^2}, \quad R = \frac{\kappa^2}{k^2 + \kappa^2}.$$

検算： $R + T = 1$ 。 $g \rightarrow 0$ で $T \rightarrow 1$ 、 $g \rightarrow \infty$ で $T \rightarrow 0$ 。 転用：複数デルタ障壁では接続行列を掛け合わせる。 落とし穴：デルタ点で ψ' を連続としない。

11.2 例題 Q2：四次摂動の一次補正と選択則

$H = H_0 + \lambda x^4$ 、 $H_0 = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$ 、 $x = x_*(a + a^\dagger)$ に対する $\Delta E_n^{(1)}$ を求めよ。

■導出. $(a + a^\dagger)^2 = a^2 + (a^\dagger)^2 + 2N + 1$ 。 n 状態の期待値を取ると、粒子数を二つ変える項は消え、

$$\begin{aligned} \langle n | (a + a^\dagger)^4 | n \rangle &= \langle n | a^2 (a^\dagger)^2 + (a^\dagger)^2 a^2 + (2N + 1)^2 | n \rangle \\ &= (n + 1)(n + 2) + n(n - 1) + (2n + 1)^2 = 3(2n^2 + 2n + 1). \end{aligned}$$

必須公式

$$\Delta E_n^{(1)} = 3\lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 (2n^2 + 2n + 1).$$

転用：奇摂動 λx^3 の一次補正はパリティで 0。 検算：基底では Gaussian 四次モーメント $\langle x^4 \rangle = 3\langle x^2 \rangle^2$ 。

11.3 例題 Q3：縮退した 2 次元振動子の分裂

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \lambda xy, \quad |\lambda| < m\omega^2.$$

厳密な正常モードと、 $|1, 0\rangle, |0, 1\rangle$ からなる第一励起縮退準位の一次分裂を求めよ。

■導出. 直交変換 $u = (x + y)/\sqrt{2}$ 、 $v = (x - y)/\sqrt{2}$ によって $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$ 、 $xy = (u^2 - v^2)/2$ 。よって

$$\omega_+ = \sqrt{\omega^2 + \lambda/m}, \quad \omega_- = \sqrt{\omega^2 - \lambda/m}, \quad E_{n_+, n_-} = \hbar\omega_+(n_+ + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_-(n_- + \frac{1}{2}).$$

一方、 $\{|1, 0\rangle, |0, 1\rangle\}$ に限定すると

$$V_{\text{deg}} = \lambda x_*^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |\pm\rangle = \frac{|1, 0\rangle \pm |0, 1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \Delta E_{\pm}^{(1)} = \pm \frac{\lambda\hbar}{2m\omega}.$$

検算： $\omega_{\pm} = \omega \pm \lambda/(2m\omega) + O(\lambda^2)$ の厳密展開と一致。転用：一般の縮退はまず縮退部分空間で摂動行列を対角化する。

11.4 例題 Q4：短いパルスによる遷移

$H_0 = \hbar\omega(N + 1/2)$ の基底状態に、 $V(t) = gx \exp[-t^2/(2\tau^2)] \cos(\nu t)$ を $t = -\infty$ から $+\infty$ まで加える。一次摂動による $0 \rightarrow 1$ 遷移確率を求めよ。

■導出. 選択則より $\langle 1|x|0\rangle = x_*$ 。相互作用表示から

$$c_1^{(1)} = -\frac{igx_*}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/(2\tau^2)} \cos(\nu t) e^{i\omega t} dt.$$

Gaussian Fourier 変換 $\int e^{-t^2/(2\tau^2)} e^{i\Omega t} dt = \sqrt{2\pi}\tau e^{-\Omega^2\tau^2/2}$ を使うと

必須公式

$$P_{0 \rightarrow 1}^{(1)} = \frac{\pi g^2 x_*^2 \tau^2}{2\hbar^2} \left[e^{-(\omega-\nu)^2\tau^2/2} + e^{-(\omega+\nu)^2\tau^2/2} \right]^2.$$

条件： $P \ll 1$ となる弱い摂動。転用：任意の時間波形 $f(t)$ に対して、一次遷移振幅は $\hat{f}(-\omega_{fi})$ に比例する。検算： $g = 0$ でゼロ。長パルスでは $\nu \simeq \omega$ の周波数選択が鋭くなる。

11.5 例題 Q5：スクイーズした波束の幅の時間発展

調和振動子の初期状態に $\Delta x^2(0) = x_*^2 e^{-2r}$ 、 $\Delta p^2(0) = p_*^2 e^{2r}$ 、対称共分散 $C_{xp}(0) = 0$ を仮定する。幅 $\Delta x^2(t)$ を求めよ。

■導出. Heisenberg 方程式の解は $x(t) = x(0) \cos \omega t + p(0) \sin \omega t / (m\omega)$ 。期待値を差し引いて二乗すると

必須公式

$$\Delta x^2(t) = x_*^2 \left(e^{-2r} \cos^2 \omega t + e^{2r} \sin^2 \omega t \right).$$

転用：非零の $C_{xp}(0)$ があれば $[2C_{xp}(0)/(m\omega)] \sin \omega t \cos \omega t$ を追加する。**検算：** $r = 0$ なら幅一定、 $r > 0$ なら x と p の幅が周期的に交換される。

12 実戦例題 II：統計力学－状態を数え、対数を微分する

12.1 例題 S1：任意次元・任意分散の状態密度

d 次元体積 V 、一粒子の等方的分散 $\epsilon = Ak^s$ ($A, s > 0$) を考える。内部自由度の縮退を g とし、状態密度 $D(\epsilon)$ および理想 Bose 凝縮の条件を求めよ。

■導出. 球殻の状態数は $dN = gVS_{d-1}k^{d-1}dk/(2\pi)^d$ 。ここで $S_{d-1} = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ 。 $k = (\epsilon/A)^{1/s}$ に変数を換えて

必須公式

$$D(\epsilon) = \frac{gVS_{d-1}}{s(2\pi)^d A^{d/s}} \epsilon^{d/s-1}.$$

$\mu \rightarrow 0^-$ で励起粒子数 $N_{\text{ex}} = \int_0^\infty D(\epsilon)(e^{\beta\epsilon} - 1)^{-1} d\epsilon$ 。 $\epsilon \rightarrow 0$ の被積分関数は $\epsilon^{d/s-2}$ に比例するため、低エネルギー積分が収束する条件は $d > s$ である。転用： $d = 3, s = 2$ なら自由 Bose 気体は凝縮可能。一様 2 次元非相互作用気体 ($d = s = 2$) には熱力学極限で有限温度の通常の BEC は存在しない。注意：閉じ込めポテンシャルで状態密度は変わる。

12.2 例題 S2：3 次元自由 Bose 気体の臨界温度

3 次元自由粒子（スピン縮退 1）、体積 V 、粒子数 N 。臨界温度と $T < T_c$ の凝縮割合を求めよ。

■導出. 前節の $d = 3, s = 2, A = \hbar^2/(2m)$ を使うと

$$\frac{N_{\text{ex}}}{V} = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z), \quad \lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}, \quad g_\alpha(z) = \sum_{\ell \geq 1} \frac{z^\ell}{\ell^\alpha}.$$

凝縮点では $z \rightarrow 1$ で $g_{3/2}(1) = \zeta(3/2)$ 。 $n = N/V$ を固定して

必須公式

$$k_B T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{n}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}, \quad \frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (T < T_c).$$

検算： $[\hbar^2 n^{2/3}/m] = \text{エネルギー}$ 。転用：磁場や多成分系では分散・縮退度・最低準位を見直してから同じ計算を繰り返す。

12.3 例題 S3：異方的調和トラップの BEC

三次元調和ポテンシャル $V = \sum_i m\omega_i^2 x_i^2/2$ 、大粒子数極限で $k_B T \gg \hbar\omega_i$ とする。基底エネルギーをゼロに取り直し、 T_c を求めよ。

■導出. 半古典的な励起状態密度は

$$D(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z}, \quad N_{\text{ex}} = \frac{(k_B T)^3}{\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} g_3(z).$$

よって $z \rightarrow 1$ から

必須公式

$$T_c = \frac{\hbar \bar{\omega}}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3}, \quad \bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}, \quad \frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3.$$

内部エネルギーは $U = 3(k_B T)^4 g_4(z) / (\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z)$. $T < T_c$ では $z = 1$ なので

$$C_V = 12 k_B N \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^3.$$

転用: 同じ Bose 統計でも「一様 $T^{3/2}$ 」と「トラップ T^3 」は状態密度のべきが違う。**条件:** 有限サイズ補正・相互作用を無視した理想系。

12.4 例題 S4: 1 次元 Ising 模型の熱容量

周期境界の Ising 鎖 $H = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1}$, $\sigma_i = \pm 1$, $J > 0$, $h = 0$. 熱力学極限の 1 スピンあたり内部エネルギー・熱容量を求めよ。

■導出. 転送行列

$$T = \begin{pmatrix} e^{\beta J} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J} \end{pmatrix}, \quad \lambda_+ = 2 \cosh(\beta J), \quad \lambda_- = 2 \sinh(\beta J).$$

$Z_N = \lambda_+^N + \lambda_-^N$ で、 $N \rightarrow \infty$ なら $N^{-1} \log Z_N \rightarrow \log \lambda_+$. したがって

必須公式

$$u = -J \tanh(\beta J), \quad c_V = k_B (\beta J)^2 \operatorname{sech}^2(\beta J).$$

検算: $T \rightarrow 0$ で $u \rightarrow -J$, $T \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow 0$, いずれも $c_V \rightarrow 0$. **転用:** 外場や多状態モデルでも最大固有値 $\lambda_{\max}$ が自由エネルギーを決定する。

12.5 例題 S5: 高分子鎖の弾性と揺らぎ応答

独立な N 個のリンクが長さ a だけ $+x$ か $-x$ に向き、外力 f に対し $H = -fa \sum_i \sigma_i$. 平均伸長と分散を求めよ。

■導出. 1 リンク分配関数 $z_1 = 2 \cosh(\beta f a)$, $Z_N = z_1^N$. $X = a \sum_i \sigma_i$ であるから

必須公式

$$\langle X \rangle = Na \tanh(\beta fa), \quad \text{Var}(X) = Na^2 \text{sech}^2(\beta fa), \quad \frac{\partial \langle X \rangle}{\partial f} = \beta \text{Var}(X).$$

検算：小外力なら $\langle X \rangle \simeq Na^2 f / (k_B T)$ 、強外力なら Na へ飽和。**転用：**スピン模型の磁化・感受率も同一構造。

12.6 例題 S6：固定粒子数の低温 Fermi 比熱

滑らかな状態密度 $D(\epsilon)$ 、Fermi エネルギー ϵ_F を持つ非相互作用 Fermi 系で、 $k_B T \ll \epsilon_F$ の熱容量を求めよ。

■導出。Sommerfeld 展開より

$$N = \int_0^\mu D(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D'(\mu) + O(T^4).$$

N 一定なら $\mu = \epsilon_F - \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D'(\epsilon_F) / D(\epsilon_F) + O(T^4)$ 。同様に

$$U = \int_0^\mu \epsilon D(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{d}{d\epsilon} [\epsilon D(\epsilon)] \right|_\mu + O(T^4),$$

μ の変化を代入すると D' を含む項が消え

必須公式

$$U(T) - U(0) = \frac{\pi^2}{6} D(\epsilon_F) (k_B T)^2 + O(T^4), \quad C_V = \frac{\pi^2}{3} D(\epsilon_F) k_B^2 T + O(T^3).$$

転用：Dirac 分散や 2 次元電子系では $D(\epsilon_F)$ を最初に計算する。**注意：**バンド端や Dirac 点そのものなど $D(\epsilon_F) = 0$ または非滑らかな場合は、この標準形を機械的に使わない。

13 実戦例題 III：電磁気学・力学 – 境界と保存則を使う

本節は SI 単位、無損失等方媒質では ϵ, μ を実数とし、波の時間因子を $e^{-i\omega t}$ とする。

13.1 例題 E1：鏡像法で力とポテンシャルエネルギー

接地された無限導体平面 $z = 0$ の上方 $z = a > 0$ に点電荷 q が固定される。誘導電荷から受ける力と、無限遠を基準とした静電エネルギーを求めよ。

■導出. 上半空間のポテンシャルは、 $z = -a$ に像電荷 $-q$ を置くことで境界 $\phi|_{z=0} = 0$ を満たす。実電荷位置の像電荷による電場は $\mathbf{E}_{\text{image}} = -(q/(4\pi\epsilon_0(2a)^2))\hat{z}$ 。よって

必須公式

$$F_z = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2}, \quad U(a) = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a}.$$

重要：エネルギー $U = \frac{1}{2}q\phi_{\text{image}}(a)$ には $1/2$ が必要。導体の誘起分布が電荷移動とともに変わるため、単なる二点電荷の相互作用エネルギーにはならない。検算： $-dU/da = F_z$ 。

13.2 例題 E2：Fresnel 反射を流束から検証する

入射媒質・透過媒質の屈折率 $n_1, n_2 > 0$ 、透磁率 μ_0 、入射角 θ_1 、屈折角 θ_2 とする。TE 波の反射・透過率を求めよ。

■導出. Snell 則 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ 。電場が入射面に垂直な TE 波では接線電場と接線磁場が連続。 $Y_i = n_i \cos \theta_i / (\mu_0 c)$ を定義すると

$$1 + r = t, \quad Y_1(1 - r) = Y_2 t.$$

したがって

必須公式

$$r = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad t = \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2}, \quad R = |r|^2, \quad T = \frac{Y_2}{Y_1}|t|^2, \quad R + T = 1.$$

転用：TM 波では接線電場を振幅に採用すれば $Y_i = n_i / (\mu_0 c \cos \theta_i)$ と置き換えて同じ代数が使える。注意：全反射時は透過側が減衰場で、上記の実正数 Y_2 によるパワー透過式はそのまま適用しない。

13.3 例題 E3：誘電体球の分極と Rayleigh 散乱

真空中に半径 a 、比誘電率 ϵ_r の小球を置く。 $ka \ll 1$ で静電分極率と Rayleigh 散乱断面積を求めよ（吸収のない実 ϵ_r ）。

■導出. 軸を外部電場 $E_0 \hat{z}$ に取ると Laplace 方程式の軸対称 $\ell = 1$ 解は

$$\phi_{\text{out}} = -E_0 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \phi_{\text{in}} = -E_{\text{in}} r \cos \theta.$$

$r = a$ で ϕ 連続、 $\epsilon \partial_r \phi$ 連続を課すと

必須公式

$$\alpha = \frac{p}{E_0} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}, \quad \sigma_{\text{Rayleigh}} = \frac{k^4 |\alpha|^2}{6\pi\epsilon_0^2} = \frac{8\pi}{3} k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2.$$

検算: $\epsilon_r = 1$ で散乱なし。 $ka \ll 1$ かつ高次多極子・放射反作用を無視する近似。 **転用:** 光ピンセットの勾配力は α の実部と光強度勾配が基本になる。

13.4 例題 E4: 双極子放射の角度積分

$p(t) = p_0 \cos(\omega t) \hat{z}$ の電気双極子（波長に比べて小さい源）から放出される平均全パワーを求めよ。

■導出. 遠方放射場は $E_\theta = -\ddot{p}(t-r/c) \sin \theta / (4\pi\epsilon_0 c^2 r)$ 。 Poynting 流束は $\epsilon_0 c E_\theta^2$ 。 角度積分 $\int \sin^2 \theta d\Omega = 8\pi/3$ から瞬時パワーは $P(t) = \ddot{p}(t-r/c)^2 / (6\pi\epsilon_0 c^3)$ 。 時間平均 $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$ を取って

必須公式

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

転用: 分極 $p = \alpha E$ を代入すると散乱断面積へつながる。 **検算:** $\langle P \rangle \geq 0$ 、 $\omega \rightarrow 0$ で消える。

13.5 例題 E5: 一様直交電磁場でのドリフト

一様磁場 $B = B \hat{z}$ 、一様電場 $E = E \hat{x}$ で非相対論的電荷 $q \neq 0$ が運動する。電場による平均ドリフト速度を求めよ。

■導出. Lorentz 力 $m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 。一定速度 v_d で $\mathbf{E} + \mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = 0$ を満たすものを探す。 $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ なら

必須公式

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = -\frac{E}{B} \hat{y}, \quad \omega_c = \frac{|q|B}{m}.$$

$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_d$ を使うと $m\dot{\mathbf{v}}' = q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}$ で、ドリフトに重なった円運動となる。 **検算:** $[E/B] = \text{速度}$ 。ドリフト方向は q の符号によらない。

13.6 例題 E6：同軸線路の電磁気と波動速度

半径 a, b ($0 < a < b$) の完全導体同軸線路、誘電率 ϵ 、透磁率 μ の一様媒質を考える。長さ当たり静電容量とインダクタンス、TEM 速度を求めよ。

■導出. 単位長さ電荷 λ を内導体に置くと $E_r = \lambda/(2\pi\epsilon r)$ 。電位差 $V = \lambda \log(b/a)/(2\pi\epsilon)$ から $C' = \lambda/V$ 。電流 I に対し $B_\phi = \mu I/(2\pi r)$ 、磁気エネルギー/長さ $\int_a^b B^2/(2\mu) 2\pi r dr = L' I^2/2$ なので

必須公式

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\log(b/a)}, \quad L' = \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{b}{a}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

転用：幾何学的な C' と L' の積から媒質内の波速度が出る。注意：有限導電率・表皮効果・高次モードは別途扱う。

14 実戦例題 IV：数学－線形化・変換・特性曲線

14.1 例題 M1：冪零行列は指数級数が止まる

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \lambda I + N.$$

$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ の基本解行列を求めよ。

■導出. $N^3 = 0$ より指数級数は二次で打ち切れる。

必須公式

$$\mathbf{e}^{At} = \mathbf{e}^{\lambda t} \left(I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 \right) = \mathbf{e}^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

検算： $t = 0$ で単位行列、 $\frac{d}{dt}\mathbf{e}^{At} = A\mathbf{e}^{At}$ 。転用：一般の Jordan 鎖長 r なら $N^r = 0$ で $r - 1$ 次多項式になる。

14.2 例題 M2：減衰振動子の行列指数と臨界減衰

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ($\gamma \geq 0$) に対して $\mathbf{y} = (x, \dot{x})^\top$ 、 $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ とおく。 $\mathbf{e}^{At}$ を求めよ。

■導出.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix}, \quad B = A + \gamma I, \quad B^2 = (\gamma^2 - \omega_0^2)I.$$

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ ($\gamma < \omega_0$) では

必須公式

$$\mathbf{e}^{At} = \mathbf{e}^{-\gamma t} \left[I \cos(\Omega t) + \frac{B}{\Omega} \sin(\Omega t) \right].$$

$\gamma = \omega_0$ では $B^2 = 0$ なので $\mathbf{e}^{At} = \mathbf{e}^{-\gamma t}(I + tB)$ 。過減衰では $\kappa = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ とし $\cos \rightarrow \cosh$ 、 $\sin/\Omega \rightarrow \sinh/\kappa$ とする。転用：2×2 系の Cayley–Hamilton を利用し、対角化不能な場合にも対応する。

14.3 例題 M3：熱方程式の基本解

無限直線で $\partial_t u = D\partial_x^2 u$ 、 $D > 0$ 、 $u(x, 0) = f(x)$ 。Green 関数を求めよ。

■導出. Fourier 規約 $\hat{u}(k, t) = \int e^{-ikx} u(x, t) dx$ では $\partial_t \hat{u} = -Dk^2 \hat{u}$ 。ゆえに $\hat{u}(k, t) = e^{-Dk^2 t} \hat{f}(k)$ 。逆変換の Gaussian 積分から

必須公式

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t) f(y) dy \quad (t > 0).$$

検算： $\int G(x, t) dx = 1$ 、 $G \rightarrow \delta(x)$ (分布の意味で $t \downarrow 0$)。**転用：**移流拡散 $\partial_t u + v \partial_x u = D \partial_x^2 u$ なら $G(x-vt, t)$ 。

14.4 例題 M4：特性曲線と破綻時刻

無粘性 Burgers 方程式 $\partial_t u + u \partial_x u = 0$ 、初期条件 $u(x, 0) = u_0(x)$ 。滑らかな解が存在する範囲の陰的表示と勾配発散の時刻を求めよ。

■導出。特性曲線上で $dx/dt = u$ 、 $du/dt = 0$ 。初期ラベル ξ を用いると

$$x = \xi + tu_0(\xi), \quad u(x, t) = u_0(\xi), \quad \partial_x u = \frac{u'_0(\xi)}{1 + tu'_0(\xi)}.$$

必須公式

$$t_* = -\frac{1}{\min_{\xi} u'_0(\xi)} \quad \text{ただし } \min_{\xi} u'_0 < 0.$$

転用：線形移流では速度が一定で交差しない。非線形移流では $1 + tu'_0$ がゼロになり多価化する。**注意：** $t > t_*$ では滑らかな古典解の式をそのまま用いず、エントロピー条件などによって弱解を選択する。

14.5 例題 M5：留数計算の極配置

$a > 0$ に対し $I = \int_{-\infty}^{\infty} (x^4 + a^4)^{-1} dx$ を求めよ。

■導出。上半平面の極は $z_1 = ae^{i\pi/4}$ 、 $z_2 = ae^{3i\pi/4}$ 。単純極の留数は $1/(4z_j^3)$ 。半円上の積分は半径 $R \rightarrow \infty$ で $O(R^{-3})$ だから

$$I = 2\pi i \left(\frac{1}{4z_1^3} + \frac{1}{4z_2^3} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}a^3}.$$

必須公式

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + a^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}a^3}.$$

検算： $x = at$ で $\propto a^{-3}$ 。**転用：**極の位置、積分経路、弧積分の消失を示すことで初めて留数定理を適用できる。

14.6 例題 M6：階数 1 更新の行列式と逆行列

可逆な $n \times n$ 行列 A 、列ベクトル u, v に対して $B = A + uv^{\top}$ とおく。 $\det B$ 、 B^{-1} を求めよ。

■導出. $B = A(I + A^{-1}uv^{\top})$. 行列式補題 $\det(I + xy^{\top}) = 1 + y^{\top}x$ より

必須公式

$$\det B = \det A (1 + v^{\top} A^{-1} u), \quad B^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^{\top} A^{-1}}{1 + v^{\top} A^{-1} u}.$$

分母がゼロでない場合にのみ逆行列公式が成立する。**検算**：右辺を $A + uv^{\top}$ に掛けて I を得る。**転用**：固有値の安定性、Green 関数の局所的摂動、デルタ障壁の解法で使える。

14.7 例題 M7：Sturm–Liouville の直交性と境界条件

$p, w > 0$, $Ly = -(py')' + qy = \lambda wy$ を区間 $[a, b]$ で考える。二つの異なる固有値に対応する固有関数が直交する条件を示せ。

■導出. $y_m Ly_n - y_n Ly_m = (\lambda_n - \lambda_m) w y_m y_n$ を積分し部分積分すると

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b w y_m y_n dx = [p(y_n y'_m - y_m y'_n)]_a^b.$$

両端の境界形式がゼロ（Dirichlet、Neumann、適切な Robin 条件等）なら

必須公式

$$\lambda_n \neq \lambda_m \implies \int_a^b w(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0.$$

転用：Legendre 多項式の方程式 $-[(1-x^2)y']' = \ell(\ell+1)y$ でも直交性が導ける。特異端点では自己共役性の確認を追加する。

14.8 例題 M8：Laplace 法と退化した停留点

$\lambda \rightarrow \infty$ で $I_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2/2} dx$ と $I_4(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^4} dx$ の減衰次数を比べよ。

■導出. 前者は $y = \sqrt{\lambda}x$ で $\sqrt{2\pi}\lambda^{-1/2}$. 後者は $y = \lambda^{1/4}x$ で

必須公式

$$I_2(\lambda) = \sqrt{2\pi} \lambda^{-1/2}, \quad I_4(\lambda) = \frac{\Gamma(1/4)}{2} \lambda^{-1/4}.$$

転用：通常の非退化停留点は $\lambda^{-1/2}$ だが、二階微分がゼロなら次数が変わる。一般に $\int e^{-\lambda|x|^p} dx = 2\Gamma(1+1/p)\lambda^{-1/p}$ ($p > 0$).

15 総合演習：公式を組み合わせる新作 4 大問

この章は本書の独自作問である。過去問と無関係な変数名への置き換えではなく、基礎法則を複数段階で組み合わせる。解答を読む前に、基礎方程式を自力で書けるかを確認する。各問 25 点の配点は学習用であり、東大公式配点ではない。

15.1 総合問 A（量子・25 点）：二準位系の急激な切替

二準位系で $t < 0$ に $H_i = \hbar\Delta\sigma_z/2$ 、 $t \geq 0$ に $H_f = \hbar(\Delta\sigma_z + \Omega\sigma_x)/2$ ($\Delta > 0$, $\Omega \geq 0$) とする。初期状態は $\sigma_z = -1$ の固有状態 $|-\rangle$ 。

- (1) H_f の固有値とギャップを求めよ。(5 点)
- (2) $e^{-iH_ft/\hbar}$ を Pauli 行列だけで表せ。(6 点)
- (3) $t \geq 0$ で $|+\rangle$ を測定する確率 $P_+(t)$ を求めよ。(7 点)
- (4) $\Omega \rightarrow 0$ 、 $\Delta \rightarrow 0^+$ (Ω 固定) および $t \rightarrow 0$ を検算せよ。(7 点)

■詳解. $(\Delta\sigma_z + \Omega\sigma_x)^2 = (\Delta^2 + \Omega^2)I$ より $R = \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}$ 、固有値 $\pm\hbar R/2$ 、ギャップ $\hbar R$ 。

$$U(t) = I \cos(Rt/2) - i \frac{\Delta\sigma_z + \Omega\sigma_x}{R} \sin(Rt/2).$$

$\langle +|U(t)|-\rangle = -i(\Omega/R) \sin(Rt/2)$ なので

必須公式

$$P_+(t) = \frac{\Omega^2}{\Delta^2 + \Omega^2} \sin^2 \frac{Rt}{2}.$$

$\Omega \rightarrow 0$ で 0、 $\Delta \rightarrow 0^+$ で $\sin^2(\Omega t/2)$ 、 $t \rightarrow 0$ で $P_+ \sim \Omega^2 t^2/4$ 。採点観点：Pauli 代数、固有値、指数の展開、確率振幅と確率の区別。

15.2 総合問 B（統計・25 点）：二状態鎖の力学応答

長さ a の独立な N リンクが $\sigma_i = \pm 1$ をとり、外力 f のもとで $H = -fa \sum_i \sigma_i$ 。 $T > 0$ とする。

- (1) 分配関数 Z_N と自由エネルギー F を求めよ。(6 点)
- (2) 平均伸長と分散を求めよ。(7 点)
- (3) $\partial\langle X \rangle/\partial f = \beta \text{Var}(X)$ を示せ。(6 点)
- (4) 線形応答領域 $|fa| \ll k_B T$ での実効ばね定数を求めよ。(6 点)

■詳解. 独立リンクなので $Z_N = [2 \cosh(\beta fa)]^N$ 、 $F = -Nk_B T \log[2 \cosh(\beta fa)]$ 。外力は $-fX$ に結合するため

$$\langle X \rangle = -\partial_f F = Na \tanh(\beta fa), \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2} \partial_f^2 \log Z_N = Na^2 \text{sech}^2(\beta fa).$$

これらから揺らぎ応答関係を直接確認できる。微小 f では $\langle X \rangle \simeq Na^2 f / (k_B T)$ なので

必須公式

$$f \simeq k_{\text{eff}} \langle X \rangle, \quad k_{\text{eff}} = \frac{k_B T}{Na^2}.$$

採点観点：独立性、 $\log Z$ の微分、固定 T 、線形化の範囲。**物理解釈：**温度が高いほどエントロピー弾性によるばねは硬い。

15.3 総合問 C (電磁・25 点)：平行平板のエネルギーと力

真空中で十分大きい平行導体板の面積 A 、間隔 d 、端効果を見捨てる。二つの異なる条件を区別する。

- (1) 静電容量 $C(d)$ と、電荷 Q 一定でのエネルギー U_Q を求めよ。(6 点)
- (2) Q 一定で板間隔 d を増やす向きの力 F_d を求めよ。(6 点)
- (3) 電圧 V 一定の場合、電源仕事を考慮した力を求めよ。(7 点)
- (4) 両条件で力の向きが同じであることを示せ。(6 点)

■詳解. $C = \epsilon_0 A/d$ 、 $U_Q = Q^2/(2C) = Q^2 d/(2\epsilon_0 A)$ 。 Q 固定なので $F_d = -\partial_d U_Q = -Q^2/(2\epsilon_0 A)$ 。電圧固定では $U_{\text{field}} = CV^2/2$ のみを微分してはならない。電源を含むポテンシャル $\mathcal{F} = U_{\text{field}} - VQ = -CV^2/2$ を微分すると

必須公式

$$F_d|_Q = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}, \quad F_d|_V = -\frac{\epsilon_0 AV^2}{2d^2}.$$

同じ瞬間に $Q = CV$ で比較すると一致し、いずれも引力。**採点観点：**固定される変数の区別、電源の仕事、力の符号、次元解析。

15.4 総合問 D (数学・25 点)：熱方程式と時間依存の点源

全実直線で $\partial_t u = D\partial_x^2 u + q(t)\delta(x)$ ($D > 0$)、 $u(x, 0) = 0$ 、 q は局所可積分とする。

- (1) Fourier 変換後の常微分方程式を示せ。(6 点)
- (2) $\hat{u}(k, t)$ を求めよ。(6 点)
- (3) 時間・空間の Green 関数表示を求めよ。(7 点)
- (4) $\int u(x, t) dx$ が何を表すか、初期条件から示せ。(6 点)

■詳解. 変換規約 $\hat{u} = \int e^{-ikx} u dx$ で $\delta(x) \mapsto 1$ だから $\partial_t \hat{u} = -Dk^2 \hat{u} + q(t)$ 。積分因子 $e^{Dk^2 t}$ を使うと

$$\hat{u}(k, t) = \int_0^t e^{-Dk^2(t-s)} q(s) ds.$$

逆 Fourier 変換を取れば

必須公式

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{q(s)}{\sqrt{4\pi D(t-s)}} \exp\left[-\frac{x^2}{4D(t-s)}\right] \mathrm{d}s.$$

全空間で積分し Gaussian の規格化を用いると $\int u(x, t) \mathrm{d}x = \int_0^t q(s) \mathrm{d}s$ 。採点観点：変換の 2π 、初期条件、畳み込み、質量保存と源の寄与。注意：一般の符号付き q なら u は確率密度とは限らない。

16 応用問題で必要となる共通の検算法

16.1 記号計算や数値計算に頼る前に

次元解析：式の各項の次元は一致しなければならない。 $\hbar\omega$ と $mg^2/\hbar^2$ はエネルギー、 $\epsilon_0 AV^2/d^2$ は力、 Dt は面積。**極限：**結合定数がゼロ、温度が無限大、界面が消える、パルス幅が短い、縮退ギャップが開くといった極限で既知の結果へ戻る。**保存則：**正規化 $\sum P_n = 1$ 、流束 $R + T = 1$ 、熱核 $\int G = 1$ 、Hamilton 系でのエネルギー保存をチェックする。**独立解：**同じ結果を二つの表現から得る。例：摂動論と厳密平方完成、縮退摂動と正常モード、正準分配関数と転送行列、静電エネルギーと仮想仕事。

16.2 自習に使う 7 日間の手順

- 1 日目：各分野の基本方程式を白紙に書き、規約を固定する。
- 2 日目：量子の境界条件・対称性・摂動・時間発展を例題なしで再導出する。
- 3 日目：統計の状態密度・分配関数・ N 固定微分を再導出する。
- 4 日目：電磁気学・力学の境界条件と保存流束・エネルギーを再導出する。
- 5 日目：数学の行列指数・Fourier・複素積分・特性曲線を再導出する。
- 6 日目：総合問 A-D を時間制限のもと、解答を見ずに解く。
- 7 日目：誤答を「公式を忘れた／条件違い／計算／時間不足」に分類し、原理へ戻る。

16.3 全 25 年度を使った学習の位置づけ

本書には公式と演習が揃っているが、これだけで 2027 年度の得点が 80 点になるとは保証できない。得点推定は初見演習の実測ではなく仮説である。学習の成果は、未見の問題を時間制限付きで解き、導出の部分点を含めて採点することで測定する。

注意

照合範囲の限界：量子・統計・数学は 2001–2026 年度の 25 年度（2021 年度を除く）の年度別索引を確認。電磁気・力学は 2014–2026 年度 12 件の索引に加え、2001–2013 年度は公式原題の代表設問を参照した。100 個は分野別学習枠であり、実際の公式問題数や、全小問の詳細照合の完了を示すものではない。

17 理解をつなぐ講義ノート：公式の前に考えること

この章の目的. 前章までの公式を「どこから来た式か」「どの仮定が必要か」「問題文からどう選ぶか」の順に説明し直す。式を眺めるだけでなく、各節末の一行問題を白紙から再現することを勧める。本章の例は過去問の再掲ではなく、共通する原理を説明する**独立した例題**である。

17.1 数式の前に、対象・条件・求める量を三列に分ける

たとえば「あるポテンシャルの束縛状態のエネルギーを求めよ」とあれば、まだ Schrödinger 方程式を解き始めない。対象は一粒子か多粒子か、ポテンシャルが区分的に一定か、無限遠での条件は何か、求める量が固有値か散乱係数かを分ける。**境界条件が与えられるより前に固有値が決まることはない**。統計力学では粒子数固定か化学ポテンシャル固定かが微分を変え、電磁気学では波の振幅定義が Fresnel 係数の符号を変え、数学では Fourier 変換の規約が係数 2π を変える。

最初の 30 秒で書く 4 項目

- (1) 未知量： E, ψ / T_c, C_V / $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ / $f(x, t)$ のどれか。
- (2) 支配式：固有値方程式、分配関数、Maxwell、微分方程式。
- (3) 補助条件：正規化、境界条件、保存量、固定する熱力学変数。
- (4) 検算：次元、極限、符号、確率・流束の保存。

演習方法：第 1 周はこの 4 項目だけを解答用紙に書き、次に数式計算を始める。行き詰まる原因が「知識不足」なのか「適用条件の見落とし」なのかを区別できる。

18 理解補強 I：量子力学

18.1 固有値問題とは境界条件込みの問題である

定常状態 $\Psi(x, t) = \psi(x) \exp(-iEt/\hbar)$ を時間依存 Schrödinger 方程式へ代入すると

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

を得る。式だけでは E は決まらない。**許される関数の集合**（例えば無限遠で減衰、壁でゼロ、周期境界）が固有値を選ぶ。具体例として $V(x) = -g\delta(x)$ 、 $g > 0$ の束縛状態を順を追って求める。

手順 1：束縛状態なら $E < 0$ 。 $x \neq 0$ では $V = 0$ なので $\psi'' = \kappa^2 \psi$ 、 $\kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar > 0$ 。無限遠で発散する指数関数を捨てて

$$\psi(x) = \begin{cases} A \exp(\kappa x), & x < 0, \\ B \exp(-\kappa x), & x > 0. \end{cases}$$

手順 2：有限の δ 相互作用では波動関数は連続だから $A = B = C$ 。式(1)を $[-\eta, \eta]$ で積分する：

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \{\psi'(\eta) - \psi'(-\eta)\} - g\psi(0) = E \int_{-\eta}^{\eta} \psi \, dx.$$

$\eta \rightarrow 0$ で右辺はゼロ。ゆえに導関数の跳びは

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2mg}{\hbar^2} \psi(0). \quad (2)$$

左辺は $-2\kappa C$ 。したがって $\kappa = mg/\hbar^2$ で

束縛状態の答えと、そのチェック

$$E = -\frac{mg^2}{2\hbar^2}, \quad \psi(x) = \sqrt{\kappa} e^{-\kappa|x|}, \quad \kappa = \frac{mg}{\hbar^2}.$$

$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = \kappa/\kappa = 1$ 。 $g \rightarrow 0^+$ で $E \rightarrow 0^-$ となる。

なぜよく間違えるのか. δ ポテンシャルでも ψ' を連続とすると $\kappa = 0$ しか得られず、束縛状態を失う。変数が不連続か、その導関数が不連続かは支配式を積分して決める。これは点電荷での電場、Green 関数の源でも同じ考え方である。

18.2 散乱の振幅と確率を混同しない

定常散乱では左から入射する $\psi_L = e^{ik_L x} + r e^{-ik_L x}$ 、右で $\psi_R = t e^{ik_R x}$ と置く。 r, t は波動関数の振幅である。確率流

$$j = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \psi' - \psi \psi'^*)$$

に平面波を代入すると $j_{\text{in}} = \hbar k_L/m$ 、 $j_{\text{ref}} = -(\hbar k_L/m)|r|^2$ 、 $j_{\text{tr}} = (\hbar k_R/m)|t|^2$ 。

散乱で保存するのは波の大きさではなく流れ

$$R = |r|^2, \quad T = \frac{k_R}{k_L} |t|^2, \quad R + T = 1$$

(左右で同一質量、ポテンシャルは実数、開いた伝播チャネルを仮定)。

これは後で学ぶ Fresnel 透過率 $T = (Y_2/Y_1)|t|^2$ と同じ構造である。一般化の要点：流れる量の密度に速度が掛かるため、振幅比の二乗と流速比は異なる。

18.3 生成消滅演算子は微分計算を選択則に変える

調和振動子 $H_0 = p^2/(2m) + m\omega^2 x^2/2$ では $[x, p] = i\hbar$ を使い

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad [a, a^\dagger] = 1, \quad x = x_*(a + a^\dagger), \quad x_* = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}.$$

例：摂動 $V = \lambda x^4$ の一次エネルギー補正を波動関数の積分なしで求める。まず $\Delta E_n^{(1)} = \lambda \langle n | x^4 | n \rangle$ 。 $x^2 |n\rangle = x_*^2 \{ \sqrt{n(n-1)} |n-2\rangle + (2n+1) |n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)} |n+2\rangle \}$ である。これをもう一度作用させると $|n\rangle$ の係数だけが期待値に残る：

$$\begin{aligned} \langle n | x^4 | n \rangle &= x_*^4 \{ n(n-1) + (2n+1)^2 + (n+1)(n+2) \} \\ &= 3x_*^4 (2n^2 + 2n + 1). \end{aligned}$$

四次摂動の一次補正

$$\Delta E_n^{(1)} = 3\lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 (2n^2 + 2n + 1).$$

検算： $n = 0$ では Gaussian 分布の四次モーメント $\langle x^4 \rangle = 3\langle x^2 \rangle^2$ と一致。**よくある誤り：** $\langle x^4 \rangle = \langle x^2 \rangle^2$ とすること。量子状態の分散を無視している。

18.4 摂動論の分母は「どの準位から混ざるか」を表す

$H = H_0 + \lambda W$ 、 $H_0|n\rangle = E_n^{(0)}|n\rangle$ とする。 $|\psi_n\rangle = |n\rangle + \lambda|n^{(1)}\rangle + \dots$ 、 $E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \dots$ を固有値方程式へ代入し、 λ の一次を比べると

$$(H_0 - E_n^{(0)})|n^{(1)}\rangle = (E_n^{(1)} - W)|n\rangle.$$

$\langle n|$ を掛ければ $E_n^{(1)} = \langle n|W|n\rangle$ 、 $\langle k|$ ($k \neq n$) なら

$$\langle k|n^{(1)}\rangle = \frac{\langle k|W|n\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}.$$

ここが判断点：分母が小さい準位を普通の非縮退摂動で扱おうと発散する。**縮退部分空間の中で W を先に対角化し、それを新しいゼロ次基底にする。** W の非対角成分がゼロになる対称性を先に探すと、計算量も減る。

二段階の選択

初めに $\langle n|W|n\rangle$ と選択則を調べる。次に準位間隔 $|E_n - E_k|$ と結合 $|\lambda W_{kn}|$ を比較し、十分小さければ通常の摂動、同程度なら縮退・近縮退の部分行列を直接対角化する。

18.5 時間依存摂動は Fourier 成分を選ぶ

初期状態を $|i\rangle$ とし、 $V(t) = \lambda f(t)A$ を加える。相互作用表示で一次の遷移振幅は

$$c_f^{(1)}(\infty) = -\frac{i\lambda}{\hbar} \langle f|A|i\rangle \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega_{fi}t} dt, \quad \omega_{fi} = \frac{E_f - E_i}{\hbar}.$$

したがって外力の**遷移周波数における Fourier 成分**が遷移確率を決める。例として Gaussian パルス $f(t) = \exp(-t^2/(2\tau^2))$ なら平方完成により

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/(2\tau^2)} e^{i\omega t} dt = \sqrt{2\pi}\tau e^{-\omega^2\tau^2/2}.$$

物理的意味：短いパルスほど周波数幅が広く、多くの準位を励起しやすい。長いパルスは鋭い周波数選択を持つ。二次遷移では一次が選択則で禁止されていても、中間状態を経由する振幅が残る場合がある。

18.6 二準位系は「ベクトルの回転」とみなせる

$H = (\hbar/2)(\Delta\sigma_z + \Omega\sigma_x)$ 、 $\Lambda = \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}$ と書く。 $B = (\Delta\sigma_z + \Omega\sigma_x)/\Lambda$ は Pauli 行列の反交換関係により $B^2 = I$ 。指数の偶数・奇数項を分けると

$$e^{-iHt/\hbar} = I \cos \frac{\Lambda t}{2} - iB \sin \frac{\Lambda t}{2}.$$

σ_z の下向き固有状態から上向きへの確率は

$$P_{- \rightarrow +}(t) = \frac{\Omega^2}{\Delta^2 + \Omega^2} \sin^2 \frac{\Lambda t}{2}.$$

共鳴 $\Delta = 0$ なら振幅 1 で振動し、 $|\Delta| \gg |\Omega|$ なら遷移は抑制される。**前提**：時間に依らない有効 Hamiltonian。時間依存の $\Delta(t), \Omega(t)$ には一般に時間順序積が必要である。

19 理解補強 II：統計力学

19.1 なぜ $\log Z$ を微分すると平均エネルギーが出るのか

正準集団では $Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$ 、 $p_n = e^{-\beta E_n}/Z$ 。直接微分すれば

$$\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} = \frac{1}{Z} \sum_n (-E_n) e^{-\beta E_n} = -\langle E \rangle.$$

もう一度微分すると $\partial_\beta^2 \log Z = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ 。さらに $d\beta/dT = -1/(k_B T^2)$ だから

平均とゆらぎが同じ分配関数から得られる

$$U = -\partial_\beta \log Z, \quad C_V = \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{k_B T^2} \quad (N, V \text{ 一定}).$$

なぜ対数か：独立系なら $Z = Z_1 Z_2$ で、 $\log Z = \log Z_1 + \log Z_2$ 。広延量が足し算になる。**外力があるとき**： $H = H_0 - fX$ なら $\partial_{(\beta f)} \log Z = \langle X \rangle$ 。古典系または $[H_0, X] = 0$ の量子系では、その二階微分が X の分散を与える。非可換系の二階微分には虚時間相関が現れるので、単純に分散と同一視しない。

19.2 状態密度を覚えるより、球の体積を数える

周期境界条件のもとで d 次元の一边 L の箱を考える。波数空間の格子間隔は $2\pi/L$ 。状態数は波数空間の体積を $(2\pi)^d/V$ で割ったものに等しい。内的縮退度 g 、分散 $\epsilon = A|\mathbf{k}|^s$ なら

$$N(\epsilon) = \frac{gV}{(2\pi)^d} \frac{S_{d-1}}{d} \left(\frac{\epsilon}{A} \right)^{d/s}, \quad S_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

ϵ で微分して

次元と分散を入れ替えられる一般公式

$$D(\epsilon) = \frac{gV S_{d-1}}{s(2\pi)^d A^{d/s}} \epsilon^{d/s-1}.$$

発想：新しい粒子や電子バンドが出て、分散 $\epsilon(k)$ が分かれば状態の数え上げに戻る。 $d=3, s=2$ で $D \propto \sqrt{\epsilon}$ 、 $d=2, s=2$ で一定、 $d=2, s=1$ で $D \propto \epsilon$ 。これだけで低温比熱の温度依存性を判断しやすくなる。

19.3 Bose 凝縮は「励起状態の収容限界」で理解する

Bose 分布 $\bar{n}(\epsilon) = [z^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1]^{-1}$ で化学ポテンシャルは最低一粒子エネルギー以下である。基底エネルギーを 0 とし、 $z \leq 1$ 。全粒子数は

$$N = N_0 + \int_{0+}^{\infty} D(\epsilon) \bar{n}(\epsilon) d\epsilon.$$

$\epsilon \rightarrow 0, z \rightarrow 1$ では $\bar{n}(\epsilon) \simeq k_B T / \epsilon$ 。 $D \propto \epsilon^{d/s-1}$ なら積分は $\int_0 \epsilon^{d/s-2} d\epsilon$ となる。熱力学極限でこの積分が有限となる必要十分条件は $d > s$ (通常の理想・一様系)。

3次元自由気体： $d/s = 3/2$ なので励起状態の最大粒子数は $N_{\text{ex}}^{\text{max}} = V \lambda_T^{-3} \zeta(3/2)$ 。温度を下げると $N_{\text{ex}}^{\text{max}} \propto T^{3/2}$ が減るが、実際の粒子数 N は固定なので差分 $N_0 = N - N_{\text{ex}}$ が基底へ移る。この説明により T_c の公式は必然になる。

凝縮の判定での注意

調和トラップなど非一様系では一粒子状態密度そのものが変わる。有限サイズでは基底準位を分離し、熱力学極限の取り方を明示する。相互作用系の凝縮条件を一様理想気体の $d > s$ で一般化しない。

19.4 比熱の落とし穴：固定粒子数なら化学ポテンシャルも変わる

$T > T_c$ で一様自由 Bose 気体について

$$N = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z), \quad U = \frac{3V k_B T}{2\lambda_T^3} g_{5/2}(z).$$

$V/\lambda_T^3 \propto T^{3/2}$ であり、 N を固定して温度を変えると $z = z(T)$ は変わる。 N の式を対数微分すると

$$0 = \frac{3}{2T} + \frac{1}{g_{3/2}(z)} \frac{g_{1/2}(z)}{z} \frac{dz}{dT}, \quad \frac{dz}{dT} = -\frac{3z}{2T} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}.$$

これを U の微分に代入して

$$\frac{C_V}{N k_B} = \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}.$$

説明できるべきこと：最後の負号の項は、 z を固定したまま微分すると丸ごと失われる。試験問題に「一定に保つ量」が書かれていたら必ず偏微分記号の添字に反映する。

19.5 Fermi 気体は Fermi 面の近くしか温度で励起されない

$T = 0$ では Fermi 分布は $\epsilon < \epsilon_F$ で 1、上では 0。低温では幅 $O(k_B T)$ の領域だけが変わる。Sommerfeld 展開を滑らかな $\phi(\epsilon)$ に適用すると

$$\int_0^{\infty} \frac{\phi(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} d\epsilon = \int_0^{\mu} \phi(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \phi'(\mu) + O(T^4),$$

($\mu > 0$ で ϕ が Fermi エネルギー近傍で滑らか)。粒子数の式から $\mu(T)$ を求めたうえで、エネルギーを微分すると、一般の滑らかな状態密度 D について

低温比熱の最も再利用できる形

$$C_V = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T D(\epsilon_F) + O(T^3)$$

(固定粒子数、通常のフェルミ液体でなく非相互作用、 D は全系・全縮退を含む)。

直感：励起できる電子の数は $D(\epsilon_F)k_B T$ 、1 個当たりのエネルギー変化は $k_B T$ なので $U - U_0 \propto T^2$ 、したがって $C_V \propto T$ 。分散が Dirac 型であってもまず状態密度を再計算する。

19.6 転送行列では「最大固有値」が熱力学を決める

1 次元 Ising 鎖 $H = -J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} - h \sum_i \sigma_i$ 。各結合に外場を半分ずつ分配して

$$T_{\sigma, \sigma'} = \exp \left[\beta J \sigma \sigma' + \frac{\beta h}{2} (\sigma + \sigma') \right], \quad \sigma, \sigma' = \pm 1.$$

周期境界では $Z_N = \text{Tr}(T^N) = \lambda_+^N + \lambda_-^N$ 。最大固有値 $\lambda_+ > 0$ が支配的なので

$$f = -k_B T \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_N = -k_B T \log \lambda_+.$$

外場 0 で $\lambda_+ = 2 \cosh(\beta J)$ 、 $\lambda_- = 2 \sinh(\beta J)$ ($J > 0$)。これを微分すれば $u = -J \tanh \beta J$ 。この解法の本質は、**指数的に多い配位の和を小さい行列の固有値問題に変えることにある。**

転送行列を作るときの順序

1. エネルギーを隣接サイトごとの和へ分ける。2. Boltzmann 因子から行列要素 $T_{\sigma\sigma'}$ を作る。3. 境界条件に応じて $\text{Tr}(T^N)$ 等にする。4. 最大固有値から自由エネルギーを得る。5. h, T で微分して磁化率・熱容量を得る。

20 理解補強 III：電磁気学と古典力学

20.1 Maxwell 方程式の境界条件は小さい箱と輪から導く

SI 単位系で

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \partial_t \mathbf{D}.$$

境界をまたぐ薄い円柱(高さ $\rightarrow 0$)に発散方程式を積分すると、面に垂直な成分について $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f$ 、 $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$ 。小さな長方形のループに回転方程式を積分すると、有限の場で面積 $\rightarrow 0$ なら $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$ 、 $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_f$ 。

面電荷・面電流がない誘電体界面

$$E_{\parallel,1} = E_{\parallel,2}, \quad H_{\parallel,1} = H_{\parallel,2}, \quad D_{\perp,1} = D_{\perp,2}, \quad B_{\perp,1} = B_{\perp,2}.$$

使い方：反射・屈折で接線 E, H を使い、静電誘電体境界では接線 E と法線 D を使う。**誤答の原因：**境界で常に $E_{\perp}$ が連続とすること。一般には $D_{\perp} = \epsilon E_{\perp}$ が連続する。

20.2 Fresnel 係数は 2 本の一次方程式を解くだけ

界面を $z = 0$ とし、媒体 1 から 2 へ平面波が入射する。時間依存は $e^{-i\omega t}$ 、接線電場を入射・反射・透過の振幅 E_i, E_r, E_t と定義する。媒質は損失のない等方・非磁性とは限らないが、まず実数で正の TE 波アドミタンス $Y_j = k_{zj}/(\omega\mu_j)$ を使う。

$$E_i + E_r = E_t, \quad Y_1(E_i - E_r) = Y_2 E_t.$$

第 2 式で反射波にマイナスが付く理由は、**伝播方向が反転すると磁場の接線成分の符号が変わる**からである。これを解くと

TE 振幅係数とエネルギー係数

$$r = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad t = \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2}, \quad R = |r|^2, \quad T = \frac{Y_2}{Y_1}|t|^2, \quad R + T = 1.$$

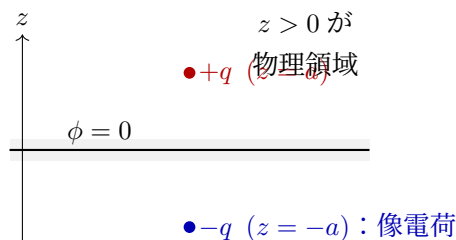
TM も接線電場を振幅として取れば $Y_j = \omega\epsilon_j/k_{zj}$ に替えて同じ式が使える。ただし TM を電場の全ベクトル振幅で定義した教科書では r の符号規約が異なることがある。**全反射：**透過側 k_{z2} が純虚数になると、透過側に減衰場は存在しても法線方向の時間平均エネルギー流束はゼロ。損失がないとき $R = 1$ であり、振幅 t がゼロという意味ではない。

20.3 鏡像法で境界を満たしても、像電荷は実物ではない

接地された無限導体平面 $z = 0$ の上 $z = a > 0$ に点電荷 q を置く。上半空間だけで電位を求めたい。自由空間に鏡像電荷 $-q$ を $z = -a$ へ仮想的に置けば

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+a)^2}} \right), \quad z > 0,$$

で $\phi(\rho, 0) = 0$ を満たす。解の一意性からこれが実際の上半空間の解である。



力：実電荷が受ける力は像との Coulomb 力そのものなので $F_z = -q^2/(16\pi\epsilon_0 a^2)$ 。**エネルギー：**導体に誘起した電荷を形成する仕事を考慮すると $U = -q^2/(16\pi\epsilon_0 a)$ ($a \rightarrow \infty$ で 0)。像電荷との**仮想二体相互作用エネルギー**をそのまま採用すると 2 倍になる。 $F_z = -dU/da$ で確かめる。

20.4 荷電粒子の問題では力学と幾何を分ける

静的な一様磁場 $\mathbf{B} = B\hat{z}$ 中で、電場がない荷電粒子の運動方程式は $m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。内積 $\mathbf{v} \cdot$ を取ると $d(mv^2/2)/dt = 0$ 。磁場は仕事をしない。

$$\dot{v}_x = \omega_c v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega_c v_x, \quad \omega_c = qB/m.$$

従って速さ一定で回転し、半径は $R = mv_\perp/(|q|B)$ 。電場 $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ を付け、一定の特解 $\mathbf{v}_d$ を探すと

$$q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) = 0 \implies \mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

直感：軌道はこのドリフトをする中心の周りの円運動である。**注意：**磁場の向きと粒子の電荷符号は回転の向きを変えるが、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトは電荷符号に依存しない（一定場、非相対論的）。

20.5 連成振動子は「連立 ODE」ではなく「行列の固有値問題」

同じ質量 m の二粒子がそれぞれ壁にばね定数 k_0 で繋がれ、その間をばね定数 κ で結ぶ。平衡位置からの変位 x_1, x_2 について

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_0 + \kappa & -\kappa \\ -\kappa & k_0 + \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$x_j = A_j e^{i\omega t}$ を代入すると $\det(K - m\omega^2 I) = 0$ 。同相 $(1, 1)$ と逆相 $(1, -1)$ が固有ベクトルで

結合で変わるのは逆相の振動数

$$\omega_+^2 = \frac{k_0}{m} \quad ((1, 1)), \quad \omega_-^2 = \frac{k_0 + 2\kappa}{m} \quad ((1, -1)).$$

理由：同相運動では結合ばねが伸び縮みせず、力を及ぼさない。逆相では2つの変位差が作用する。これは結合した波、量子二準位系、行列の対角化と同じ構造である。

21 理解補強 IV：数学

21.1 行列指数は「微分方程式を一度に解く装置」

$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ 、 $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ なら $\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}_0$ 。指数関数を級数で定義すると

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}, \quad e^{A0} = I.$$

2次元の減衰振動子 $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ について $\mathbf{y} = (x, \dot{x})^T$ 、 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix}$ 。 $B = A + \gamma I$ と置くと直接掛け算で $B^2 = (\gamma^2 - \omega_0^2)I$ 。ゆえに $\Delta^2 = \gamma^2 - \omega_0^2$ とし

対角化せずに得られる行列指数

$$e^{At} = e^{-\gamma t} \left(I \cosh(\Delta t) + B \frac{\sinh(\Delta t)}{\Delta} \right).$$

$\Delta = 0$ では連続極限 $e^{At} = e^{-\gamma t}(I + Bt)$ 、 $\Delta = i\omega_d$ では $\cosh \rightarrow \cos$ 、 $\sinh(\Delta t)/\Delta \rightarrow \sin(\omega_d t)/\omega_d$ 。

Jordan 型の意味：固有値が等しい臨界減衰では、一般に単純な固有ベクトル展開は壊れる。しかし**最小多項式**が $B^2 = 0$ を与えるので指数級数がそこで止まる。

21.2 Fourier 変換は微分を掛け算へ変える

本書の規約は $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$ 、逆変換 $f(x) = (2\pi)^{-1} \int \hat{f}(k)e^{ikx}dk$ 。無限遠で十分速く減衰する f の部分積分により

$$\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k), \quad \widehat{f''}(k) = -k^2\hat{f}(k).$$

例：熱方程式 $\partial_t u = D\partial_x^2 u$ 、初期値 $u(x, 0) = u_0(x)$ 。 x を Fourier 変換すると $\partial_t \hat{u} = -Dk^2 \hat{u}$ という k ごとに**独立の ODE** になり、 $\hat{u}(k, t) = e^{-Dk^2 t} \hat{u}_0(k)$ 。

熱核と畳み込み

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t) u_0(y) dy \quad (t > 0).$$

$\int G dx = 1$ (総量保存)、 $G(x, t) \rightarrow \delta(x)$ ($t \downarrow 0$ の分布極限)。**誤答の典型：**逆変換の $1/(2\pi)$ を忘れること、 $t = 0$ で通常関数として G が有限だと思うこと。

21.3 Green 関数は「点源に対する応答」

$L = -d^2/dx^2 + a^2$ 、 $a > 0$ の全直線問題で $LG(x) = \delta(x)$ を解く。 $x \neq 0$ では $LG = 0$ なので減衰する形 $G = Ce^{-a|x|}$ 。 $[-\eta, \eta]$ で方程式を積分して $-\{G'(0^+) - G'(0^-)\} = 1$ 、すなわち $2aC = 1$ 。

点源から一般の源へ

$$G(x) = \frac{e^{-a|x|}}{2a}, \quad (-\partial_x^2 + a^2)u = f \implies u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y)f(y)dy.$$

これは量子力学の δ ポテンシャルでの接続条件と同じ「**積分によるジャンプ条件**」である。**重要：**有限区間では境界条件に合う Green 関数へ作り直す必要がある。全直線の G をそのまま使わない。

21.4 複素積分は極の位置で答えが決まる

$\int_{-\infty}^{\infty} dx/(x^2 + a^2)$ 、 $a > 0$ を考える。 $f(z) = 1/(z^2 + a^2)$ の上半平面の極は $z = ia$ のみで、留数は

$$\text{Res}_{z=ia} f(z) = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{z - ia}{(z - ia)(z + ia)} = \frac{1}{2ia}.$$

上半円弧の積分は半径 $R \rightarrow \infty$ で $O(1/R)$ ゆえゼロ。留数定理から

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = 2\pi i \frac{1}{2ia} = \frac{\pi}{a}.$$

判断手順：極をすべて列挙 $\rightarrow$ どの半平面で積分路を閉じるか確認 $\rightarrow$ 円弧の寄与を評価 $\rightarrow$ 極の位数に合う留数公式を使う。 e^{ikx} を伴うときは $k > 0$ なら上半平面、 $k < 0$ なら下半平面で閉じるのが基本である(他に増大する因子がない場合)。

21.5 特性曲線法では時間と空間を同時に動かす

一次の輸送方程式 $\partial_t u + c \partial_x u = 0$ なら、 $x(t) = \xi + ct$ に沿う微分は

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = u_t + \dot{x} u_x = u_t + c u_x = 0.$$

したがって $u(x, t) = u_0(x - ct)$ 。非線形方程式 $u_t + u u_x = 0$ では u 自身が特性の速度であり、初期点 ξ から

$$x = \xi + t u_0(\xi), \quad u(x, t) = u_0(\xi).$$

微分 $\partial x / \partial \xi = 1 + t u'_0(\xi)$ がゼロになると、特性が交差して滑らかな解が保てなくなる。初期傾斜の最小値が負なら最初の勾配発散時刻は

Burgers 方程式の滑らかさの限界

$$t_* = -\frac{1}{\min_{\xi} u'_0(\xi)} \quad \left(\min_{\xi} u'_0(\xi) < 0 \right).$$

なぜ重要か：見かけは PDE でも、移動する座標の上で ODE にできる。ただし交差後には弱解とエントロピー条件の議論が必要で、特性曲線の式を多価関数として使ってはいけない。

21.6 Sturm–Liouville の直交性は部分積分から出る

$Ly = -(py')' + qy = \lambda wy$ 、 $p, w > 0$ 、実係数、区間 $[a, b]$ 。固有関数 y_m, y_n に対し、片方にもう片方を掛けて引き算し積分する。自己共役な境界条件により端点項

$$[p(y'_m y_n - y_m y'_n)]_a^b = 0$$

が消える。残りは $(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b w y_m y_n dx = 0$ だから

$$\lambda_m \neq \lambda_n \implies \int_a^b w(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0.$$

理解のポイント：単に直交多項式の公式を覚えるのではなく、**内積に重み w がある理由、境界条件が必要な理由**を説明できることが大切である。

22 ゆっくり解く 4 つの総合例題：知識が答案に変わるまで

前節までは公式の意味を解説した。ここでは、教科書から試験答案へ移るときの考え方を一問の最初から最後まで追う。各例は問題文も解答も新作である。まず問題だけを読み、適用原理を選べるか試してから先へ進んでほしい。

22.1 詳解例題 A：調和振動子に突然一定の外力を加える

問題. 質量 m 、角振動数 ω の一粒子が $t < 0$ では $H_0 = p^2/(2m) + m\omega^2 x^2/2$ の基底状態 $|0\rangle$ にある。 $t = 0$ 以後は $H = H_0 - Fx$ (F 一定) とする。以下を求めよ：(a) 新しい固有エネルギー、(b) 基底状態の二次摂動補正、(c) $\langle x(t) \rangle$ 、(d) 初期真空へ戻る確率。

■読み取り。「突然」は切替直後の状態は旧基底状態のままという意味である。一方、以後の演算子の時間発展には新しい Hamiltonian を使う。「一定外力」という形が見えたら、最初に平方完成できないかを考える。摂動論での結果を厳密解で検算できる、というのがこの問題の構造である。

■(a) 平方完成. $x_c = F/(m\omega^2)$ と置くと

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x - x_c)^2 - \frac{F^2}{2m\omega^2}.$$

平行移動した振動子の準位間隔は同じ $\hbar\omega$ である。よって

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{F^2}{2m\omega^2}.$$

説明すべき点： x の原点を変えても、運動エネルギー $p^2/(2m)$ は変わらない。定数項だけが全準位を同じだけ下げる。

■(b) 摂動論から同じ答えを再現. $V = -Fx$ 、 $x = x_*(a + a^\dagger)$ とする。パリティから $\langle 0|x|0\rangle = 0$ 。 $x|0\rangle = x_*|1\rangle$ なので、第二次摂動では $n = 1$ しか寄与しない：

$$\Delta E_0^{(2)} = \frac{|\langle 1|-Fx|0\rangle|^2}{E_0^{(0)} - E_1^{(0)}} = \frac{F^2 x_*^2}{-\hbar\omega} = -\frac{F^2}{2m\omega^2}.$$

これが (a) の厳密解と一致する。**典型的な誤り：**分母を $E_1 - E_0$ と取り正の補正にしてしまうこと。基底状態の二次摂動は非縮退・安定な設定では通常負になることも検算材料になる。

■(c) 時間発展. Heisenberg の運動方程式から

$$\dot{x} = p/m, \quad \dot{p} = -m\omega^2 x + F, \quad x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{p(0)}{m\omega} \sin \omega t + x_c(1 - \cos \omega t).$$

$|0\rangle$ では $\langle x(0) \rangle = \langle p(0) \rangle = 0$ なので

$$\langle x(t) \rangle = x_c(1 - \cos \omega t).$$

$t = 0$ で 0、半周期後 $t = \pi/\omega$ で $2x_c$ 、1 周期後で 0 に戻る。これは「新しい平衡点 x_c の周囲を初期位置から振動する」という古典像と一致する。

■(d) 回帰確率. 量子波束は中心が移動したコヒーレント状態となる。 $g = Fx_*/(\hbar\omega)$ と書けば、時刻 t の状態は全体位相を除いて $|\alpha(t)\rangle$ 、 $\alpha(t) = g(1 - e^{-i\omega t})$ 。 $|\langle 0|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}$ から

初期状態への回帰確率

$$P_0(t) = \exp \left[-4 \left(\frac{Fx_*}{\hbar\omega} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) \right].$$

最終検算： $F \rightarrow 0$ で $P_0 = 1$ 、 $P_0 \in [0, 1]$ 、 $t = 2\pi n/\omega$ で $P_0 = 1$ 。 $\langle x \rangle$ は長さ、指数の中身は無次元である。
この問題からの転用： 量子状態の突然の変更には「新しい基底への射影」「元の状態で期待値」という 2 種類の問題がある。混同しない。

22.2 詳解例題 B：二状態の高分子鎖を伸ばす

問題. N 個の独立なリンクが x 方向に $+a$ または $-a$ の変位を取る高分子鎖を考える。向きを $\sigma_i = \pm 1$ 、全伸長を $X = a \sum_{i=1}^N \sigma_i$ とし、外力 f が作用したときのエネルギーを $H = -fX$ とする。(a) 分配関数、(b) 平均伸長、(c) 揺らぎ、(d) 小さい伸長での有効ばね定数を求めよ。

■読み取り. 各リンクが独立なので、 2^N 個の状態をすべて列挙する必要はない。Boltzmann 因子が積へ分かれることを先に確かめ、**1 リンクを計算して N 乗する**のが最短経路である。

■(a) 分配関数. $\beta = 1/(k_B T)$ とし、1 リンクの和は $e^{\beta f a} + e^{-\beta f a} = 2 \cosh(\beta f a)$ 。独立性から

$$Z_N(f, T) = \prod_{i=1}^N \sum_{\sigma_i = \pm 1} e^{\beta f a \sigma_i} = [2 \cosh(\beta f a)]^N.$$

よくある誤り： $Z_N = 2 \cosh(N\beta f a)$ と書くと、すべてのリンクが同じ向きを向く 2 配位しか数えていないことになる。

■(b) 平均伸長. $\partial_f \log Z_N = \beta \langle X \rangle$ を使えば

$$\langle X \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial f} \log Z_N = N a \tanh(\beta f a).$$

弱い力で $\tanh z = z + O(z^3)$ なので $\langle X \rangle \simeq N a^2 f / (k_B T)$ 。一方、強い力では $\langle X \rangle \rightarrow N a$ と**有限の最大長**へ飽和する。Hooke 則は弱い外力だけで成立する近似である。

■(c) 揺らぎと応答. 二階微分より

$$\text{Var}(X) = \frac{\partial^2 \log Z_N}{\partial (\beta f)^2} = N a^2 \text{sech}^2(\beta f a), \quad \frac{\partial \langle X \rangle}{\partial f} = \beta \text{Var}(X).$$

$f = 0$ で各 σ_i は平均 0・分散 1 だから $\text{Var}(X) = N a^2$ 、直接計算と一致する。**解法の一般化：** 外力を導入する $\rightarrow$ 分配関数の対数を微分する $\rightarrow$ 揺らぎと応答を結び付ける。この 3 段階はスピンの磁化率、分子鎖の長さ、電気分極にそのまま移せる。

■(d) 有効ばね. 小さい変位では $f \simeq (k_B T / (N a^2)) \langle X \rangle$ 。したがって

高分子のエントロピー弾性

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_B T}{N a^2}.$$

なぜ温度に比例するのか：伸びた状態は取り得る向きの組合せが少ない。温度が高いほどそのエントロピー損失が強く効き、元に戻ろうとする力が大きくなる。エネルギーの二次ばねとは機構が異なる。**検算：** $[k_B T / (N a^2)] = \text{N/m}$ 。

22.3 詳解例題 C：同軸伝送線路の電磁波とエネルギー流

問題. 完全導体の同軸線路（内導体半径 a 、外導体内半径 $b > a$ ）の間に、誘電率 ϵ ・透磁率 μ が一様な媒質がある。十分長く、端効果や損失を無視できる TEM 波を考える。(a) 単位長さの静電容量 C' 、(b) 単位長さのインダクタンス L' 、(c) 波の速度 v 、(d) Poynting 流束を求めよ。

■読み取り. 同軸円筒は円筒対称なので、Gauss の法則と Ampère の法則の**積分形**を選ぶ。TEM モードでは電場は半径方向、磁場は方位角方向、エネルギーは軸方向へ流れる。初めに向きを予想しておくで外積の符号を確認できる。

■(a) 電場から C' . 内導体の単位長さ当たりの自由電荷を λ とする。半径 r 、長さ ℓ の Gaussian 円筒で $\epsilon E_r (2\pi r \ell) = \lambda \ell$ 。よって

$$E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}, \quad V = \int_a^b E_r(r) dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \log \frac{b}{a}, \quad C' = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\log(b/a)}.$$

判断点：電位差を r で積分する向きと電場の向きをそろえる。 $\lambda > 0$ なら内から外へ電場が向き、内導体の電位が高い。

■(b) 磁場から L' . 内導体電流 I が $+z$ 方向なら、Ampère の法則から $H_\varphi(r) = I/(2\pi r)$ 、 $B_\varphi = \mu H_\varphi$ 。単位長さ当たりの磁気エネルギーを積分すると

$$\frac{U_B}{\ell} = \int_a^b \frac{B^2}{2\mu} 2\pi r dr = \frac{\mu I^2}{4\pi} \log \frac{b}{a}.$$

定義 $U_B/\ell = L' I^2/2$ と比較して

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{b}{a}.$$

条件：完全導体で導体内磁気エネルギーを無視する。有限導電率では表皮効果・内部インダクタンスを考える。

■(c) 波速と特性インピーダンス. 分布定数回路の電圧・電流について無損失の電信方程式 $\partial_z V = -L' \partial_t I$ 、 $\partial_z I = -C' \partial_t V$ を組み合わせると

$$\partial_t^2 V = \frac{1}{L' C'} \partial_z^2 V.$$

$L'C' = \mu\epsilon$ が上の結果から直ちに分かるので

TEM 波の速度と特性インピーダンス

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{\log(b/a)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

幾何が消える理由：波速には $\log(b/a)$ が L' と C' の間で打ち消されるが、 Z_c には残る。従って線路の断面形状は、同じ媒質中でも**波速よりインピーダンス**に強く現れる。

■(d) Poynting 流束. TEM 波で瞬間的に $E_r = V/[r \log(b/a)]$ 、 $H_\varphi = I/(2\pi r)$ とすると

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E_r H_\varphi \hat{z}, \quad P = \int_a^b S_z 2\pi r dr = VI.$$

意味：電気エネルギーは導線の金属内部を流れるのではなく、主として導体間の電磁場を通して運ばれる。正弦波を複素振幅で扱うときは $\langle P \rangle = \text{Re}(VI^*)/2$ であり、**実効値かピーク値か**で係数が変わる。

22.4 詳解例題 D：強制減衰振動子の Green 関数

問題. $x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = f(t)$ ($\gamma > 0, \omega_0 > 0$) に対し、因果的 Green 関数 $G(t)$ を求め、初期値 $x(0) = x_0$ 、 $x'(0) = v_0$ の解を書け。臨界減衰 $\gamma = \omega_0$ も扱え。

■読み取り. これは時間に並進不変な線形方程式である。 $f = 0$ の一般解で初期条件を合わせる部分と、外力 f への応答の部分に**重ね合わせ**で分離する。 G は単位インパルス $f(t) = \delta(t)$ への応答で、 $t < 0$ に影響を及ぼさない**因果性**を選ぶ。

■(a) Green 関数の定義. $G(t < 0) = 0$ 、 $LG = \delta(t)$ 、 $L = \partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2$ 。点源の周囲で積分すると $G'(0^+) - G'(0^-) = 1$ 。 $G(0) = 0$ 、 $G'(0^+) = 1$ を満たす $t > 0$ の同次方程式の解を探す。

■(b) 減衰の種類. $\gamma < \omega_0$ では $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ と書ける。 $\gamma > \omega_0$ では $\delta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ 、 $\gamma = \omega_0$ では重根になる。

あらゆる減衰領域での因果 Green 関数

$$G(t) = \Theta(t)e^{-\gamma t} \begin{cases} \sin(\omega_d t)/\omega_d, & \gamma < \omega_0, \\ t, & \gamma = \omega_0, \\ \sinh(\delta t)/\delta, & \gamma > \omega_0. \end{cases}$$

検算： $G(0^+) = 0$ 、 $G'(0^+) = 1$ 。 $\omega_d \rightarrow 0$ または $\delta \rightarrow 0$ で $\sin z/z \rightarrow 1$ 、 $\sinh z/z \rightarrow 1$ を使えば両側から $G(t) \rightarrow te^{-\gamma t}$ となる。

■(c) 初期条件を含む解. $G'(t)$ を使えば、外力なしの解は

$$x_h(t) = x_0\{G'(t) + 2\gamma G(t)\} + v_0 G(t) \quad (t > 0).$$

$t = 0$ で $G(0) = 0, G'(0) = 1$ より $x_h(0) = x_0$ 。さらに $G''(0^+) = -2\gamma$ より $x'_h(0) = x_0(-2\gamma + 2\gamma) + v_0 = v_0$ 。
外力には Duhamel の原理を使って

解を「初期値」と「力への応答」に分ける

$$x(t) = x_0\{G'(t) + 2\gamma G(t)\} + v_0 G(t) + \int_0^t G(t-s)f(s)ds.$$

一般化：状態変数 $(x, \dot{x})$ の行列指数から導いても同じ結果になる。この問題の構造は、電気回路の過渡応答・機械振動・線形応答理論・Green 関数法に共通する。

22.5 4 題に共通する「採点される答案の骨格」

試験答案の 5 行テンプレート

- 1 行目：系の仮定と未知量（どの解を探すか）を書く。
- 2 行目：基本原理・支配方程式を書き、適用可能な理由を示す。
- 3 行目：境界条件または保存量を適用し、必要な積分・対角化を行う。
- 4 行目：求める量だけを最終式として枠で示す。
- 5 行目：単位、零場・零結合極限、保存則など 1 つ以上で検算する。

23 理解度確認：1 行の公式を、3 行の理由に戻す

次の小問は採点対象の新作演習であり、既出原題ではない。まず解答を隠し、文章で 1 文、式で 2 行以上の根拠を記す。

- 確認 1. $V(x) = -g\delta(x)$ の束縛状態で、なぜ $\psi'(0)$ は連続ではないか。
- 確認 2. 波数が左右で異なる散乱で、なぜ透過率は $|t|^2$ と限らないか。
- 確認 3. $H_0 + \lambda x^4$ の一次補正を求めるとき、 $\langle x^4 \rangle$ の扱いで何に注意するか。
- 確認 4. 非縮退摂動論の分母が小さいとき、何を先に行うか。
- 確認 5. 外力の時間波形が短いとき、遷移周波数の許容幅はどう変わるか。
- 確認 6. $H = (\hbar/2)(\Delta\sigma_z + \Omega\sigma_x)$ で共鳴を表す条件は何か。
- 確認 7. 正準集団で $\partial_\beta^2 \log Z$ は何を表すか。
- 確認 8. 2 次元で分散 $\epsilon \propto k^2$ の状態密度は ϵ の何乗か。
- 確認 9. 一様 3 次元 Bose 気体の C_V 計算で z を固定してよいのはどの領域か。
- 確認 10. 固定 N の低温自由 Fermi 気体で C_V が T に比例する理由は何か。
- 確認 11. 異なる誘電率の界面で、一般に連続するのは $E_\perp$ か $D_\perp$ か。
- 確認 12. 透過波の接線電場の振幅が有限でも、全反射では平均の法線方向流束が 0 となるのはなぜか。
- 確認 13. 鏡像法で求めた点電荷と導体の相互作用エネルギーに、なぜ $1/2$ が必要か。
- 確認 14. 磁場中で $|v|$ が一定であることはどの内積から示せるか。
- 確認 15. 臨界減衰で行列指数に $te^{-\gamma t}$ が現れる理由は何か。
- 確認 16. 熱方程式を Fourier 変換すると、何がどのように簡単になるか。
- 確認 17. Green 関数に δ 源を入れると、関数と導関数のどちらにジャンプが出るか。
- 確認 18. Burgers 方程式の特性曲線が交差する前後で、何が変わるか。

確認問題の答え（根拠の要約）

- 確認 1. Schrödinger 方程式を点の両側で積分すると、 $\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -2mg\psi(0)/\hbar^2$ 。
- 確認 2. 確率流 $j \propto k|A|^2/m$ の比を取るため $T = (k_R/k_L)|t|^2$ 。
- 確認 3. 四次モーメントと二次モーメントの二乗は等しくない。選択則を用い $\langle n|x^4|n \rangle$ を求める。
- 確認 4. 縮退・近縮退部分空間で摂動行列を対角化する。
- 確認 5. Fourier 変換の幅が広がり、多くの周波数の遷移が可能になる。
- 確認 6. $\Delta = 0$ 。このとき遷移の振幅上限は 1。
- 確認 7. エネルギーの分散 $\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ 。
- 確認 8. $d/s - 1 = 2/2 - 1 = 0$ なので一定。
- 確認 9. $T < T_c$ では理想系で $z = 1$ に固定される。 $T > T_c$ では N 一定より $z(T)$ が変化する。
- 確認 10. Fermi 面近傍の厚み $O(k_B T)$ だけが熱励起され、 $U - U_0 \propto T^2$ 。
- 確認 11. 自由表面電荷がなければ $D_\perp$ が連続する。

確認 12. エバネッセント波は法線方向の時間平均 Poynting 流束を運ばない（損失なし）。

確認 13. 誘起電荷は実電荷の移動と共に変化するのので、形成仕事は像電荷との仮想二体エネルギーの半分になる。

確認 14. $\mathbf{v} \cdot [m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ で右辺がゼロ。

確認 15. 重根で $B^2 = 0$ となり、 $e^{Bt} = I + Bt$ が残る。

確認 16. $\partial_x^2 \rightarrow -k^2$ に変わり、各 k について一次の常微分方程式を解けばよい。

確認 17. 二階微分方程式の右辺に δ があれば、関数は連続のまま一階導関数が跳ぶ（本節の設定）。

確認 18. 交差前は滑らかな初期値からの一価な古典解、交差後は弱解と条件選択が必要になる。

復習への接続：参考書 → 過去問 25 年分

一つの解法を覚えたら、同じ解法を使う複数年度へ横断する。例： δ 接続条件 → 井戸・周期構造／状態密度 → 自由 Bose・トラップ Bose・Dirac 電子／境界条件 → 誘電体・表皮効果・鏡像法／行列指数 → 量子二準位系・減衰振動・輸送 PDE。過去問で間違えたときは、ここに戻って「最初の支配式」と「仮定」を説明し直す。

24 解法エッセンス：25 年分を貫く思考の地図

本章の狙い：公式を列挙することではなく、「問題文からどの演算・変換を選択するのか」を演習付きで具体化する。各項目には、判定 → 出発式 → 導出 → 検算 → 類題への移植を置く。前章までの内容を補う講義であり、2027 年度の出題を予言するものではない。

解法の最初の 30 秒

未知関数・未知数に下線を引く。対称性（並進・回転・交換）、保存量（確率・粒子数・電荷・エネルギー）、条件（初期値・境界値・規格化）を抜き出す。固有値なら行列化、周期なら Bloch / Fourier、微小変化なら摂動／線形応答、点源なら Green 関数、多数の自由度なら分配関数という入口を選ぶ。

24.1 近似法を選ぶ前の三つの問い

1. 厳密に対角化・変数変換できないか。特に二次形式は平方完成・正規座標・Fourier 変換をまず試す。
2. 展開パラメータは無次元か。摂動の小ささはポテンシャルの数値ではなく準位間隔・熱エネルギーなどとの比で決める。
3. 境界・初期・規格化条件は何本必要か。二階微分方程式なら通常 2 条件、行列の固有値なら固有ベクトルのノルムや縮退を確認する。

24.2 解けても点を落とす四種類の誤り

1. δ ポテンシャルでは ψ は連続だが ψ' には飛びがある。有限の段差では通常 ψ と ψ' が連続。
2. T や R は一般に振幅の二乗ではなく流束の比。量子散乱では群速度、電磁波ではアドミタンスを掛ける。
3. 熱力学の微分では保持する量を必ず明示する。 N 固定の比熱は μ 一定微分だけでは得られない。
4. $\exp(At)$ は固有値だけでは決まらない。固有値が重なれば Jordan 鎖・最小多項式まで確認する。

25 量子力学：境界・スペクトル・時間発展を一つの手順で扱う

25.1 E-Q1：デルタ障壁から Bloch 分散式を白紙で導く

対応：2015 年のデルタ相互作用 / 2026 年の周期デルタポテンシャル。

周期 $a > 0$ の一粒子系

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \lambda \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta(x - ja), \quad E = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} > 0$$

を考える。出発：セル間は自由粒子の解 $\psi = Ae^{iqx} + Be^{-iqx}$ 。原点近くで Schrödinger 方程式を積分すると

$$\psi(0^+) = \psi(0^-), \quad \psi'(0^+) - \psi'(0^-) = g\psi(0), \quad g = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}.$$

波動関数値と微分をベクトル $u = (\psi, \psi')^T$ として扱う。自由区間 a を進む行列と障壁を越える行列は

$$P(a) = \begin{pmatrix} \cos qa & \sin qa/q \\ -q \sin qa & \cos qa \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix}.$$

1 周期の移送行列を $M = DP(a)$ とすると $\det M = 1$ 。Bloch 条件 $u(x+a) = e^{ika}u(x)$ より固有値は $e^{\pm ika}$ である。したがって

Kronig–Penney 型の帯域条件

$$\cos ka = \frac{1}{2} \operatorname{tr} M = \cos qa + \frac{m\lambda}{\hbar^2 q} \sin qa.$$

許容帯は $\left| \cos qa + \frac{m\lambda}{\hbar^2 q} \sin qa \right| \leq 1$ 。

検算： $\lambda \rightarrow 0$ なら $k = \pm q$ を逆格子だけずらした自由粒子の折り畳みになる。 g の次元は長さの逆数で、 $g \sin(qa)/q$ は無次元。移植：1 周期に複数の層・障壁があっても各区間の行列を掛け、最終的に $|\operatorname{tr} M/2| \leq 1$ を判定する。

25.2 E-Q2：トンネル透過率を流束で求める

対応：2005 年の共鳴透過、2001 年の有限井戸、2010 年の中央障壁。

左右のポテンシャルが一定の領域で、入射波 $Ae^{ik_L x}$ 、反射波 $Be^{-ik_L x}$ 、透過波 $Ce^{ik_R x}$ とする。確率流

$$j = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}(\psi^* \psi')$$

を直接代入すれば入射・反射・透過の流れは $\hbar k_L |A|^2/m$, $-\hbar k_L |B|^2/m$, $\hbar k_R |C|^2/m$ 。同じ有効質量の場合

振幅と透過確率の違い

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2, \quad T = \frac{k_R}{k_L} \left| \frac{C}{A} \right|^2, \quad R + T = 1 \quad (\text{損失のない実ポテンシャル}).$$

解き方：各境界で ψ と ψ' の接続条件を立て、係数を連立方程式で解く。矩形障壁では障壁内の $\exp(\pm \kappa x)$ または $\exp(\pm i q x)$ を使う。**注意：**左右で質量が変わる有効質量模型では流束と接続条件の双方が変わるので、上式を無条件には流用しない。共鳴では透過位相も追う。

25.3 E-Q3：スクイーズド状態を共分散行列で理解する

対応：2022 年の不確定性と 2024 年のスクイーズド状態。

調和振動子の無次元量 $X = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$, $P = (a - a^\dagger)/(i\sqrt{2})$ は $[X, P] = i$ を満たす。実数 r に対し

$$S(r) = \exp\left[\frac{r}{2}(a^2 - a^{\dagger 2})\right]$$

と定義すると、交換子から $S^\dagger a S = a \cosh r - a^\dagger \sinh r$ 。従って $S^\dagger X S = e^{-r} X$, $S^\dagger P S = e^r P$ 。 $|r\rangle = S(r)|0\rangle$ の分散は

圧縮しても不確定性積は最小

$$(\Delta X)^2 = \frac{1}{2}e^{-2r}, \quad (\Delta P)^2 = \frac{1}{2}e^{2r}, \quad \Delta X \Delta P = \frac{1}{2}.$$

何を一般化するか：二変数の一般の Gaussian 状態なら共分散行列 $V_{ij} = \langle \{R_i - \langle R_i \rangle, R_j - \langle R_j \rangle\} \rangle / 2$ を作る。Heisenberg の不等式は $\det V \geq 1/4$ 。位相回転が入ると V_{XP} も生じるので、単純な $\Delta X \Delta P$ だけでは主軸方向の圧縮を判断できない。**検算：** $r \rightarrow 0$ で真空の分散に戻る。

25.4 E-Q4：時間依存摂動を遷移周波数の Fourier 解析にする

対応：2012 年の磁気共鳴、2025 年の二光子遷移。

$H(t) = H_0 + \epsilon V(t)$ とし、 $H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$ 。初期状態 $|i\rangle$ からの相互作用表示の一次遷移振幅は

$$c_f^{(1)}(t) = -\frac{i\epsilon}{\hbar} \int_0^t \langle f|V(t')|i\rangle e^{i\omega_{fi}t'} dt', \quad \omega_{fi} = (E_f - E_i)/\hbar.$$

振動駆動 $V(t) = W \cos \Omega t$ では $e^{i(\omega_{fi} \pm \Omega)t}$ を積分するので $\omega_{fi} \simeq \Omega$ の共鳴が現れる。二次では時間順序が必須で

$$c_f^{(2)}(t) = \left(-\frac{i\epsilon}{\hbar}\right)^2 \sum_n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 V_{fn}(t_1) V_{ni}(t_2) e^{i\omega_{fn}t_1 + i\omega_{ni}t_2}.$$

二光子問題の方針

(1) H_0 の固有基底を選ぶ。(2) 駆動演算子の選択則で中間状態 n を絞る。(3) 時間順序積分の上下限を固定する。(4) 共鳴極限を積分の最後にとる。(5) 振幅の絶対値二乗をとる。 $\omega_{fi} \simeq 2\Omega$ の二光子条件は中間状態の経路が実際に非零である場合にのみ有効。

注意：摂動一次が対称性でゼロでも、二次が自動的に非零とは限らない。二準位だけを仮定するか中間準位を持つかで結論が変わる。

25.5 E-Q5：縮退摂動と角運動量の判定

対応：2007 年の角運動量、2014 年の水素原子・Landau 準位。

H_0 のエネルギー E_0 が d 重縮退するときは、その部分空間の射影 P を取り、 $W_{ab} = \langle a|V|b \rangle$ の $d \times d$ 行列を先に対角化する。固有値が一次補正、固有ベクトルが正しい零次の線形結合となる。

$$L_{\pm}|\ell, m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm 1)}|\ell, m\pm 1\rangle, \quad L^2|\ell, m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|\ell, m\rangle.$$

典型例： $\ell = 1$ 部分空間に $V = \eta L_z$ が加われば、 $m = -1, 0, 1$ を基底に $PVP = \eta\hbar \text{diag}(-1, 0, 1)$ 、従って $\Delta E^{(1)} = \{-\eta\hbar, 0, \eta\hbar\}$ 。**注意：**元の多重度が他の量子数でも縮退しているなら、縮退空間を恣意的に削らず全体に対角化する。

25.6 E-Q6：密度行列と部分トレースは既出テーマに含まれる

対応：2009 年・2020 年のスピン相関。話題性による追加ではなく既出主題の必修部分。

二体系 $A \otimes B$ の純粋状態 $|\Psi\rangle$ に対して $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ 、部分系 $\rho_A = \text{Tr}_B \rho$ 。 $|\Psi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ なら

$$\rho_A = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2}I, \quad \text{Tr} \rho_A^2 = \frac{1}{2}, \quad S(\rho_A) = \ln 2.$$

解法手順：行列を作る前にテンソル積の添字 $\rho_{ab,a'b'}$ を明示し、 $\rho_{A;aa'} = \sum_b \rho_{ab,a'b}$ で同じ B の添字を縮約する。相関 $\langle\sigma_i \otimes \sigma_j\rangle$ はその後トレースで計算。**注意：**Bell 不等式の上限は、局所実在模型と量子模型で異なる。部分系の混合性を「全系が混合状態」と混同しない。

26 統計力学：何を固定して微分するかが解法を決める

26.1 E-S1：分配関数の微分から揺らぎを導出する

対応：2008・2015 年の揺らぎ・応答、2024 年の吸着平衡。

正準集団で $Z(\beta, h) = \text{Tr} \exp[-\beta(H_0 - hM)]$ と定義する。 h が M へ線形に結合し、 M が h によらないとき

$$\langle M \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial h}, \quad \chi_T = \left(\frac{\partial \langle M \rangle}{\partial h} \right)_T = \beta (\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2)$$

が古典模型または $[H_0, M] = 0$ の量子模型で成立する。非可換な量子模型では一般に Kubo 型の虚時間相関が必要である。**例：**一個の独立スピン $s = \pm 1$ 、エネルギー $-hs$ なら $Z = 2 \cosh(\beta h)$ 、 $m = \tanh(\beta h)$ 、 $\chi_T = \beta \text{sech}^2(\beta h)$ 。 $h = 0$ で $\chi_T = \beta$ 。**非可換な量子系では** χ_T は一般に等時刻の分散ではなく虚時間 Kubo 相関から求める（後掲の講義ノート参照）。**検算：**古典系で分散は非負であるため $\chi_T \geq 0$ 。

26.2 E-S2：任意の分散則の状態密度を数える

対応：2023 年の Dirac 電子、2016 年のフォノン、2006 年の黒体放射。

d 次元において正のエネルギー枝 $\epsilon = Ak^s$ ($A, s > 0$)、内部縮退 g とする。球面積を $S_{d-1} = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ とすると

$$dN = g \frac{V_d}{(2\pi)^d} S_{d-1} k^{d-1} dk, \quad k = (\epsilon/A)^{1/s}, \quad \frac{dk}{d\epsilon} = \frac{1}{s} A^{-1/s} \epsilon^{1/s-1}.$$

従って

状態密度の一般公式

$$D(\epsilon) = \frac{gV_d S_{d-1}}{(2\pi)^d s A^{d/s}} \epsilon^{d/s-1}, \quad \epsilon > 0.$$

例：2次元の Dirac 型 $\epsilon = \hbar v k$ なら $D(\epsilon) = gA\epsilon/[2\pi(\hbar v)^2]$ （正エネルギー枝）。3次元の線形音響フォノンなら $D(\omega) \propto \omega^2$ 、低温の内部エネルギー $U \propto T^4$ より $C_V \propto T^3$ 。**注意：**価電子帯・伝導帯の両方を数えるときはエネルギー原点や枝数を明示する。

26.3 E-S3：トラップ中 Bose 気体の凝縮温度

対応：2013 年の自由 Bose 気体、2025 年の調和トラップ中 Bose 気体。

3次元調和トラップ $V(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} \sum_i \omega_i^2 x_i^2$ 、大きな励起量子数の半古典近似を使う。基底状態エネルギーを零と測り、励起エネルギー $\epsilon \gg \hbar\omega_i$ で状態密度は

$$D(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z}.$$

したがって励起粒子の収容数は

$$N_{\text{ex}}(T, z) = \int_0^\infty \frac{D(\epsilon) d\epsilon}{z^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1} = \frac{(k_B T)^3}{\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} g_3(z), \quad g_3(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^3}.$$

臨界で $z \rightarrow 1$ 、 $N = N_{\text{ex}}$ として

3次元調和トラップの半古典凝縮温度

$$k_B T_c = \hbar (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3}.$$

検算：箱中の自由気体の $T_c \propto n^{2/3}$ と指数が違う。**適用条件：** $k_B T \gg \hbar \omega_i$ 、相互作用なし、理想気体熱力学極限の近似。有限系では離散準位と基底エネルギーを適切に扱う。

26.4 E-S4：固定粒子数の Fermi 気体の低温熱

対応：2014 年の 2 次元 Fermi 気体、2020 年の Fermi 統計、2023 年の低温比熱。

Sommerfeld 展開は $k_B T \ll \epsilon_F$ で、滑らかな $\varphi(\epsilon)$ に対し

$$\int_0^\infty \varphi(\epsilon) f_F(\epsilon) d\epsilon = \int_0^\mu \varphi(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \varphi'(\mu) + O(T^4).$$

粒子数 $N = \int D f_F$ を固定して $\mu(T)$ のずれを導く。

$$\mu(T) = \epsilon_F - \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{D'(\epsilon_F)}{D(\epsilon_F)} + O(T^4),$$

続いて $U = \int \epsilon D f_F$ を微分すると

一般状態密度の Fermi 低温比熱

$$C_V = \frac{\pi^2}{3} D(\epsilon_F) k_B^2 T + O(T^3) \quad (N, V \text{ 固定}).$$

注意：低温で $D(\epsilon_F) = 0$ となる Dirac 点や特異な状態密度では、この通常の展開は不適切。 T 依存の化学ポテンシャルを無視した計算は補正係数を誤る。

26.5 E-S5：Ising 模型の転送行列は最大固有値に帰着する

対応：2001・2017・2019・2026 年の Ising / スピン鎖。

周期一次元 Ising 鎖 $H = -J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} - h \sum_i s_i$ に対し、磁場項を両端へ半分ずつ置けば

$$T_{ss'} = \exp \left[\beta J s s' + \frac{\beta h}{2} (s + s') \right], \quad T = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+h)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-h)} \end{pmatrix}.$$

$Z_N = \text{tr } T^N$ であり、 $\lambda_\pm = e^{\beta J} \cosh \beta h \pm \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \beta h + e^{-2\beta J}}$ 。

$$f_\infty = -k_B T \ln \lambda_+, \quad m = \frac{\partial \ln \lambda_+}{\partial (\beta h)}.$$

$h = 0, J > 0$ なら $\lambda_+ = 2 \cosh \beta J, \lambda_- = 2 \sinh \beta J$ 、無限系の相関長は

$$\xi^{-1} = -\ln \left| \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right| = -\ln(\tanh \beta J).$$

適用条件：この ξ 式は $J > 0, h = 0$ 。有限温度で一次元短距離 Ising 模型の自発磁化はない。**移植：**三状態分子・二元合金でも隣接状態が有限なら転送行列化できる。

26.6 E-S6：高分子鎖の張力は自由エネルギーから出す

対応：2002・2004・2015・2026 年の二状態鎖・高分子。

各セグメントが外力 F に沿って $\pm a$ の長さ成分を取る独立な鎖を考える。エネルギー $-Fas, s = \pm 1$ より $Z_1 = 2 \cosh(\beta Fa), Z_N = Z_1^N$ 。自由エネルギー $\mathcal{F} = -Nk_B T \ln[2 \cosh(\beta Fa)]$ から伸び

$$\langle X \rangle = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial F} = Na \tanh(\beta Fa), \quad \left(\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial F} \right)_T = N\beta a^2 \operatorname{sech}^2(\beta Fa).$$

$F \rightarrow 0$ で $\langle X \rangle \simeq Na^2 F / (k_B T)$ 、揺らぎ $\langle (\Delta X)^2 \rangle = Na^2$ 。**検算：**伸びは $|\langle X \rangle| \leq Na$ 、高温で伸びにくくなる。**注意：**伸び固定の問題では F の代わりに X に関する Legendre 変換を使う。

26.7 E-S7：平均場・Landau 展開の安定性を見分ける

対応：2003 年の相分離・Landau 展開、2026 年のスピン模型。

対称性 $m \mapsto -m$ を持つ模型の自由エネルギーを $F(m) = F_0 + a(T)m^2/2 + bm^4/4 - hm$ ($b > 0$) と近似。平衡条件 $F'(m) = am + bm^3 - h = 0$ 、局所安定 $F''(m) = a + 3bm^2 > 0$ 。

$$h = 0: \quad a > 0 \Rightarrow m = 0, \quad a < 0 \Rightarrow m = \pm \sqrt{-a/b}, \quad \chi = \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h=0} = \frac{1}{a} \quad (a > 0).$$

移植：臨界指数 $\beta_{MF} = 1/2$ はこの近似の結果であり、任意の低次元模型に厳密に当てはまるわけではない。対称性に三次項が許される場合や $b < 0$ の場合は六次項まで必要になり、相転移の次数も変わる。

27 電磁気学・古典力学：場の方程式と境界条件を組み合わせる

27.1 E-E1：Poisson 方程式と境界条件から鏡像法を作る

対応：2025 年の Poisson 方程式・鏡像法。

静電場 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ 、 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ 、一様媒質で $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ なら

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon.$$

無限の接地導体面 $z=0$ の上方 $z>0$ に q が $(0,0,d)$ にあるとき、 $z<0$ に仮想電荷 $-q$ を $(0,0,-d)$ へ置く。上半空間の解は

$$\phi(\rho, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}} \right], \quad z > 0.$$

面上で $\phi(\rho, 0) = 0$ 。一意性定理により境界と源を満たせば真の解である。表面電荷密度は $\sigma = \epsilon E_z(0^+)$ 、したがって

$$\sigma(\rho) = -\frac{qd}{2\pi(\rho^2 + d^2)^{3/2}}, \quad \int_0^\infty 2\pi\rho\sigma(\rho)d\rho = -q.$$

注意：エネルギーを像との相互作用として計算する場合、誘導電荷は外部電荷の位置に応じて変化するため一般に $1/2$ 係数を忘れない。電荷 q を導体面へ移動させる仕事は $U(d) = -q^2/(16\pi\epsilon d)$ (無限遠で $U=0$)。

27.2 E-E2：多重極展開を対称性から簡略化する

対応：2023 年の電気双極子・四重極子。

遠方 $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ で

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + O(r'^3/r^4).$$

これを $\phi = \int \rho(\mathbf{r}')/[4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]d^3r'$ に代入。総電荷 $Q = \int \rho$ 、双極子 $\mathbf{p} = \int \rho\mathbf{r}'$ 、四重極 $Q_{ij} = \int \rho(3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij})$ とここでは定義すると

遠方電位の多重極展開

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \frac{1}{2r^3} \sum_{ij} Q_{ij} \hat{r}_i \hat{r}_j + \cdots \right).$$

判定：対称性から Q または $\mathbf{p}$ がゼロになると最初の非零多重極が主導。注意：四重極テンソルの 3 と $1/2$ の配置は文献ごとに異なるため、必ず定義を書いてから係数を使う。

27.3 E-E3：Rayleigh 散乱は静電極化率から始まる

対応：2024 年の Rayleigh 散乱・光ピンセット。

半径 a の小球（比誘電率 ϵ_r 、非磁性）を真空のほぼ一様な電場 $E_0 \hat{z}$ へ置く。Laplace 方程式の軸対称解を

$$\phi_{\text{out}} = -E_0 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \phi_{\text{in}} = -E_{\text{in}} r \cos \theta$$

とし、球面 $r = a$ で E_θ と D_r を連続にする。すると

$$E_{\text{in}} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0, \quad p = \alpha E_0, \quad \alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}.$$

時間的に振動する双極子 $\mathbf{p}(t) = \text{Re}(\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t})$ の放射電力は

電気双極子の時間平均放射電力

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^4 |\mathbf{p}_0|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (\text{真空中・非相対論的双極子近似}).$$

入射強度 $I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 |E_0|^2$ で割ると散乱断面積 $\sigma_{\text{sc}} = k^4 |\alpha|^2 / (6\pi\epsilon_0^2)$ 、 $k = \omega/c$ 。従って $\sigma_{\text{sc}} \propto a^6 / \lambda^4$ 。適用条件： $ka \ll 1$ かつ吸収・動的極化率が無視できる領域。光ピンセットの力は場の勾配、放射圧、吸収による寄与を区別する。

27.4 E-E4：Fresnel 反射は境界の 2 本の一次式を解く

対応：2014 年の表皮効果・反射、2022 年の全反射。

均一・等方・損失なしの媒質 1,2 に平面波が入射。境界で接線電場 E_t と磁場 H_t が連続。電場振幅を界面接線成分で表現すれば、適切なアドミタンス Y を用いて

$$1 + r = t, \quad Y_1(1 - r) = Y_2 t, \quad r = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad t = \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2}.$$

TE 偏光は $Y = \frac{n \cos \theta}{Z_0}$ 、TM 偏光は $Y = \frac{n}{Z_0 \cos \theta}$ ($Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ 、非磁性媒質)。

エネルギー流束による反射率・透過率

$$R = |r|^2, \quad T = \frac{\text{Re } Y_2}{\text{Re } Y_1} |t|^2, \quad R + T = 1 \quad (\text{損失がなく透過波が伝播}).$$

注意：TM の r, t の符号は接線電場基準と全電場振幅基準で変わる。Brewster 角と全反射では、Snell の法則に加えて界面の位相と Poynting ベクトルを確認する。全反射で $|r| = 1$ でも、界面先のエバネッセント場はゼロとは限らない。

27.5 E-E5：同軸線路では電場・磁場・流束を別々に積分する

対応：2020 年の同軸ケーブル・TEM モード。

内半径 a 、外半径 b の理想同軸線路（誘電率 ϵ 、透磁率 μ ）の TEM 波では

$$E_r(r) = \frac{V}{r \ln(b/a)}, \quad H_\varphi(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad a < r < b.$$

単位長さ当たりの電気・磁気エネルギーを $(\epsilon/2) \int |E|^2 dA$ 、 $(\mu/2) \int |H|^2 dA$ と比較して

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}, \quad L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a), \quad v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

検算： $[C'] = \text{F/m}$ 、 $[L'] = \text{H/m}$ 、 $[Z_c] = \Omega$ 。Poynting の断面積分は $P = VI$ 。注意：ここでは誘電体損失と導体抵抗を省略。表皮効果が問題になると周波数依存の抵抗・減衰を追加する。

27.6 E-E6：荷電粒子・回転座標系は変数の置き方で整理する

対応：2014 年の Landau 準位との接続、2026 年の磁場中荷電粒子・回転運動。

一様磁場 $\mathbf{B} = B\hat{z}$ 中、電場なしの粒子に $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。質量 $m > 0$ 、 $\omega_c = qB/m$ と定義すると

$$\dot{v}_x = \omega_c v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega_c v_x, \quad v_x + iv_y = (v_x(0) + iv_y(0))e^{-i\omega_c t}.$$

速度の絶対値は不変で、磁力は仕事をしない。軌道半径は $R = mv_\perp/|qB|$ 。回転座標系 $\mathbf{r} = R(t)\mathbf{r}'$ では

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{\text{inertial}} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}').$$

解法：まず慣性系で Lorentz 力を立て、必要なら回転座標へ移す。注意：Coriolis 項や遠心項は座標変換に由来する。磁気力の向きは q の符号で反転する。

27.7 E-E7：小振動は二つの行列で決まる

対応：2017 年の二重振り子・固有モード移行、2016 年の連成振動との共通構造。

平衡点の近くで $L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T K \mathbf{q}$ (M 正定値、 K 対称) なら Euler-Lagrange 方程式は

$$M\ddot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{q} = \mathbf{u}e^{i\omega t} \Rightarrow (K - \omega^2 M)\mathbf{u} = 0.$$

$M^{1/2}$ で質量規格化し、 $M^{-1/2}KM^{-1/2}$ という対称行列を対角化すれば実固有振動数と直交モードを扱える。

振動モードの直交性と安定性

$$K\mathbf{u}_n = \omega_n^2 M\mathbf{u}_n, \quad \omega_n^2 \neq \omega_m^2 \Rightarrow \mathbf{u}_m^T M\mathbf{u}_n = 0.$$

検算： K が半正定値なら $\omega_n^2 \geq 0$ 。 K に負の固有値があると指数成長モードが生じうる。注意：座標に速度一次の磁気項がある場合は一般の二次固有値問題となり、この単純な対称形式だけでは不足する。

28 数学：演算子の形を見て、対角化・変換・境界を選ぶ

28.1 E-M1：Jordan 型を意識した行列指数

対応：2023・2026 年の行列指数、2022 年の安定性。

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N, \quad N^2 = 0$$

なら $e^{At} = e^{\lambda t}(I + tN)$ 。重要：対角化できない場合も行列指数は存在する。一般に $A = SJS^{-1}$ 、 J が Jordan ブロックであれば

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}, \quad e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k N^k}{k!} \quad (N^p = 0).$$

検算： $e^{A0} = I$, $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$ 。安定性：全固有値の実部が負なら指数減衰する。虚軸上の固有値は Jordan ブロックがあると多項式増大しうるので、単なる実部の符号だけで有界性は結論できない。

28.2 E-M2：階数 1 摂動は逆行列を丸ごと計算しない

対応：2022 年の階数 1 摂動・安定性。

A が可逆、列ベクトル u, v を考える。matrix determinant lemma は

$$\det(A + uv^T) = \det A (1 + v^T A^{-1}u).$$

さらに $1 + v^T A^{-1}u \neq 0$ なら

Sherman–Morrison 公式

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u}.$$

導出：右辺を $(A + uv^T)$ に掛けて単位行列になることを示す。 $A - \lambda I$ に適用すれば、階数 1 で動く固有値の方程式を 1 個のスカラー方程式に還元できる。注意：複素内積では uv^T と $uv^\dagger$ の定義を使い分ける。極で $A - \lambda I$ が特異な点は極限で扱う。

28.3 E-M3：Fourier 変換は微分を代数式に変える

対応：2015・2024 年の熱核・Fourier 解析、2005 年の Fokker–Planck。

$\widehat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(k)e^{ikx}dk$ とする。十分速く減衰する f なら部分積分から $\widehat{\partial_x f} = ik\widehat{f}$, $\widehat{\partial_x^2 f} = -k^2\widehat{f}$ 。熱方程式： $\partial_t u = D\partial_x^2 u$, $u(x, 0) = u_0(x)$ を変換すると $\partial_t \hat{u} = -Dk^2 \hat{u}$ 。逆変換して

1 次元熱核

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} G(x - y, t)u_0(y)dy, \quad G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-x^2/(4Dt)} \quad (t > 0).$$

検算： $\int G(x, t) dx = 1$ 、 $\int x^2 G(x, t) dx = 2Dt$ 。 **注意：**この核は無限直線上の自由拡散。有限区間なら境界条件に合わせた固有関数展開が必要。

28.4 E-M4：Green 関数のジャンプ条件と自己共役性

対応：2011 年の Green 関数、2001 年の Bessel・境界値問題。

$L = -\frac{d^2}{dx^2} + \kappa^2$ ($\kappa > 0$) を全直線で考える。 $LG(x, x') = \delta(x - x')$ で、 $x \rightarrow \pm\infty$ に減衰する解を探す。 $x \neq x'$ では同次解であり、 G は連続、微分には

$$-G'(x'^+) + G'(x'^-) = 1$$

のジャンプがある。よって

全直線上の修正 Helmholtz Green 関数

$$G(x, x') = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa|x-x'|}, \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}} G(x, x') f(x') dx'.$$

検算： $G(x, x') = G(x', x)$ は自己共役性の反映。**移植：**境界のある区間なら左右境界を満たす二つの解を組み合わせ、その Wronskian で係数を決める。

28.5 E-M5：留数と Fourier 積分は極の位置で選ぶ

対応：2007・2022・2023 年度の複素積分と留数。

例として $a > 0$ 、 $\omega \in \mathbb{R}$ の

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2} dx$$

を考える。 $\omega > 0$ なら $e^{i\omega z}$ は上半平面で減衰するので上へ閉じ、極 $z = ia$ だけが寄与。 $\text{Res}_{z=ia} = e^{-a\omega}/(2ia)$ より $I = \pi e^{-a\omega}/a$ 。 $\omega < 0$ では下へ時計回りに閉じる。よって

$$I(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}.$$

注意：Jordan の補題に必要な減衰を確認すること。積分経路上に極があれば主値、半円回避の寄与を明記し、単純に $2\pi i$ 倍としない。分岐点がある問題では留数だけでなく branch cut の寄与が必要。

28.6 E-M6：特性曲線法と拡散を混ぜない

対応：2020 年の移流拡散、2026 年の特性曲線。

一階移流 $\partial_t u + c\partial_x u = 0$ は $\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t + \dot{x}u_x = 0$ 、 $\dot{x} = c$ より $u(x, t) = u_0(x - ct)$ 。移流拡散

$$\partial_t u + c\partial_x u = D\partial_x^2 u$$

は移動座標 $y = x - ct$ 、 $v(y, t) = u(y + ct, t)$ で $v_t = Dv_{yy}$ となる。

移流拡散の全直線解

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - ct - y)^2}{4Dt}\right] u_0(y) dy.$$

検算： $D \rightarrow 0^+$ で $u \rightarrow u_0(x - ct)$ (適切な連続点)。 $c \rightarrow 0$ で純拡散。**移植：**速度が x 依存すると特性曲線は非線形になり、時間依存境界での単純な畳み込みは原則そのまま使えない。

28.7 E-M7：Sturm–Liouville の直交性と展開

対応：2008 年の Hermite、2025 年の直交多項式。

$$L[y] = -(py')' + qy = \lambda wy, \quad p > 0, \quad w > 0.$$

y_m, y_n の式を互いに掛けて引いて積分すると

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b w y_m y_n dx = [p(y_n y'_m - y_m y'_n)]_a^b.$$

自己共役境界条件で右辺がゼロなら $\lambda_m \neq \lambda_n$ に対して重み w で直交。**例：**Legendre の方程式 $[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0$ は $[-1, 1]$ 上で $p = 1-x^2, w = 1$ 。自然な端点条件により $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 2\delta_{mn}/(2n+1)$ 。

注意：無限区間や特異端点では、境界項が消える定義域を別途確かめる。

28.8 E-M8：漸近積分は「最大点の周りの二次式」に戻す

対応：2010 年の最急降下法、その他の大パラメータ積分。

$\lambda \rightarrow +\infty$ で $I(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{-\lambda\phi(x)}dx$ 、内部に唯一の非退化極小点 x_0 があり $\phi''(x_0) > 0$ なら $\phi(x) \simeq \phi(x_0) + \phi''(x_0)(x-x_0)^2/2$ と展開する。Gaussian 積分により

$$I(\lambda) \sim f(x_0)e^{-\lambda\phi(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\phi''(x_0)}}.$$

注意：端点が寄与を支配する場合、停留点が縮退する場合、複数の最小点がある場合はそれぞれ別の漸近形になる。最初に優勢な点の位置を確認する。

29 4 分野横断：自力で解法を選ぶための確認演習

29.1 確認 1：摂動と厳密解の整合

設問： $H = p^2/(2m) + m\omega^2 x^2/2 - Fx$ に対し基底エネルギーを (1) 二次摂動、(2) 平方完成の二つで求め、合致することを示せ。

解答： $x = x_*(a + a^\dagger)$ で $\langle 0|x|0\rangle = 0$ 、 $\langle 1|x|0\rangle = x_*$ 。よって $\Delta E_0^{(2)} = F^2 x_*^2/(E_0 - E_1) = -F^2/(2m\omega^2)$ 。平方完成 $\frac{1}{2}m\omega^2(x - x_c)^2 - F^2/(2m\omega^2)$ 、 $x_c = F/(m\omega^2)$ より全次数で $E_0 = \hbar\omega/2 - F^2/(2m\omega^2)$ 。線形摂動は F の二次で厳密に終了。

29.2 確認 2：自由粒子と Dirac 粒子の状態密度を比較

設問：2次元の $\epsilon = Ak^s$ 、 $s = 1, 2$ について $D(\epsilon)$ を求めよ。

解答：内部縮退 g 、面積 A 。一般式へ $d = 2$ を代入して $D(\epsilon) = gA\epsilon^{2/s-1}/(2\pi sA^{2/s})$ 。 $s = 1$ なら $D \propto \epsilon$ 、 $s = 2$ なら定数。分散の指数が熱励起の温度依存性を変えることを把握する。

29.3 確認 3：界面電磁波のエネルギー保存を求める

設問：正入射・無損失・非磁性媒質、屈折率 $n_1, n_2 > 0$ 。電場の反射・透過振幅と強度を求めよ。

解答： E 接線連続 $1 + r = t$ 、 H 接線連続 $n_1(1 - r) = n_2 t$ から $r = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ 、 $t = 2n_1/(n_1 + n_2)$ 。 $R = r^2$ 、 $T = (n_2/n_1)t^2 = 4n_1n_2/(n_1 + n_2)^2$ 。 $R + T = 1$ は通分して確かめられる。

29.4 確認 4：非対角化可能な行列の初期値問題

設問： $\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}$ 、 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 、 $\mathbf{u}(0) = (0, 1)^\top$ を解け。

解答： $A = -I + N$ 、 $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 、 $N^2 = 0$ 。よって $e^{At} = e^{-t}(I + tN)$ 、 $\mathbf{u}(t) = e^{-t}(2t, 1)^\top$ 。 $t = 0$ と微分方程式への代入で検算。両固有値 -1 だからといって $A = -I$ とは限らない。

ここを白紙から説明できるか

量子：境界値問題の接続条件、摂動分母、遷移振幅の時間順序、密度行列の部分トレース。

統計：状態密度の Jacobian、 N 固定の微分、Ising 行列の固有値、揺らぎと感受率。

電磁・力学：Poisson 境界、Poynting 流束、双極子放射、一般化固有値問題。

数学：Jordan 行列指数、Fourier 変換の符号、デルタ源のジャンプ、固有関数直交。

30 25 年度・100 学習枠：解法対応台帳（主題索引レベル）

台帳の位置づけ：本台帳は 25 年度 $\times 4$ 分野 = 100 個の学習上の対応枠に対し、年度別主題と必要な基礎解法を対応付けたものである。**実際の試験の総大問数が 100 という意味ではない。**量子・統計・数学の計 75 枠は既存年度索引、電磁・力学の 2014–2026 年度（2021 除外）の 12 枠は既存分野索引、2001–2013 年度の 13 枠は公式原題の代表設問を参考にした。問題の全小問の完全監査とは異なる。

「網羅」の判定は 3 段階

A：年度の主題索引と解法章の対応を確認。**B：**原題の全小問に必要な公式・計算手順と照合。**C：**初見変形例題で応用を検証。現版で主題の入口を確認したのは A の 100 学習枠である。ただし旧 13 枠は代表設問のみ、B の全小問と C の全年度は未検証である。

30.1 量子力学：25 年度の対応

年度	出題主題（索引）	最初に選ぶ手法
2026	周期デルタ関数とバンドギャップ	E-Q1：移送行列・Bloch 条件
2025	時間依存摂動と二光子遷移	E-Q4：二次の時間順序積分・選択則
2024	スクイーズド状態	E-Q3：共分散・演算子変換
2023	2 次元調和振動子	生成消滅演算子・正規モード
2022	最小不確定状態	E-Q3：共分散と不等式
2020	二準位測定・Bell 型相関	E-Q6：部分トレース・相関
2019	調和振動子と四次摂動	E-Q4/E-Q5：行列要素・摂動展開
2018	断熱近似	断熱固有基底・位相・間隙条件
2017	二粒子振動子と自由波束	生成消滅演算子・正規モード
2016	磁束中の電子とゼロモード	磁束・ゲージ共変微分・零モードの規格化
2015	円周上のデルタ関数ポテンシャル	E-Q1/E-Q2：接続条件
2014	水素原子・Landau 準位・正準変換	E-Q5：角運動量・動径方程式
2013	量子調和振動子・コヒーレント状態	生成消滅演算子・正規モード
2012	スピンと磁気共鳴	スピン 1/2・Rabi 回転・E-Q4：共鳴駆動
2011	分離型ポテンシャル	E-Q2：Schrödinger 接続条件
2010	無限深井戸と中央デルタ障壁	E-Q1/E-Q2：接続条件
2009	スピン 1/2 と量子相関	E-Q6：密度行列・相関
2008	2 次元等方調和振動子	生成消滅演算子・正規モード
2007	角運動量の量子化	E-Q5：梯子演算子
2006	無限深井戸と一次摂動論	E-Q4/E-Q5：行列要素・摂動展開
2005	有限井戸と共鳴透過	E-Q2：移送行列・流束
2004	量子調和振動子	生成消滅演算子・正規モード
2003	井戸の拡張と断熱定理	断熱固有基底・位相・間隙条件
2002	1 次元調和振動子・コヒーレント状態	生成消滅演算子・正規モード
2001	有限井戸の束縛状態・浅い引力井戸	E-Q2：境界条件・束縛準位

30.2 統計力学：25 年度の対応

年度	出題主題 (索引)	最初に選ぶ手法
2026	高分子鎖と Ising 模型	E-S5：転送行列・固有値
2025	調和トラップ中の Bose 気体	E-S2/E-S3：状態密度・化学ポテンシャル
2024	理想気体と吸着平衡	E-S1：吸着サイトの大分配関数・化学平衡
2023	Dirac 電子・低温比熱	E-S2/E-S4：線形分散の状態密度
2022	Bose 凝縮と磁場	E-S2/E-S3：状態密度・化学ポテンシャル
2020	古典理想気体・Fermi 統計	E-S2/E-S4：状態密度・低温展開
2019	2 方向スピン模型・転送行列	E-S1/E-S5：分配関数・感受率
2018	古典理想気体・有限箱 Bose 気体	E-S2/E-S3：状態密度・化学ポテンシャル
2017	反強磁性 Ising 模型	E-S5：転送行列・固有値
2016	連成振動子とフォノンの低温比熱	E-S2：モード密度・Bose 積分・比熱
2015	高分子鎖と揺らぎ・応答	E-S6：自由エネルギー・張力
2014	2 次元 Fermi 気体・2 バンド	E-S2/E-S4：状態密度・低温展開
2013	3 次元理想 Bose 気体・断熱磁場変化	E-S2/E-S3：状態密度・化学ポテンシャル
2012	剛体回転子・オルト／パラ水素	回転準位・核スピンの縮退数・分配関数
2011	三角スピン模型・Brillouin 関数	E-S1/E-S5：分配関数・感受率
2010	2 状態鎖状分子とエントロピー	E-S6：二状態分配関数
2009	Fermi・Bose 統計と大分配関数	E-S2/E-S3：状態密度・化学ポテンシャル
2008	3 状態分子と揺らぎ・応答	E-S1：分配関数微分・相関
2007	相互作用スピン対の磁化率	E-S1/E-S5：分配関数・感受率
2006	黒体放射と Planck 分布	E-S2：状態密度と Planck 分布
2005	自由電子気体と熱電子放出	E-S2/E-S4：状態密度と分配関数
2004	2 状態鎖状分子・張力・Gibbs 自由エネルギー	E-S6：二状態分配関数
2003	二元合金・平均場・Landau 展開・相分離	E-S7：秩序変数の極値・安定性
2002	鎖状高分子・エントロピー弾性と電場	E-S6：自由エネルギー・張力
2001	周期 1 次元 Ising 模型・分配関数	E-S5：転送行列・固有値

30.3 電磁気学・力学：25 年度の対応

年度	出題主題 (索引)	最初に選ぶ手法
2026	荷電質点・磁場・回転する管	E-E6：Lorentz 力・回転座標
2025	静電場・Poisson 方程式・鏡像法	E-E1：Poisson 方程式・鏡像法
2024	Rayleigh 散乱・光ピンセット	E-E3：極化率・双極子放射
2023	双極子・四重極子・相互作用	E-E2：双極子・四重極テンソルと力
2022	電磁波・Fresnel 係数・全反射	E-E4：Fresnel 係数・エバネッセント場
2020	同軸ケーブル・TEM モード	E-E5：TEM・エネルギー積分

年度	出題主題 (索引)	最初に選ぶ手法
2019	重力波による連星運動の減衰	四重極放射・エネルギー損失
2018	電気双極子の放射・干渉	E-E2/E-E3: 多重極・放射
2017	二重振り子・固有モード移行	E-E7: 質量・剛性行列
2016	相対論的ロケット・固有加速度	Lorentz 変換・固有時間
2015	運動する電荷と Lorentz 変換	Lorentz 変換と電磁場変換
2014	導体の表皮効果・電力反射率	E-E5: 複素波数・表皮深さ
2013	電磁ポテンシャル・ゲージ変換	Lagrangian・全微分 (代表設問)
2012	束縛電子と誘電体分散	強制振動子・分極 (代表設問)
2011	磁場中の荷電粒子とドリフト	Lorentz 力・ $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト (代表設問)
2010	導電媒質中の電磁波・平行導体	複素波数・境界条件 (代表設問)
2009	弾性散乱と 2 体中心力	換算質量・有効ポテンシャル (代表設問)
2008	矩形導波管の TE/TM モード	変数分離・遮断条件 (代表設問)
2007	回転系と制限 3 体	回転座標・有効ポテンシャル (代表設問)
2006	平面波・Maxwell 方程式	波動方程式・横波 (代表設問)
2005	重力散乱・スイングバイ	中心力散乱・双曲線 (代表設問)
2004	電場中の電子運動・光	強制運動・時間平均 (代表設問)
2003	偏心導線と接地円筒	Gauss / Ampere・鏡像法 (代表設問)
2002	反射・屈折と Fresnel 係数	Snell・境界条件 (代表設問)
2001	一定固有加速度ロケット	固有時・ラビディティ (代表設問)

30.4 数学：25 年度の対応

年度	出題主題 (索引)	最初に選ぶ手法
2026	冪零行列・行列指数／特性曲線	E-M1: Jordan・行列指数
2025	Pauli 行列／直交多項式	E-M1/E-M2: スペクトル・射影
2024	Fourier 変換／固有値	E-M1/E-M2: 固有値・安定性
2023	留数定理／行列指数	E-M1: 行列指数
2022	複素積分／階数 1 摂動・安定性	E-M2: rank-one 更新
2020	移流拡散／巡回行列	E-M1/E-M2: スペクトル・射影
2019	Hermite 行列・SU(3)／スペクトル	E-M1/E-M2: スペクトル・射影
2018	最小ノルム解／非線形方程式	E-M3/E-M6: 変換と初期境界
2017	Laplace 変換／回転	E-M3/E-M6: 積分変換と初期値
2016	行列漸化式／非線形波動	E-M1/E-M2: スペクトル・射影
2015	Cayley-Hamilton / 熱核	E-M1: 最小多項式
2014	常微分方程式／巡回行列	E-M1/E-M2: スペクトル・射影
2013	Vandermonde / 偏微分方程式	Vandermonde 行列式・線形独立
2012	Pauli 行列／連立 PDE	E-M1/E-M2: スペクトル・射影
2011	反交換行列／Green 関数	E-M1/E-M2: スペクトル・射影
2010	最急降下法／波動方程式	E-M8: Laplace 法
2009	実対称行列／二準位	E-M1/E-M2: スペクトル・射影

年度	出題主題 (索引)	最初に選ぶ手法
2008	3次元回転／Hermite 多項式	E-M7：直交多項式
2007	回転・Vandermonde／複素解析	Vandermonde 行列式・線形独立
2006	スペクトル分解／変分法	E-M1：固有値と関数計算
2005	ユニタリ行列／Fokker-Planck	E-M1/E-M2：スペクトル・射影
2004	多項式の線形写像／熱方程式	E-M3/E-M6：変換と初期境界
2003	外積・回転／球対称波動	回転行列・固有値
2002	実対称行列／Laplace 方程式	E-M1/E-M2：スペクトル・射影
2001	部分空間／Bessel／減衰振動	E-M7：Sturm-Liouville・特殊関数

30.5 古い 13 年度の代表設問と全小問監査の区別

電磁・力学の 2001–2013 年度については、公式原題の代表設問を元に主題を対応付けた。各年度の全設問・全小問を解き直したわけではない。古い年度は試験の構成が異なる場合もあるため、現在の「第 3 問」に機械的に統一しない。最終的な完成判定には小問の要求 → 必要な原理 → 本書の節 → 自力再現できる例題という照合を逐次記録する必要がある。

30.6 過去問を解くときの台帳の使い方

1. 対象年度・分野の行を探し、提示された手法を読んでから問題を解く。
2. 小問ごとに「出発式・条件・途中の重要式・答え」を自分で記録する。
3. 本書に説明のない手法が出たら、本文の不足として追補欄に追記する。
4. 最後に原題と答案を独立に照合し、索引レベルの対応を小問レベルの対応に昇格させる。

第 III 編 解法を自分で組み立てるための詳解講義

この編の目的：過去問に出てくる式を「知っている」から「必要なときに再導出できる」へ進む。すべての例題は原題を写したものではなく、基本手法を独立の設定に移した演習である。旧版の年度索引が示すのは**主題の対応**であって、全設問の正解保証ではない。

解法の順序

解答の5行プロトコル：(1) 求める物理量と定義域 (2) 支配方程式 (3) 初期値・境界値・対称性 (4) 導出と近似の条件 (5) 次元・極限・保存則の検算。この順序を繰り返すだけで、時間配分が安定し、式の暗記に依存しにくくなる。

31 数学：式の形から解法を決める

31.1 未知量がベクトルか関数かを最初に判定する

未知量が有限個の数なら、まず行列方程式 $Ax = b$ または固有値問題 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ に帰着する。未知量が時間や空間の**関数**なら、微分演算子 L と初期・境界条件を特定する。似た形の式でも解く対象が違えば解法も変わる。例えば $-u'' = \lambda u$ は、単に一般解を2個足すだけでは固有値が決まらない。 $u(0) = u(L) = 0$ を課して初めて $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ が生じる。

31.2 無次元化で本質的なパラメータを減らす

必須公式

$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$ に対し $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 、 $\tau = \omega_0 t$ 、 $y = kx/F_0$ と置くと

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{dy}{d\tau} + y = \cos(r\tau), \quad \zeta = \frac{\gamma}{2m\omega_0}, \quad r = \frac{\Omega}{\omega_0}.$$

元の5つのパラメータ $m, \gamma, k, F_0, \Omega$ のうち応答の形を支配するものは ζ, r だけになった。 $r \approx 1$ で共鳴し、 ζ が幅を決める。**検算：** ζ と r は無次元である。摂動論でも同じ発想で「小さい量」を単位のある λ そのものではなく、基準エネルギーで割った無次元比として表す。

31.3 行列の対角化：固有値だけでなく射影を作る

$A = A^\dagger$ なら $A = \sum_j \lambda_j P_j$ と直交射影 P_j に分解できる。従って

$$e^{-iAt} = \sum_j e^{-i\lambda_j t} P_j, \quad f(A) = \sum_j f(\lambda_j) P_j.$$

例題： $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ の指数関数を求める。 $A = aI + b\sigma_x$ 、 $\sigma_x^2 = I$ より

$$e^{-iAt} = e^{-iat} [\cos(bt)I - i \sin(bt)\sigma_x].$$

検算： $t=0$ で I 、 t 微分で $-iA$ 、ユニタリ性は $A = A^\dagger$ から保証される。非 Hermite 行列では固有ベクトルがそろわない場合があるため、Jordan 標準形または最小多項式を用いる。

31.4 Jordan ブロック：指数関数に多項式が出る理由

$J = \lambda I + N$ 、 $N^r = 0$ なら

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k N^k}{k!}.$$

対角化できない行列の時間発展には $te^{\lambda t}$ などの因子が付く。 λ の実部が負でも、短時間には多項式因子が影響する。**2次例：** $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ なら $e^{tN} = I + tN$ 。**よくある誤り：**代数的重複度が2であることと、独立固有ベクトルが2本あることを混同しない。

31.5 階数 1 摂動を行列式補題で処理する

A が可逆、 u, v は列ベクトルとする。 $A + uv^T$ の行列式と逆行列は

$$\det(A + uv^T) = \det A (1 + v^T A^{-1} u),$$

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}$$

である。ただし $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$ 。例えば $A = \text{diag}(2, 3)$ 、 $u = v = (1, 1)^T$ とすると、 $\det(A + uv^T) = 6(1 + 1/2 + 1/3) = 11$ 。**解法の日印：**外積、射影 $|v\rangle\langle v|$ 、全成分が等しい行列が出たとき、成分展開する前に階数を数える。

31.6 Fourier 変換：微分方程式を代数に変える

規約を $\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx$ 、逆変換を $f(x) = (2\pi)^{-1} \int \hat{f}(k) e^{ikx} dk$ とする。十分に減衰する f では

$$\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k), \quad \widehat{f''}(k) = -k^2\hat{f}(k), \quad \widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}.$$

例題：熱方程式 $\partial_t u = D\partial_x^2 u$ の初期値 $u(x, 0) = f(x)$ 。Fourier 空間では $\partial_t \hat{u} = -Dk^2 \hat{u}$ 、従って

$$\hat{u}(k, t) = e^{-Dk^2 t} \hat{f}(k, 0), \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/(4Dt)} f(y) dy.$$

熱核は $t > 0$ で規格化 $\int G(x, t) dx = 1$ を満たす。**誤り防止：**逆変換の 2π と指数の符号を一行目に書く。

31.7 Green 関数は「点源に対する解」

線形作用素 L 、境界条件 B が与えられたら、 $LG(x, x') = \delta(x - x')$ を同じ境界条件で解く。 $Lu = f$ の解は $u(x) = \int G(x, x') f(x') dx'$ 。二階演算子 $L = -\partial_x^2 + \mu^2$ の無限直線上の Green 関数は

$$G(x, x') = \frac{e^{-\mu|x-x'|}}{2\mu}, \quad \mu > 0.$$

導出では $x \neq x'$ で同次解を用い、 $x = x'$ で連続、 $-G'(x' + 0) + G'(x' - 0) = 1$ を課す。**検算：**必ずこの導関数の跳びを積分して確かめる。

31.8 特性曲線法：波が交差する前までが古典解

一次偏微分方程式 $u_t + uu_x = 0$ を考える。 $x'(t) = u$ に沿うと $du/dt = 0$ なので、初期位置 ξ の値 $u_0(\xi)$ を保ち

$$x = \xi + tu_0(\xi), \quad u(x, t) = u_0(\xi).$$

$\partial x / \partial \xi = 1 + tu'_0(\xi)$ が 0 になると逆写像が失われ、滑らかな古典解に勾配発散が生じる。もし $\min u'_0 < 0$ なら最初の破綻時刻は

$$t_* = -\frac{1}{\min_{\xi} u'_0(\xi)}.$$

例題： $u_0(x) = -A \tanh(x/L)$ 、 $A, L > 0$ なら $\min u'_0 = -A/L$ 、 $t_* = L/A$ 。この時刻以後は弱解・エントロピー条件などの追加原理が必要になる。

31.9 球対称問題では最初に $u(r) = rR(r)$ を作る

$\psi = R_{\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ 、 $u_{\ell} = rR_{\ell}$ とすると、3次元 Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_{\ell}}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} \right] u_{\ell} = E u_{\ell}.$$

$\ell = 0$ でも正則性から $u(0) = 0$ が必要。**例題：**深さ V_0 、半径 a の球形井戸の s 波束縛状態は $u \propto \sin(kr)$ (内側)、 $u \propto e^{-\kappa r}$ (外側)。 $r = a$ で値と微分を連続にすると $k \cot(ka) = -\kappa$ が得られる。 R と u を混せて微分しない。

32 量子力学：支配方程式からスペクトルと遷移へ

32.1 境界条件だけで決まるものを先に決める

定常方程式 $-\hbar^2 \psi'' / (2m) + V\psi = E\psi$ を領域ごとに解き、連続性・跳び条件・無限遠での可積分性からエネルギーを決める。 $\lambda \delta(x)$ がある場合、 ψ は連続だが

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} \psi(0).$$

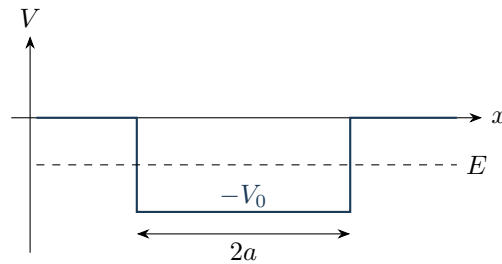
これは $-\varepsilon$ から $+\varepsilon$ まで Schrödinger 方程式を積分して得る。**例題：** $V(x) = -g\delta(x)$ 、 $g > 0$ では $\psi = Ae^{-\kappa|x|}$ 。跳び条件から $-2\kappa = -2mg/\hbar^2$ 、 $\kappa = mg/\hbar^2$ 、

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = -\frac{mg^2}{2\hbar^2}, \quad A = \sqrt{\kappa}.$$

検算は $\int |\psi|^2 dx = 1$ と $E < 0$ 。 $\lambda > 0$ の反発的デルタではこの束縛解は存在しない。

32.2 有限井戸：超越方程式は図で根の個数を数える

$V(x) = -V_0$ ($|x| < a$)、外側 0、 $-V_0 < E < 0$ とすると $k = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$ 、 $\kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar$ 。偶関数は $k \tan(ka) = \kappa$ 、奇関数は $-k \cot(ka) = \kappa$ 。



大きさ $k^2 + \kappa^2 = 2mV_0/\hbar^2$ と連立して解く。**試験中の方針**：一般解 → 偶奇分離 → 接続 → 無次元数 $z = ka$ の順にし、初めから複素指数 4 係数を扱わない。

32.3 摂動の 2 次補正が負になる理由

$H = H_0 + \epsilon V$ で非縮退基底 $|n\rangle$ とする。 $|\psi\rangle = |n\rangle + \epsilon \sum_{k \neq n} c_k |k\rangle$ を代入し、 $|k\rangle$ 成分から

$$c_k = \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}, \quad E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|V_{kn}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}.$$

基底状態では分母はすべて負なので $E_0^{(2)} \leq 0$ (ただし縮退・連続スペクトルの場合は別途注意)。**例題**： $H = H_0 - fx$ 、 $x = x_*(a + a^\dagger)$ なら基底からつながるのは $n = 1$ のみ。

$$E_0^{(2)} = \frac{f^2 x_*^2}{-\hbar\omega} = -\frac{f^2}{2m\omega^2}.$$

平方完成により $H = p^2/(2m) + m\omega^2(x - f/(m\omega^2))^2/2 - f^2/(2m\omega^2)$ であり、厳密値と一致する。

32.4 四次摂動を一度だけ丁寧に展開する

調和振動子 $H_0 = \hbar\omega(N + 1/2)$ に $V = \lambda x^4$ を加える。 $x = x_*(a + a^\dagger)$ なので

$$\langle n | x^4 | n \rangle = 3x_*^4(2n^2 + 2n + 1).$$

したがって $E_n^{(1)} = 3\lambda x_*^4(2n^2 + 2n + 1)$ 。導出は $x^2|n\rangle = x_*^2[\sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle + (2n+1)|n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2\rangle]$ をまず作り、そのノルム二乗として $\langle n | x^4 | n \rangle$ を求める。 x^4 の中の $aa^\dagger$ を、 $a^\dagger a$ と同じものとして扱わないこと。

32.5 時間依存摂動：遷移振幅から確率を作る

$H(t) = H_0 + V(t)$ 。 $H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$ として相互作用表示で一次の振幅は

$$c_{m \leftarrow n}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_{mn}(t') e^{i\omega_{mn}t'}, \quad \omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}.$$

例題：二準位系で $V_{10}(t) = V_0 e^{-t^2/(2\tau^2)}$ とし、 $t_0 = -\infty$ 、 $t = \infty$ とすると Gaussian 積分から

$$P_{0 \rightarrow 1}^{(1)} = \frac{2\pi V_0^2 \tau^2}{\hbar^2} e^{-\omega_{10}^2 \tau^2}.$$

これは $P \ll 1$ の摂動領域での近似。 τ を大きくするだけでは、共鳴 $\omega_{10} = 0$ の近傍で摂動条件を破る場合がある。**検算**：確率は無次元かつ非負。

32.6 二次遷移と時間順序：単純な平方ではない

一次が選択則でゼロでも、二次で遷移することがある。Dyson 展開は

$$c_{f \leftarrow i}^{(2)}(t) = \frac{(-i)^2}{\hbar^2} \sum_n \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 V_{fn}(t_2) V_{ni}(t_1) e^{i\omega_{fn}t_2 + i\omega_{ni}t_1}.$$

$\int dt_2 \int^{t_2} dt_1$ の積分領域は時間順序により三角形になる。 $V(t_1)$ と $V(t_2)$ が交換しない場合も含め、一次積分の単純な二乗に置き換えてはならない。**解法選択**：「二光子」「一次が禁止」「中間状態」と出たら、この二重積分を出発点にする。

32.7 二準位系：Pauli 行列で時間発展を短縮する

$H = (\hbar/2)(\Delta\sigma_z + \Omega\sigma_x)$ の場合、 $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ の二乗が I になることから

$$U(t) = \cos \frac{\Omega_R t}{2} I - i \sin \frac{\Omega_R t}{2} \frac{\Delta\sigma_z + \Omega\sigma_x}{\Omega_R}, \quad \Omega_R = \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}.$$

初期状態 $|\uparrow_z\rangle$ から $|\downarrow_z\rangle$ に移る確率は

$$P_{\uparrow \rightarrow \downarrow}(t) = \frac{\Omega^2}{\Delta^2 + \Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega_R t}{2}.$$

$\Delta = 0$ なら最大確率 1、 $|\Delta| \gg |\Omega|$ なら遷移は抑制される。符号のずれがあってもこの極限で誤答を発見できる。

32.8 断熱近似は「時間変化が遅い」だけではない

瞬間固有状態 $H(t)|n(t)\rangle = E_n(t)|n(t)\rangle$ において、 $m \neq n$ の混合は

$$\langle m|\dot{n}\rangle = \frac{\langle m|\dot{H}|n\rangle}{E_n - E_m}.$$

従って十分条件の目安は

$$\hbar \frac{|\langle m|\dot{H}|n\rangle|}{|E_n - E_m|^2} \ll 1.$$

注意：避けられた交差などでエネルギー差が小さくなると、制御変化が遅くても断熱近似が壊れる。積分で現れる幾何学的位相は原題で要求された場合に扱い、話題性だけで基礎問題に混ぜない。

32.9 周期ポテンシャルと Bloch 条件の接続

周期 a のデルタ列 $V(x) = \lambda \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta(x - ja)$ を考える。自由区間を進む行列とデルタの跳びを表す行列の積を M とすると $\det M = 1$ 、Bloch 条件は $\text{Tr } M = 2 \cos(ka)$ 。 $q = \sqrt{2mE}/\hbar$ とすると

$$\cos(ka) = \cos(qa) + \frac{m\lambda}{\hbar^2 q} \sin(qa).$$

右辺の絶対値が 1 以下であるエネルギーだけが許容帯。**境界の典型**：伝達行列法では波動関数と導関数の接続を混同しない。弱結合のバンド端では、展開する**無次元パラメータ**を明示してから近似する（既存査読補遺の注意を参照）。

32.10 WKB：適用できない点を先に見つける

$\psi \sim A(x)e^{iS(x)/\hbar}$ を Schrödinger 方程式へ入れ、主次数で $S'^2 = 2m(E-V) = p(x)^2$ 。次の次数で $A \propto |p|^{-1/2}$ 。従って

$$\psi(x) \approx \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \int^x p(x') dx'\right)$$

が許容領域の形。禁制領域では指数減衰となり、障壁透過は $T \sim \exp\left[-2\hbar^{-1} \int_{x_1}^{x_2} |p| dx\right]$ 。 $p(x_i) = 0$ の転回点ではこの近似は発散するので接続公式が必要である。**検算**：指数は無次元、禁制領域の透過は 1 を超えない。

33 統計力学：状態計数から熱力学量を導く

33.1 何が固定されているかで分配関数が変わる

熱浴と接する系で温度 T と体積 V 、粒子数 N が固定なら $Z = \sum_s e^{-\beta E_s}$ 、 $F = -k_B T \log Z$ を用いる。粒子数も変わるなら

$$\Xi = \sum_{N,s} e^{-\beta(E_{N,s} - \mu N)}, \quad \Omega = -k_B T \log \Xi.$$

仕事の符号をエネルギーの定義から決める。 内部エネルギーの微分を $dE = TdS - XdL$ と定義したなら、固定した T, X に対する Legendre 変換は $G = E - TS + XL$ ($dG = -SdT + LdX$) である。したがって、この E に共役項を付けて用いる重みは $e^{-\beta(E+XL)}$ であり、 $E - XL$ を混ぜてはいけない。一方、裸の Hamiltonian H_0 に、系を伸ばす外力 f が $-fL$ と結合する模型では $H_f = H_0 - fL$ なので、 $Z_f = \text{Tr} e^{-\beta(H_0 - fL)}$ を用いる。この模型の裸の自由エネルギーは $dF_0 = -SdT + f dL$ (平衡枝) であり、固定 f の自由エネルギーは $F_0 - fL$ 。**実戦**：「 E は外力項を含むか」「 X はどちら向きを正とするか」を先に宣言してから重みを選ぶ。

33.2 分配関数の微分は「揺らぎ」を自動的に与える

$Z(\beta, h) = \sum_s \exp[-\beta E_s + \beta h M_s]$ とする。 h と β を独立な変数として取り扱うと

$$\frac{\partial \log Z}{\partial (\beta h)} = \langle M \rangle, \quad \frac{\partial^2 \log Z}{\partial (\beta h)^2} = \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2.$$

従って温度固定の感受率は、**古典模型または $[H_0, M] = 0$ の量子模型に限り** $\chi = \partial_h \langle M \rangle = \beta \text{Var}(M)$ 。非可換量子系の一般公式は ($h = 0$ において)

$$\chi = \int_0^\beta d\tau [\langle M(-i\hbar\tau)M(0) \rangle_0 - \langle M \rangle_0^2], \quad M(-i\hbar\tau) = e^{\tau H_0} M e^{-\tau H_0}.$$

例えば $H_0 = \Delta \sigma_z / 2$ 、 $M = \sigma_x$ の二準位系では $\chi = (2/\Delta) \tanh(\beta \Delta / 2)$ だが $\beta \text{Var}(M) = \beta$ で一般には異なる。**誤り防止**： ∂_h と $\partial_{\beta h}$ は β が 1 個異なり、さらに量子系では $[H_0, M]$ の可換性を必ず確認する。

33.3 2 状態分子：伸長と揺らぎを同時に計算する

長さが $\pm a$ の 2 状態 $s = \pm 1$ を持つ独立な分子 N 個を、引張力 X の下に置く。1 分子のエネルギーを $E_s = -Xas$ とすると

$$z = 2 \cosh(\beta Xa), \quad Z = z^N, \quad \langle L \rangle = Na \tanh(\beta Xa).$$

二回微分で

$$\text{Var}(L) = Na^2 \text{sech}^2(\beta Xa), \quad \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial X} = \beta \text{Var}(L).$$

物理像： $X \rightarrow 0$ で平均長さ 0 だが長さ揺らぎは Na^2 。 $|X| \rightarrow \infty$ では配向がそろって揺らぎが減る。一次元ランダムウォークとの対応は $\sqrt{N}$ のゆらぎの大きさにある。

33.4 状態密度：分散関係と次元を一緒に変える

d 次元で等方分散 $\varepsilon = c_s k^s$ ($c_s > 0$)、内部縮退度 g をもつ系では、 d 次元球の単位球面積 $S_{d-1} = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ を用い、

$$D(\varepsilon) = \frac{gV_d S_{d-1}}{(2\pi)^d s c_s^{d/s}} \varepsilon^{d/s-1}$$

となる。ここで c_s は分散係数、 V_d は d 次元の空間体積であり別の量である。導出：状態数 $dN = gV_d (2\pi)^{-d} S_{d-1} k^{d-1} dk$ に $dk/d\varepsilon = (s c_s k^{s-1})^{-1}$ を代入する。**例：**2 次元自由電子では $d = s = 2$ 、 $c_2 = \hbar^2/(2m)$ なので状態密度は定数 $D = gAm/(2\pi\hbar^2)$ (A は系の面積)。Dirac 型の線形分散では $s = 1$ なので $D \propto \varepsilon$ になる。

33.5 Bose 凝縮を状態密度から一気に導く

3 次元自由 Bose 気体で $\varepsilon = \hbar^2 k^2/(2m)$ 、熱的波長 $\lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar^2/(mk_B T)}$ 。励起粒子数は

$$N_{\text{ex}} = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z), \quad g_\nu(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell^\nu}, \quad z = e^{\beta\mu} \leq 1.$$

臨界点で $z \rightarrow 1$ とすると

$$k_B T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left[\frac{n}{\zeta(3/2)} \right]^{2/3}, \quad \frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (T < T_c).$$

適用条件：熱力学極限、理想気体、3 次元一様系である。調和トラップでは状態密度が ε^2 に変わり、凝縮率の指数は 3 になる。

33.6 トラップ中の Bose 気体：体積 V を代入しない

三次元等方調和ポテンシャル $V(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2/2$ を考える。高い励起準位の状態数は半古典的に $g(\varepsilon) = \varepsilon^2/[2(\hbar\omega)^3]$ 。これを Bose 分布に積分すると

$$N_{\text{ex}} = \zeta(3) \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3, \quad k_B T_c = \hbar\omega \left[\frac{N}{\zeta(3)} \right]^{1/3}.$$

検算： ω が小さくなるほど閉じ込めが弱くなり、 T_c も小さくなる。トラップの異方性がある場合は ω^3 を $\omega_x\omega_y\omega_z$ に置き換える。**注意：** 連続近似には $k_B T \gg \hbar\omega_i$ の範囲が必要。

33.7 Fermi 気体：Sommerfeld 展開は状態密度を評価する手順

低温でなめらかな関数 Φ について

$$\int_0^\infty \Phi(\varepsilon) f_F(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\mu \Phi(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \Phi'(\mu) + O(T^4).$$

粒子数固定なら先に $N = \int D f_F$ を使い $\mu(T)$ の補正を解き、次に $U = \int \varepsilon D f_F$ を求める。**例題：** 2次元の定数状態密度 D では $\mu(T) - E_F$ は代数的な T^2 項を持たず指数的小、

$$U(T) - U(0) = \frac{\pi^2}{6} D (k_B T)^2 + \text{指数的小項}, \quad C_V = \frac{\pi^2}{3} D k_B^2 T + \dots$$

D が全系か単位面積当たりかを明記する。

33.8 転送行列で 1 次元 Ising 模型を解く

$s_i = \pm 1$ 、周期境界、 $H = -J \sum_i s_i s_{i+1} - h \sum_i s_i$ とする。 $K = \beta J$ 、 $H_0 = \beta h$ を置き

$$T_{ss'} = \exp \left[K s s' + \frac{H_0}{2} (s + s') \right], \quad Z_N = \text{Tr } T^N.$$

固有値は

$$\lambda_{\pm} = e^K \cosh H_0 \pm \sqrt{e^{2K} \sinh^2 H_0 + e^{-2K}}.$$

熱力学極限では自由エネルギー/スピン $f = -k_B T \log \lambda_+$ 。ゼロ磁場で $\lambda_+ = 2 \cosh K$ 、 $\langle s_i s_{i+r} \rangle = (\tanh K)^r$ 、磁化率/スピンは $\chi = \beta e^{2K}$ 。**注意：** $J < 0$ の反強磁性では相関が距離ごとに符号を変える。外場や次近接相互作用が入ると、秩序相に常磁性相の式をそのまま延長できない。

33.9 Landau 展開は偶数次の安定性から始まる

秩序変数 m に対する有効自由エネルギーが $m \mapsto -m$ 対称なら、 $f(m) = f_0 + (a/2)(T - T_c)m^2 + (b/4)m^4 - hm$ 、 $a, b > 0$ とおける。 $h = 0$ の極値条件は

$$\frac{\partial f}{\partial m} = a(T - T_c)m + bm^3 = 0.$$

$T > T_c$ は $m = 0$ 、 $T < T_c$ は $m = \pm \sqrt{a(T_c - T)/b}$ が安定。感受率は $\chi^{-1} = \partial_m^2 f$ を極小点で評価し、 $T > T_c$ では $\chi = 1/[a(T - T_c)]$ 、 $T < T_c$ では $\chi = 1/[2a(T_c - T)]$ 。高温側と低温側の係数 2 の違いは頻出の検算点。

34 電磁気学・古典力学：境界と保存則から解く

34.1 静電場の境界条件は小さな箱から出す

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ 、 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ から、界面をまたぐ薄い小箱と微小長方形を用いて

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0.$$

導体表面が静電平衡にあれば接線電場はゼロ。誘電率の違う界面では法線 D が連続でも法線 E は一般に不連続。**典型**：「誘電体」「静電界面」と見たらまず連続なのが E か D かを分ける。

34.2 鏡像電荷法：電位の境界条件を検査する

無限接地導体平面 $z = 0$ の上方 $z = d$ に点電荷 q 。 $z > 0$ の電位は下側 $z = -d$ に仮想的な $-q$ を置くことで

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - d\hat{z}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + d\hat{z}|} \right], \quad z > 0.$$

$z = 0$ で $\phi = 0$ となり、無限遠で消える。実電荷が導体から受ける力は

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon d^2} \hat{z},$$

位置エネルギーは $U(d) = -q^2/(16\pi\epsilon d)$ 。**係数の注意**：電荷対の Coulomb エネルギーをそのまま U にすると係数 2 を誤る。像電荷の配置も d に依存し、導体を形成する仕事を含むからである。

34.3 電磁ポテンシャルのゲージと Lagrangian

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}$ 。変換 $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla\chi$ 、 $\phi \mapsto \phi - \partial_t \chi$ は $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ を変えない。荷電粒子の

$$L = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - q\phi$$

は $L \mapsto L + qd\chi/dt$ 、すなわち全時間微分しか変わらない。従って作用の端点固定変分は不変。Euler-Lagrange 方程式から $m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$ を再導出できる。**問題を読む目印**：ゲージ変換、電磁場中の正準運動量、保存量。

34.4 電磁波：時間因子を宣言してから複素波数を解く

一様な線形媒質で時間因子 $e^{-i\omega t}$ 、 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ とする。Maxwell 方程式より

$$\nabla^2 \mathbf{E} + (\mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega) \mathbf{E} = 0, \quad k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega.$$

良導体 $\sigma \gg \epsilon\omega$ では $k \simeq (1+i)\sqrt{\mu\sigma\omega/2}$ 。従って $E(z, t) \propto e^{-z/\delta} \cos(\text{Re } k z - \omega t)$ となり

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}.$$

検算： δ は長さ次元。周波数・導電率が大きいほど侵入深さは小さくなる。符号は $e^{+i\omega t}$ の規約では逆になる。

34.5 反射と透過：まず接線の E と H を連続にする

非磁性・無損失媒質の屈折率を n_1, n_2 とし、 $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ 。電場の接線成分の振幅比として反射係数を定義すると、TE (s 偏光) では

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}.$$

TM (p 偏光) の接線電場振幅比は

$$r_p^{(||)} = \frac{n_1/\cos\theta_i - n_2/\cos\theta_t}{n_1/\cos\theta_i + n_2/\cos\theta_t}.$$

TM の総電場振幅を基準にした書物では見かけ上の符号が異なることがある。定義を見ずに公式だけ移植してはいけない。法線入射でどちらも $(n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ 。電力は強度と法線方向余弦を含めて比較し、無損失の場合は $R + T = 1$ 。

34.6 矩形導波管：遮断周波数が先に決まる

完全導体で囲まれた $0 < x < a$ 、 $0 < y < b$ の真空導波管を考える。進行方向 z には $e^{i\beta z}$ 、横方向は境界条件に合う正弦・余弦で分離すると

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad \omega_{c,mn} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

TE では m, n は同時には 0 でない。TM では $m, n \geq 1$ 。例題： $a = 2b$ なら TE_{10} 、 TE_{01} 、 TM_{11} のカットオフ比は $1:2:\sqrt{5}$ 。 $\omega < \omega_c$ では β は虚数であり、進行モードではなく減衰モードとなる。

34.7 Lorentz 力で磁場が仕事をしないことを確認する

$m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ の両辺と $\mathbf{v}$ の内積を取ると

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}.$$

従って磁場の役割は速度の方向を変えること。 $\mathbf{E} = 0$ 、一様な $\mathbf{B} = B\hat{z}$ では $\omega_c = |q|B/m$ で円運動。垂直に一様電場があれば平均ドリフト速度 $\mathbf{v}_D = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ 。これは電荷の符号に依らない。注意：非一様場・時間依存場では追加のドリフトや誘導電場があり、この公式だけでは足りない。

34.8 連成振動：運動方程式を一般化固有値問題にする

$M\ddot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = 0$ 、 $M = M^T > 0$ 、 $K = K^T$ とする。 $\mathbf{q} = \mathbf{a}e^{i\omega t}$ を代入し

$$(K - \omega^2 M)\mathbf{a} = 0, \quad \det(K - \omega^2 M) = 0.$$

質量行列に関する内積で正規モードを直交規格化する。例として等質量 m の 2 点を固定壁と 3 本の同じばね k で結ぶと $M = mI$ 、 $K = k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 。モード $(1, 1)$ は $\omega_+ = \sqrt{k/m}$ 、 $(1, -1)$ は $\omega_- = \sqrt{3k/m}$ 。検算：逆位相の方が中央ばねが強く伸びるため高振動数。

34.9 中心力運動と散乱：有効ポテンシャル

重心系の換算質量 $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ を用い、中心力 $V(r)$ で角運動量 $L = \mu r^2 \dot{\phi}$ を保存させると

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r).$$

散乱では無限遠の相対速度 v 、衝突径数 b に対して $L = \mu v b$ 。最近接距離 $r_{\min}$ は $E = V_{\text{eff}}(r_{\min})$ 。散乱角は

$$\Theta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{L dr}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{\text{eff}}(r))}}.$$

積分前に $\dot{r}$ をエネルギーから解けば、複雑な 2 階微分方程式を直接積分する必要はない。**注意**：引力・斥力で符号や偏向の向きが変わり得る。

34.10 特殊相対論：固有加速度を積分する

一方向の運動で速度を $v = c \tanh \eta$ と表すと、 η をラピディティという。一定の固有加速度 α なら

$$\eta(\tau) = \frac{\alpha \tau}{c}, \quad t(\tau) = \frac{c}{\alpha} \sinh \frac{\alpha \tau}{c}, \quad x(\tau) = \frac{c^2}{\alpha} \left(\cosh \frac{\alpha \tau}{c} - 1 \right).$$

微小固有時は $d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。不変なのはこの積であり、 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 単独ではない。**検算**： $\alpha \tau / c \ll 1$ で $x \simeq \alpha \tau^2 / 2$ 、 $t \simeq \tau$ 、Newton 極限に戻る。

34.11 回転系：有効ポテンシャルと Jacobi 積分

一定角速度 Ω で回転する座標系における運動は

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\text{rot}} = -\nabla \Phi - 2\Omega \times \dot{\mathbf{r}}_{\text{rot}} - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}).$$

遠心力の寄与を $\Phi_{\text{eff}} = \Phi - \frac{1}{2} |\Omega \times \mathbf{r}|^2$ に吸収できるため、コリオリ力が速度に垂直で仕事をしないことから

$$\frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}_{\text{rot}}|^2 + \Phi_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \text{一定}$$

が得られる（質量 1 当たり、時間に依存しないポテンシャルの場合）。回転系平衡点は $\nabla \Phi_{\text{eff}} = 0$ を解く。

注意：元の慣性系エネルギーと、回転系の Jacobi 型保存量を混同しない。

35 総合例題：途中式を答案へ変える

35.1 総合例題 A：量子系の外力切替えと測定

問題（独自作成）：1 次元調和振動子が基底状態 $|0\rangle$ にある。 $t = 0$ に一様な外力 F を加え、その後ずっと一定に保つ。 $t > 0$ の $\langle x(t) \rangle$ と、 $t = 0$ 直後に新しいハミルトニアン基底状態を測定する確率を求めよ。

解法：新ハミルトニアンは $H = p^2/(2m) + m\omega^2 x^2/2 - Fx$ 。Heisenberg 方程式 $\ddot{x} + \omega^2 x = F/m$ と初期条件 $\langle x(0) \rangle = \langle p(0) \rangle = 0$ から

$$\langle x(t) \rangle = \frac{F}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

新しいポテンシャルの中心は $x_0 = F/(m\omega^2)$ 。新旧基底の重なりは Gaussian の積分または変位演算子によって $|\langle 0_F | 0 \rangle|^2 = \exp[-m\omega x_0^2/(2\hbar)]$ 。**検算**： $F = 0$ なら期待値 0、確率 1。力を急に変えたため、新ハミルトニアンの基底状態に必ずしもいない。

35.2 総合例題 B：統計系の張力と比熱

問題（独自作成）：独立な N 個の要素がそれぞれ長さ $\pm a$ を持ち、外力 X が長さを増やす方向に働く。平均長さ、長さの分散、温度固定の力応答を求めよ。

解法：1 要素のエネルギーは $E_s = -Xas$ 、従って $z = 2 \cosh(\beta Xa)$ 。 $\langle L \rangle = \beta^{-1} \partial_X \log Z$ から

$$\langle L \rangle = Na \tanh(\beta Xa), \quad \langle (\Delta L)^2 \rangle = Na^2 \operatorname{sech}^2(\beta Xa).$$

力応答は $\partial_X \langle L \rangle = \beta Na^2 \operatorname{sech}^2(\beta Xa)$ 。 $X = 0$ で分散最大、 $X \rightarrow \infty$ で分散 0。 **注意：**張力を使う分配関数では仕事の符号を第一法則と合わせる。

35.3 総合例題 C：電磁波の境界とエネルギー

問題（独自作成）：屈折率 n_1, n_2 の非磁性・無損失な媒質の平坦な界面へ、TE 平面波が角度 θ_i で入射する。反射電場振幅係数とエネルギー反射率を求めよ。

解法：境界で $E_{i,t} + E_{r,t} = E_{t,t}$ 、 H の接線成分も連続。TE では媒質中のアドミタンスが $(n/Z_0) \cos \theta$ に比例する。 $Y_j = (n_j/Z_0) \cos \theta_j$ と置き、

$$1 + r = t, \quad Y_1(1 - r) = Y_2 t$$

を解けば $r = (Y_1 - Y_2)/(Y_1 + Y_2)$ 。エネルギー反射率は $R = |r|^2$ 、透過率は $T = (Y_2/Y_1)|t|^2$ であり $R + T = 1$ 。
検算： $n_1 = n_2$ なら $r = 0$ 、 $R = 0$ 。電場振幅の比 $|t|^2$ をそのまま電力透過率と思わない。

35.4 総合例題 D：数学の Green 関数と減衰振動

問題（独自作成）： $m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t)$ 、 $\omega_0 > \gamma > 0$ の因果的 Green 関数を求めよ。

解法： $m(G'' + 2\gamma G' + \omega_0^2 G) = \delta(t)$ 、 $G(t < 0) = 0$ とする。 $t > 0$ では同次解、 $t = 0$ で G 連続、微分の跳びは $m[G'(0^+) - G'(0^-)] = 1$ 。 $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ とすると

$$G(t) = \Theta(t) \frac{e^{-\gamma t} \sin(\omega_d t)}{m\omega_d}, \quad x(t) = x_{\text{hom}}(t) + \int_{-\infty}^t G(t-s)F(s)ds.$$

検算： $G(0^+) = 0$ 、 $mG'(0^+) = 1$ 、 $\gamma \rightarrow 0$ で無減衰振動の応答。

36 理解度確認：16 問と詳しい解答

問題

1. $\lambda\delta(x)$ の跳び条件を、 ψ' と ψ で書け。
2. 井戸型ポテンシャルの偶関数と奇関数を別々に扱う利点を述べよ。
3. $[a, a^\dagger] = 1$ を使い、 $\langle 0|x^2|0 \rangle$ を求めよ。
4. $H = \hbar\Omega\sigma_x/2$ で初期状態 $|\uparrow_z\rangle$ の遷移確率を求めよ。
5. 1 次の時間依存摂動論で $V_{fi} = 0$ のとき、遷移確率の計算で次に調べるべき項は何か。

6. 2次元の自由電子の状態密度が定数である理由を説明せよ。
7. 3次元一様 Bose 気体の凝縮率が $1 - (T/T_c)^{3/2}$ になる理由を説明せよ。
8. 2状態鎖で力を増すと、長さの分散がどう変化するか。
9. 1次元 Ising 模型で $h = 0$ の最大固有値を求めよ。
10. $\mathbf{E}$ に直交する $\mathbf{B}$ 中のローレンツ力がする仕事率は何か。
11. 接地平面と点電荷の相互作用エネルギーを求めよ。
12. 導波管の TE_{10} と TM_{10} のどちらが可能か。
13. 真空中の電磁波で $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ を Maxwell 方程式から示せ。
14. $A = \lambda I + N$ 、 $N^2 = 0$ の行列指数 e^{tA} を求めよ。
15. $u_t + uu_x = 0$ の特性曲線が交差する条件を述べよ。
16. $u(x) = e^{-\mu|x|}/(2\mu)$ に $-d_x^2 + \mu^2$ を作用させると何になるか。

解答と確認理由

1. $\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = 2m\lambda\psi(0)/\hbar^2$ 。Schrödinger 方程式を薄い区間で積分する。
2. パリティ保存により領域を半分にでき、境界連立の未知係数が減る。固有値の偶奇ラベルも得られる。
3. $x = x_*(a + a^\dagger)$ 、 $a|0\rangle = 0$ より $\langle x^2 \rangle = x_*^2 = \hbar/(2m\omega)$ 。
4. $U = \cos(\Omega t/2)I - i\sin(\Omega t/2)\sigma_x$ 、従って $P_{\uparrow\rightarrow\downarrow} = \sin^2(\Omega t/2)$ 。
5. 二次 Dyson 項と中間状態。対称性が遷移を全次数で禁止している可能性も先に確認する。
6. $d = 2, s = 2$ なので $D(\varepsilon) \propto \varepsilon^{d/s-1} = \varepsilon^0$ 。
7. $D(\varepsilon) \propto \sqrt{\varepsilon}$ と Bose 分布から $N_{\text{ex}} \propto T^{3/2}$ 、 T_c 以下では余剰粒子が基底状態に入る。
8. $\text{Var}(L) = Na^2 \text{sech}^2(\beta Xa)$ 。 $|X|$ が大きくなると 0 に近づく。
9. $\lambda_+ = e^K + e^{-K} = 2 \cosh K$ 。 $K = \beta J$ 。
10. $q\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ 。電場があると $q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ が仕事率になる。
11. $U = -q^2/(16\pi\epsilon d)$ 。像電荷と実電荷の距離が $2d$ であることと形成仕事の係数を区別する。
12. TE_{10} は可能、 TM_{10} は不可能。TM では横方向両成分の節条件から $m, n \geq 1$ 。
13. 電荷・電流のない真空中で $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 。平面波 $\mathbf{E} \propto e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ なら $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ 。
14. $e^{tA} = e^{\lambda t}(I + tN)$ 。 $N^2 = 0$ で冪級数が打ち切られる。
15. 初期位置 ξ の写像 $x = \xi + tu_0(\xi)$ に対し $1 + tu'_0(\xi) = 0$ となると交差・勾配発散が始まる。
16. 分布の意味で $\delta(x)$ 。原点以外では 0、導関数の跳びがデルタを作る。

注意

本章の限界：ここで示したのは入試解法への理解を補うための独立作成例であり、過去 25 年度の全小問の解答検証ではない。標準公式にも時間因子・符号・単位・ensemble の規約差がある。必ず原題の設定から使える形へ直してから適用すること。

37 白紙演習：計算を省略せず、根拠を一つずつ書く

使い方：以下では「出発式 → 途中計算 → 結果 → 検算」を省略しない。最初は解答を隠し、5 分ほどで式を再現する。ここでの問題設定は過去問の原題そのものではなく、頻出の構造だけを組み合わせた独自演習である。

37.1 演習 1：2 準位模型を厳密に解いて摂動論を検算する

問題： $H = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & \Delta \end{pmatrix}$ 、 $\Delta > 0$ 、 $\epsilon \in \mathbb{R}$ の固有値を厳密に求め、 $|\epsilon| \ll \Delta$ で基底状態のエネルギーを二次まで展開せよ。

解答：特性方程式は $\det(H - EI) = E(E - \Delta) - \epsilon^2 = 0$ 。よって $E_{\pm} = (\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 4\epsilon^2})/2$ 。平方根を

$$\sqrt{\Delta^2 + 4\epsilon^2} = \Delta \sqrt{1 + 4\epsilon^2/\Delta^2} = \Delta (1 + 2\epsilon^2/\Delta^2 + O(\epsilon^4/\Delta^4))$$

と展開すると $E_- = -\epsilon^2/\Delta + O(\epsilon^4/\Delta^3)$ 。一方、 $H_0 = \text{diag}(0, \Delta)$ 、 $V = \epsilon\sigma_x$ に対する摂動論は、基底状態への一次補正 0、二次補正 $|\epsilon|^2/(0 - \Delta) = -\epsilon^2/\Delta$ で一致する。**検算：**基底エネルギーは相互作用を入れると下がる。

37.2 演習 2：四次摂動の二次補正を全中間状態で求める

問題： $H = H_0 + \lambda x^4$ の基底状態エネルギーを λ^2 まで求めよ。 H_0 は角振動数 ω の調和振動子とする。

解答： $x = x_*(a + a^\dagger)$ 、 $x_* = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}$ 。まず $x^2|0\rangle = x_*^2(|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle)$ 。さらに

$$x^4|0\rangle = x_*^4(3|0\rangle + 6\sqrt{2}|2\rangle + 2\sqrt{6}|4\rangle)。$$

従って

$$E_0^{(1)} = 3\lambda x_*^4, \quad E_0^{(2)} = \lambda^2 x_*^8 \left(\frac{72}{-2\hbar\omega} + \frac{24}{-4\hbar\omega} \right) = -\frac{42\lambda^2 x_*^8}{\hbar\omega}。$$

最終的に

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} + 3\lambda x_*^4 - \frac{42\lambda^2 x_*^8}{\hbar\omega} + O(\lambda^3)。$$

成立条件： $\lambda > 0$ かつ $\lambda x_*^4 \ll \hbar\omega$ の安定な弱結合領域。 $\lambda < 0$ では $V(x) \sim \lambda x^4 \rightarrow -\infty$ となるため、上の形式的摂動係数を真の基底状態エネルギーの展開とは解釈できない。 x^4 は $\Delta n = 0, \pm 2, \pm 4$ を結ぶが、 $|0\rangle$ からは $|2\rangle, |4\rangle$ だけが中間状態として現れる。

37.3 演習 3：箱の境界条件からエネルギー量子化へ

問題： $0 < x < L$ の無限深井戸の規格化固有状態と期待運動エネルギーを求めよ。

解答：内側では $\psi'' + k^2\psi = 0$ 。 $\psi(0) = 0$ から $\psi = A \sin kx$ 、 $\psi(L) = 0$ から $k_n = n\pi/L$ 、 $n \geq 1$ 。規格化から $A = \sqrt{2/L}$ 。エネルギーは

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}。$$

$V = 0$ が井戸内で成り立つので $\langle T \rangle = E_n$ 。波動関数を領域外に 0 で延長すると壁で導関数が跳ぶが、有限障壁の極限として理解する。**検算**： L が倍になるとエネルギーは 4 分の 1。

37.4 演習 4：2 次元電子気体の Fermi 波数と低温比熱

問題：2 次元の面積 A にスピン縮退度 g の自由 Fermi 粒子が N 個ある。 $T = 0$ の k_F と E_F 、低温の C_V の先頭項を求めよ。

解答： k 空間の半径 k_F の円内の状態数は

$$N = g \frac{A}{(2\pi)^2} \pi k_F^2, \quad k_F^2 = \frac{4\pi N}{gA}, \quad E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}.$$

状態密度は $D = gAm/(2\pi\hbar^2)$ 。Sommerfeld 展開から

$$C_V = \frac{\pi^2}{3} D k_B^2 T = \frac{\pi g A m}{6\hbar^2} k_B^2 T + \text{より高次の寄与}.$$

注意：この 2 次元一定状態密度の理想モデルでは、固定密度での化学ポテンシャルの低温補正は T^2 でなく指数的小。 C_V は系全体の熱容量なので面積 A を含む。

37.5 演習 5：フォノンの比熱が T^3 になる過程

問題：三次元で音速 v の線形分散 $\omega = vk$ を持つ音響モードの低温内部エネルギーの温度依存性を求めよ。偏極数は g_p とする。

解答： k 空間の球殻から単位体積当たりの状態密度は

$$\frac{D(\omega)}{V} = \frac{g_p \omega^2}{2\pi^2 v^3}.$$

熱励起のエネルギー密度は

$$\frac{U - U_0}{V} = \frac{g_p \hbar}{2\pi^2 v^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \frac{g_p \pi^2}{30} \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3 v^3},$$

$\int_0^\infty x^3/(e^x - 1) dx = \pi^4/15$ を用いた。従って

$$\frac{C_V}{V} = \frac{2g_p \pi^2}{15} \frac{k_B^4 T^3}{\hbar^3 v^3}.$$

成立条件：温度が Debye 温度より十分低く、分散を長波長で線形とみなせる。温度に依らない零点エネルギー U_0 は比熱に寄与しない。

37.6 演習 6：Ising 模型の相関長を求める

問題：一次元最近接 Ising 模型、外場ゼロ、 $J > 0$ の連結相関の減衰長を求めよ。

解答：転送行列の固有値は $\lambda_+ = 2 \cosh K$ と $\lambda_- = 2 \sinh K$ 、 $K = \beta J$ 。無限系では

$$\langle s_i s_{i+r} \rangle = (\lambda_- / \lambda_+)^r = (\tanh K)^r.$$

格子間隔を a とすると $\exp(-ra/\xi)$ と比較して

$$\xi = -\frac{a}{\log \tanh K}.$$

$T \rightarrow 0$ で $\tanh K \rightarrow 1$ 、相関長は発散するが、有限温度で真の長距離秩序が存在することは意味しない。**検算**： $T \rightarrow \infty$ では $K \rightarrow 0$ 、 $\xi \rightarrow 0$ 。

37.7 演習 7：Dirichlet 境界を満たす Green 関数

問題： $-u''(x) = f(x)$ 、 $0 < x < L$ 、 $u(0) = u(L) = 0$ に対する Green 関数を求めよ。

解答： $x \neq s$ で $G'' = 0$ 、境界により $x < s$ では $G = A(s)x$ 、 $x > s$ では $G = B(s)(L - x)$ 。 $x = s$ の連続性と $G'(s^+) - G'(s^-) = -1$ から

$$G(x, s) = \frac{1}{L} \begin{cases} x(L - s), & x \leq s, \\ s(L - x), & x \geq s. \end{cases}$$

従って $u(x) = \int_0^L G(x, s)f(s)ds$ 。例えば $f = 1$ なら積分から $u(x) = x(L - x)/2$ 。これは $-u'' = 1$ と両境界条件を満たす。**検算**： $G(x, s) = G(s, x)$ は作用素の自己共役性に対応する。

37.8 演習 8：境界で電場と電束密度の何が連続か

問題：自由表面電荷のない平坦な誘電体界面で、誘電率は $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 、法線の電場は E_{1n} とする。 E_{2n} を求めよ。

解答：界面をまたぐ小さい Gauss 箱をとると $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0$ 。 $\mathbf{D}_i = \varepsilon_i \mathbf{E}_i$ なので

$$E_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n}.$$

E_n 自体が連続するとは限らない。静電場では接線 E が連続し、表面電荷が存在すると法線 D が σ_f だけ跳ぶ。**注意**：導体の内部の静電場 0 という条件を誘電体内部へ誤適用しない。

37.9 演習 9：平面電磁波の Poynting 流束

問題：真空中の平面波 $\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x}$ の磁場と時間平均 Poynting 流束を求めよ。

解答：進行方向は $+\hat{z}$ 、 $\mathbf{B} = (1/c)\hat{z} \times \mathbf{E} = (E_0/c)\cos(kz - \omega t)\hat{y}$ 。従って

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(kz - \omega t)\hat{z}.$$

一周期の平均で $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$ より $\langle \mathbf{S} \rangle = (\varepsilon_0 c E_0^2 / 2)\hat{z}$ 。**検算**： $\varepsilon_0 c = 1/(\mu_0 c)$ 、SI 次元は W/m^2 。

37.10 演習 10：二自由度の固有モードの初期値問題

問題： $m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2$ 、 $m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2$ 。初期値は $x_1(0) = A$ 、 $x_2(0) = 0$ 、初速度ゼロ。運動を求めよ。

解答： $q_+ = (x_1 + x_2)/2$ 、 $q_- = (x_1 - x_2)/2$ と置けば

$$\ddot{q}_+ + \frac{k}{m}q_+ = 0, \quad \ddot{q}_- + \frac{3k}{m}q_- = 0.$$

初期条件 $q_+(0) = q_-(0) = A/2$ から

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{A}{2} [\cos(\sqrt{k/mt}) + \cos(\sqrt{3k/mt})], \\ x_2(t) &= \frac{A}{2} [\cos(\sqrt{k/mt}) - \cos(\sqrt{3k/mt})]. \end{aligned}$$

検算： $t = 0$ で $(A, 0)$ 、初速度 0。時間が進むともう一方の質点にもエネルギーが伝わる。

37.11 演習 11：一様電磁場の不変量

問題：慣性系 S で $\mathbf{E} = E\hat{x}$ 、 $\mathbf{B} = B\hat{y}$ 。電磁場の Lorentz 不変量 2 つを計算せよ。

解答：電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ のスカラー不変量に対応するのは

$$I_1 = E^2 - c^2 B^2, \quad I_2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}.$$

この設定では $I_1 = E^2 - c^2 B^2$ 、 $I_2 = 0$ 。場を Lorentz 変換した後も同じ値になる。特に $E = cB$ では両不変量が 0 で、真空中の平面波の特徴と一致する。注意： E と B の大きさ自体は Lorentz 不変ではない。

37.12 演習 12：安定な円軌道の判定

問題：質量 m 、角運動量 L の粒子が中心力ポテンシャル $V(r) = -\kappa/r$ 、 $\kappa > 0$ 中を運動する。円軌道の半径と安定性を求めよ。

解答：有効ポテンシャル

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\kappa}{r}.$$

$V'_{\text{eff}}(r) = -L^2/(mr^3) + \kappa/r^2 = 0$ から $r_0 = L^2/(m\kappa)$ 。二階導関数は $V''_{\text{eff}} = 3L^2/(mr^4) - 2\kappa/r^3$ 。 $L^2/(mr_0) = \kappa$ を代入すると

$$V''_{\text{eff}}(r_0) = \frac{\kappa}{r_0^3} > 0,$$

ゆえに微小な動径変位に対して安定。検算： r_0 の次元は長さ。

37.13 演習 13：Gauss 積分の正規化を検査する

問題： $f(x) = Ae^{-ax^2}$ 、 $a > 0$ を確率密度として規格化し、分散を求めよ。

解答： $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$ より $A = \sqrt{a/\pi}$ 。平均 0。積分のパラメータ a で微分して

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{d}{da} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}.$$

従って $\langle x^2 \rangle = 1/(2a)$ 。検算： $[a] = L^{-2}$ なら分散は L^2 。規格化をせずにモーメントだけ評価すると係数を落とす。

37.14 演習 14：留数から振動積分を計算する

問題： $a > 0$ に対し $I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}$ を求めよ。

解答：複素平面上半分の半円で閉じると、内部の単純極は $z = ia$ で留数 $1/(2ia)$ 。大半円上の積分は $R \rightarrow \infty$ で 0 なので

$$I(a) = 2\pi i \frac{1}{2ia} = \frac{\pi}{a}.$$

検算：偶関数で正、 a の次元が逆数として現れる。極が積分路上にある場合は主値や半円回避の条件を別途指定する。

37.15 演習 15：逆行列がないときの固有値問題

問題： $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値・固有空間の次元と e^{tA} を求めよ。

解答： $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2$ より固有値 1 の代数的重複度は 2。一方 $(A - I)v = 0$ は $v_2 = 0$ のみなので幾何学的重複度は 1。 $A = I + N$ 、 $N^2 = 0$ から

$$e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

検算：固有値が 2 重でも常に対角化できるわけではない。

37.16 演習 16：弱結合を無次元の比で書き直す

問題： $H = p^2/(2m) + m\omega^2 x^2/2 + \lambda x^4$ において、 λ の小ささをどう測るべきか。

解答：基底状態の典型的な長さ $x_* = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}$ を使い、摂動ポテンシャルの典型的な大きさは λx_*^4 。非摂動スペクトルの準位間隔は $\hbar\omega$ 。ゆえに

$$\eta = \frac{|\lambda| x_*^4}{\hbar\omega} = \frac{|\lambda| \hbar}{4m^2\omega^3} \ll 1$$

が使いやすい条件。**注意：** λ はエネルギー/長さ⁴の次元を持つので、 $\lambda \ll 1$ だけでは物理的な意味がない。

この章の終わりに

学習上の順序：最初の一週は演習 1・4・7・9・10 を解き、次に他の問題に進む。間違えた場合は答えだけを覚えるのではなく、どの行で「定義」「境界条件」「近似条件」を失ったか分類する。過去問演習で同じ誤りが起きたときに素早く修正できる。

38 試験直前の最終チェックリスト

問題の兆候	最初の一手
調和振動子に x, x^2	$x = x_*(a + a^\dagger)$ で選択則を先に判定
定数外力が付く	$x \rightarrow x - x_c$ の平方完成を試す
突然外力・波束移動	Heisenberg 方程式、または coherent state
理想 Bose 気体	状態密度 $D(\epsilon)$ 、 N_0 を別数え
$T > T_c$ で C_V	N 一定から $z(T)$ を陰関数微分
異方的二次分散	楕円体を球へ写す Jacobian
屈折・偏光	接線 E, H 、TE/TM アドミタンス
透過率を問う	振幅ではなく流束比 Y_2/Y_1
薄膜の無反射	往復位相 2ϕ を含む幾何級数
2 階常微分方程式	状態変数を増やして $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$
2×2 行列指数	$B = A + \gamma I$ として $B^2 = \Delta^2 I$
固有値が重複	Jordan 型・最小多項式を確認
デルタ源・外力応答	Green 関数のジャンプ条件と畳み込み
調和外力 $e^{-i\Omega t}$	$\partial_t \rightarrow -i\Omega$ 、符号に注意

最低限の検算 4 点

1. 次元： $[\hbar\omega] = \text{J}$ 、 $[\chi] = \text{s}^2$ 、 $[D(\epsilon)] = \text{J}^{-1}$ 、 $[\kappa] = \text{m}^{-1}$ 。
2. 極限： $F \rightarrow 0$ 、 $\varepsilon \rightarrow 0$ 、 $T \rightarrow T_c^\pm$ 、 $n_2 \rightarrow n_1$ 、 $\gamma \rightarrow \omega_0$ 。
3. 保存則： $R + T = 1$ 、 $\dot{E} \leq 0$ 、 $\rho \geq 0$ かつ $\text{Tr } \rho = 1$ 。
4. 規約：波の複素時間因子、電磁波振幅の定義、Fourier の 2π 、スピン縮退。

到達目標（自力再現）

全 25 年度の代表例について**選択則** → **摂動補正** → **厳密検算**、**状態計数** → **Bose 積分** → T_c と C_V 、**境界条件** → **Fresnel** → **薄膜**、**Cayley–Hamilton** → **行列指数** → **Green 関数**の 4 系列を、問題 PDF を見ずに白紙から導ければ基礎準備として十分に近い。暗記だけでなく適用条件を説明できることが目安。

資料と制作範囲：本書は確認した過去問年度別索引と 191 ページ数学合冊を参考に標準公式を独自編纂した。510 ページ統合原本への全文逐語照合は未実施。

39 年度別の主題照合（索引）

読み方：以下は確認できた出題主題の要約であり、問題文・詳細解法を転載したものではない。テーマの名称は索引表または年度別数学資料の章扉から採った。すべての年に同じ公式が出たことや、2027 年度の出題可能性を示すものではない。

39.1 量子力学と統計力学：25 年度すべて索引確認

年度	量子力学	統計力学
2026	周期デルタ関数とバンドギャップ	高分子鎖と Ising 模型
2025	時間依存摂動と二光子遷移	調和トラップ中の Bose 気体
2024	スクイーズド状態	理想気体と吸着平衡
2023	2 次元調和振動子	Dirac 電子・低温比熱
2022	最小不確定状態	Bose 凝縮と磁場
2020	二準位測定・Bell 型相関	古典理想気体・Fermi 統計
2019	調和振動子と四次摂動	2 方向スピン模型・転送行列
2018	断熱近似	古典理想気体・有限箱 Bose 気体
2017	二粒子振動子と自由波束	反強磁性 Ising 模型
2016	磁束中の電子とゼロモード	連成振動子とフォノンの低温比熱
2015	円周上のデルタ関数ポテンシャル	高分子鎖と揺らぎ・応答
2014	水素原子・Landau 準位・正準変換	2 次元 Fermi 気体・2 バンド
2013	量子調和振動子・コヒーレント状態	3 次元理想 Bose 気体・断熱磁場変化
2012	スピンと磁気共鳴	剛体回転子・オルト／パラ水素
2011	分離型ポテンシャル	三角スピン模型・Brillouin 関数
2010	無限深井戸と中央デルタ障壁	2 状態鎖状分子とエントロピー
2009	スピン 1/2 と量子相関	Fermi・Bose 統計と大分配関数
2008	2 次元等方調和振動子	3 状態分子と揺らぎ・応答
2007	角運動量の量子化	相互作用スピン対の磁化率
2006	無限深井戸と一次摂動論	黒体放射と Planck 分布
2005	有限井戸と共鳴透過	自由電子気体と熱電子放出
2004	量子調和振動子	2 状態鎖状分子・張力・Gibbs 自由エネルギー
2003	井戸の拡張と断熱定理	二元合金・平均場・Landau 展開・相分離
2002	1 次元調和振動子・コヒーレント状態	鎖状高分子・エントロピー弾性と電場
2001	有限井戸の束縛状態・浅い引力井戸	周期 1 次元 Ising 模型・分配関数

39.2 数学 25 年度と電磁気学・力学 25 年度：代表主題を照合

年度	数学（年度別資料 191 ページ）	電磁気学・力学（索引確認状況）
2026	冪零行列・行列指数／特性曲線	荷電質点・磁場・回転する管
2025	Pauli 行列／直交多項式	静電場・Poisson 方程式・鏡像法
2024	Fourier 変換／固有値	Rayleigh 散乱・光ピンセット
2023	留数定理／行列指数	双極子・四重極子・相互作用
2022	複素積分／階数 1 摂動・安定性	電磁波・Fresnel 係数・全反射
2020	移流拡散／巡回行列	同軸ケーブル・TEM モード
2019	Hermite 行列・SU(3)／スペクトル	重力波による連星運動の減衰
2018	最小ノルム解／非線形方程式	電気双極子の放射・干渉
2017	Laplace 変換／回転	二重振り子・固有モード移行
2016	行列漸化式／非線形波動	相対論的ロケット・固有加速度
2015	Cayley-Hamilton／熱核	運動する電荷と Lorentz 変換
2014	常微分方程式／巡回行列	導体の表皮効果・電力反射率
2013	Vandermonde／偏微分方程式	電磁ポテンシャル・ゲージ変換
2012	Pauli 行列／連立 PDE	束縛電子と誘電体分散
2011	反交換行列／Green 関数	磁場中の荷電粒子とドリフト
2010	最急降下法／波動方程式	導電媒質中の電磁波・平行導体
2009	実対称行列／二準位	弾性散乱と 2 体中心力
2008	3 次元回転／Hermite 多項式	矩形導波管の TE/TM モード
2007	回転・Vandermonde／複素解析	回転系と制限 3 体
2006	スペクトル分解／変分法	平面波・Maxwell 方程式
2005	ユニタリ行列／Fokker-Planck	重力散乱・スイングバイ
2004	多項式の線形写像／熱方程式	電場中の電子運動・光
2003	外積・回転／球対称波動	偏心導線と接地円筒
2002	実対称行列／Laplace 方程式	反射・屈折と Fresnel 係数
2001	部分空間／Bessel／減衰振動	一定固有加速度ロケット

39.3 資料範囲・確認上の制約

- 量子力学の年度別索引：2001–2026 年度（2021 除外）、25 件。統計力学の年度別索引：同じく 25 件。
- 数学：2001–2026 年度（2021 除外）、25 年度を、191 ページの降順合冊 PDF の章扉でも確認。
- 電磁気学・力学：2014–2026 年度（2021 除外）の 12 年度を既存索引で確認し、2001–2013 年度の 13 年度は公式原題の代表設問を別途照合した。ただし全小問の逐次査読は未完了。
- 本文はこれらの年度別テーマに必要な**標準公式・解法技能**を独自に編纂したもの。各原題への一対一対応や 100 題すべての解法を保証するものではない。
- 日本語の非公式独習資料。出題予想の正確性や東京大学による保証は主張しない。

39.4 最初に習得する最小セット

解法の順序

量子： $H\psi = E\psi$ 、境界条件、 $a, a^\dagger$ 、1 次・2 次摂動、スピン行列。

統計： Z, Ξ 、分布関数、状態密度、 $\log Z$ の微分、転送行列。

電磁・力学：Maxwell、Poisson、境界条件、Lorentz 力、正規モード。

数学：固有値／Jordan、Fourier・Laplace、留数、Green 関数、PDE。

共通：初期・境界条件／次元／極限／保存則の 4 検算。

参考補遺：旧版の歴史的資料

次ページ以降の17ページは、旧第4～6版を制作した時点の資料です。

当時の進捗記録や「未確認」といった表記は、現在の評価を意味しません。

【現行版との区別】

- ・本編には2001～2026年度（2021年度を除く）の主題索引があります。
- ・電磁気学・力学の2001～2013年度も代表設問の主題を照合しています。
- ・これは、全年度の全小問について正答を独立検証したという意味ではありません。

【読者への注意】

- ・公式と適用条件は本編の校正版を優先してください。
- ・旧版の表紙・進捗・脚注は資料の来歴を示すため原状で保存しました。
- ・本書は東京大学の公式・監修教材ではありません。

解法エッセンス第4版補遺

原題照合・境界条件と相対論の導出

東京大学大学院物理学専攻 非公式対策資料

2026 年 10 月 13 日

1 今回の監査範囲

既存第3版(97ページ)を保持し、2014・2015年度第3問の原題・独立詳解に直接照合した補遺を追加する。2014年度は導体表皮効果、2015年度は Lorentz 変換と運動する電荷である。両年度の主題索引に加え、原資料の設問記述と導出を確認した。残る年度・分野の小問単位の網羅性を主張しない。

2 2014 年度：導体中の電磁波を解く共通手順

SI 単位系、時間依存 $e^{-i\omega t}$ 、媒質の定数 $\varepsilon, \mu, \sigma > 0$ を採用する。電荷密度ゼロ、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 、Ohm 則 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ とする。

2.1 Maxwell 方程式から波動方程式を導出

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \partial_t \mathbf{E}. \quad (2)$$

一式の curl を取り、 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ を利用すると

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \sigma \partial_t \mathbf{E} - \mu \varepsilon \partial_t^2 \mathbf{E} = 0}. \quad (3)$$

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ikz - i\omega t}$ から

$$\boxed{k^2 = \mu \varepsilon \omega^2 + i \mu \sigma \omega}. \quad (4)$$

物理的な枝は $\text{Im } k > 0$ ($z > 0$ で減衰) で選ぶ。良導体 $\sigma \gg \omega \varepsilon$ なら

$$k \simeq (1+i) \sqrt{\frac{\mu \sigma \omega}{2}}, \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}}}. \quad (5)$$

2.2 境界条件と反射率

表面電流がなければ接線成分 E_x, H_y は連続。入射媒質の実波数を k_1 、導体の複素波数を k_2 とし、両媒質の透磁率を同じ μ とすると

$$E_i + E_r = E_t, \quad (6)$$

$$\frac{k_1}{\mu\omega}(E_i - E_r) = \frac{k_2}{\mu\omega}E_t, \quad (7)$$

$$\boxed{r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}}, \quad \boxed{t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}}. \quad (8)$$

異なる μ の場合は k/μ を波動アドミタンスとして扱い、上式をそのまま使わない。入射側が無損失なら反射電力比 $R = |r|^2$ 。導体中の Joule 発熱密度は時間平均で

$$\boxed{\langle p \rangle = \frac{1}{2}\sigma|\mathbf{E}(z)|^2}. \quad (9)$$

電力透過と吸収を区別し、導体側では有限の伝搬距離で減衰することを検算する。

2.3 よくある誤り

反射波の磁場の符号を入射波と同じにすること、 $\text{Im } k < 0$ の増幅枝を選ぶこと、良導体近似を任意の周波数で使うこと、 $R = |t|^2$ と誤認することは避ける。2014 年度の提供原題には Faraday 則の符号について校注があり、標準の負号を採用して導出する。

3 2015 年度：動く電荷と Lorentz 変換

3.1 何を変換するか

速度 v で x 方向に移動する慣性系について $\beta = v/c$ 、 $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ とすると

$$\boxed{t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z}. \quad (10)$$

4 元電流 $J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$ の変換は

$$\boxed{\rho' = \gamma\left(\rho - \frac{vJ_x}{c^2}\right), \quad J'_x = \gamma(J_x - v\rho)}. \quad (11)$$

線電荷密度を変換するとき、長さの同時刻測定条件と電流の有無を先に指定する。 $\lambda' = \gamma\lambda$ のような単純式は静止系と変換方向が固定される場合に限る。

3.2 電磁場の変換

同じ boost 規約で

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \quad (12)$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}\right). \quad (13)$$

$\mathbf{v}$ は非プライム系に対するプライム系の速度である。静止点電荷の Coulomb 場を boost して移動電荷の場を得る際は、座標変換で観測点の同時刻面を正しく写す。場の不変量

$$\boxed{\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}', \quad E^2 - c^2 B^2 = E'^2 - c^2 B'^2} \quad (14)$$

で符号と因子を検算できる。

3.3 小問を解くときの手順

(1) 静止系と観測系を宣言する。(2) 座標・4 元電流・電磁場のどれを変換するか選ぶ。(3) $v \rightarrow 0$ で古典極限を検査する。(4) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ 等の不変量を検査する。(5) 必要なら Lorentz 力 $q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$ に代入する。

4 第 4 版の監査ステータス

今回の補遺は 2 年度・2 大問の解法について原資料に立ち戻った説明を増補したものであり、全小問に対する厳密な対応監査ではない。既存の 87 大問の主題確認状況は変わらず、未確認の 13 大問は保留とする。原題の問題文・図と独立解答の整合性を全年度について確認する作業は今後も必要である。

解法エッセンス・第5版補遺

2001–2013 年度原題照合と不足手法の導出

東京大学大学院物理学専攻・非公式学習教材

2026 年 10 月 13 日

位置付け：この補遺は第4版 100 ページの続きである。東京大学物理学専攻の公式修士入試過去問ページで **2001–2013 年度の原題 PDF 13 点の URL と代表設問を確認**した。以下では設問の全文を再録せず、必要な基礎計算を独立に導出する。1 年度につき選定した代表設問が 1 件確認されたことと、その年度の全設問・全小問を監査したことは明確に区別する。

目次

1	原題対応の判定基準と 13 年度の照合台帳	2
2	2013 年：電磁ポテンシャルとゲージ変換を解法へ変換する	2
3	2012 年：誘電体の分散をミクロな振動子から導出	3
4	2011 年：一様な電場と磁場中の粒子を複素数で解く	3
5	2008 年：矩形導波管と最低カットオフ周波数	4
6	2002 年：斜入射の Fresnel 係数を境界条件で作る	4
7	2001 年：固有加速度一定の相対論的なロケット	5
8	2009 年・2005 年：中心力散乱とスイングバイの共通骨格	5
9	2003 年：同軸導体の Gauss・Ampère と鏡像法	6
10	2004・2006・2007・2010 年の転用メモ	6
11	理解確認の例題（独立に作成）	7
12	到達度と未完了の区分	7

1 原題対応の判定基準と 13 年度の照合台帳

照合の単位は「入学年度」「原題中の設問番号」「問題冒頭にある定義」「最初に使う数学的操作」である。問題の構成が年度により 3-5 問以上に変動するため、既存の 25 年度 ×4 分野 =100 枠は学習用の分野別対応枠であり、各年の実際の問題数を表すものではない。

入学年	設問	原題で確認した主題	解法の入口
2013	第 3 問	荷電粒子の Lagrangian・ゲージ変換	Euler-Lagrange、全微分、Lorentz 力
2012	第 3 問	束縛電子と誘電体の光学分散	強制調和振動子、分極、複素振幅
2011	第 3 問	磁場・電場中の荷電粒子と磁場勾配	複素速度、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト
2010	第 3 問	導電媒質中の電磁波と平行導体	複素波数、境界条件
2009	第 3 問	2 粒子の弾性散乱・中心力	重心系、換算質量、角運動量
2008	第 3 問	矩形導波管の電磁モード	変数分離、TE/TM、カットオフ
2007	第 3 問	2 天体と制限 3 体問題の回転座標	回転系の Lagrangian、Jacobi 定数
2006	第 3 問	平面電磁波の直交性とインピーダンス	Maxwell、波動方程式
2005	第 4 問	惑星重力によるスイングバイ	中心力散乱、漸近速度
2004	第 3 問	レーザー光と自由電子の振動運動	駆動振動子、周期平均、Poynting
2003	問題 3	接地円筒と内部の無限長導線	Gauss/Ampère、鏡像電荷
2002	問題 3	誘電体界面での斜入射電磁波	接線成分の連続、Snell/Fresnel
2001	問題 4	一定固有加速度を持つロケット	固有時、ラピディティ、Lorentz 変換

年度・設問と原題 PDF への参照 URL は別添の source_audit_2001_2013.csv に記載した。2001-2013 年の 13 枠では代表設問の主題照合は 13/13。ただし原題の全ページ・全小問を読んだという意味ではない。

2 2013 年：電磁ポテンシャルとゲージ変換を解法へ変換する

質量 m 、電荷 q の粒子が電磁場中を動くとき、ポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 、 $\phi(\mathbf{r}, t)$ から

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + q \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - q\phi \quad (1)$$

を置く。成分表示すると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = q\dot{x}_j \partial_i A_j - q\partial_i \phi, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\ddot{x}_i + q\partial_t A_i + q\dot{x}_j \partial_j A_i. \quad (3)$$

従って

$$m\ddot{x}_i = q[-\partial_i \phi - \partial_t A_i + \dot{x}_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i)]. \quad (4)$$

ここで $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ と認識すれば

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})}. \quad (5)$$

なぜゲージ変換してよいか： $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla\Lambda$, $\phi \mapsto \phi - \partial_t\Lambda$ とすると

$$L' = L + q(\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\Lambda + \partial_t\Lambda) = L + q \frac{d\Lambda(\mathbf{r}(t), t)}{dt}. \quad (6)$$

作用の変化は端点値 $q[\Lambda(t_f) - \Lambda(t_i)]$ のみなので、端点を固定した変分で運動方程式は同じになる。これを「ゲージ変換は全微分を加える」と覚えるだけでなく、自分で展開できることが重要である。

原題の設定を用いた検算

たとえば $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$ 、 $\phi = (\alpha/2)(2z^2 - x^2 - y^2)$ なら

$$\mathbf{B} = (0, 0, B), \quad \mathbf{E} = (\alpha x, \alpha y, -2\alpha z). \quad (7)$$

x, y を結合した $u = x + iy$ には $\omega_c = qB/m$ 、 $a = q\alpha/m$ として

$$\ddot{u} + i\omega_c \dot{u} - au = 0. \quad (8)$$

$u = e^{-i\omega t}$ を代入すると $\omega^2 - \omega_c \omega + a = 0$ 、判別式 $\omega_c^2 - 4a$ を調べる。 $q, B, \alpha > 0$ で $0 < \alpha < qB^2/(4m)$ なら横方向は振動的。一方 z 方向は $\ddot{z} = -2az$ で振動的である。 $\omega_c^2 < 4a$ では横方向の固有指数に実部が生じるため、 z 方向が安定でも全体が安定とは限らない。

3 2012 年：誘電体の分散をミクロな振動子から導出

電荷 q 、質量 m をもつ束縛電子に復元力 $-m\omega_0^2 x$ が働くとする。 $e^{-i\omega t}$ 規約で

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = qE_0 e^{-i\omega t}, \quad x_0 = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (9)$$

単位体積あたり N 個の独立振動子があれば分極の複素振幅は

$$P_0 = Nqx_0 = \frac{Nq^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0. \quad (10)$$

$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}$ から

$$\boxed{\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}, \quad \omega_p^2 = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}, \quad n^2(\omega) = \varepsilon_r(\omega) \quad (\mu_r = 1). \quad (11)$$

重要な但し書き：この式は減衰を無視した理想模型であり、 $\omega = \omega_0$ 近傍で無限大となる結果を現実の透過率とみなさない。散逸率 $\gamma > 0$ があれば分母は $\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega$ に置き換わる。誘電率が複素数になり吸収と分散が同時に現れる。

解法の順序：力の符号を決める → 特解を複素振幅で解く → 分極を求める → 構成式 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ と比較 → 適用範囲を確認。

4 2011 年：一様な電場と磁場中の粒子を複素数で解く

$\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ 、 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ 、 $qB > 0$ とする。 $\omega_c = qB/m$ なら

$$\dot{v}_x = \frac{qE}{m} + \omega_c v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega_c v_x. \quad (12)$$

$u = v_x + iv_y$ を使えば

$$\dot{u} + i\omega_c u = \frac{qE}{m}. \quad (13)$$

特解 $u_D = -iE/B$ を分離して、初速 u_0 の一般解は

$$u(t) = -i\frac{E}{B} + \left(u_0 + i\frac{E}{B}\right)e^{-i\omega_c t}. \quad (14)$$

第1項が一定のドリフト、残りが周期運動。ベクトルで書くと

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (15)$$

$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ はこの設定で $-y$ 方向になるので、複素速度の虚部の負符号と一致する。磁場だけなら $\dot{\mathbf{r}} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) = 0$ でエネルギーは一定。電場があれば一般には $d(mv^2/2)/dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ で変化する。原題に含まれる磁場勾配の項はこれとは別の摂動計算であり、ここでは未完了としている。

5 2008 年：矩形導波管と最低カットオフ周波数

幅 a 、高さ b ($a > b$) の完全導体導波管を z 方向に延ばす。時間・伝搬因子を $e^{i\beta z - i\omega t}$ とすると、縦成分 $F = E_z$ または H_z は断面内で

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_c^2)F = 0, \quad \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_c^2 \quad (16)$$

を満たす。境界条件で許されるモードが変わる。

- TM 波 ($H_z = 0, E_z \neq 0$)：導体表面で接線電場 $E_z = 0$ 。 $E_z \propto \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$ で $m, n \geq 1$ 。
- TE 波 ($E_z = 0, H_z \neq 0$)：壁面で $\partial_n H_z = 0$ 。 $H_z \propto \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)$ で $m, n \geq 0$ 、ただし $(0, 0)$ は除外。

どちらの場合も

$$k_{c,mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad \omega_{c,mn} = ck_{c,mn}. \quad (17)$$

$\omega < \omega_c$ では β が純虚数となり、伝搬波ではなくエバネッセント波になる。 $a > b$ なら最も低い非自明モードは $\mathbf{TE}_{10}$ で $\omega_c = \pi c/a$ 。 $m = n = 0$ を許すと、あり得ない TEM モードを単連結な中空導波管に導入してしまう点に注意。

6 2002 年：斜入射の Fresnel 係数を境界条件で作る

損失のない等方媒質 1・2 で $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ 、屈折率 $n_1, n_2 > 0$ とする。位相の接線方向一致から

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t. \quad (18)$$

s 偏光（電場が入射面に垂直）で、入射・反射・透過の電場接線振幅を E_i, E_r, E_t と定めれば

$$E_i + E_r = E_t, \quad (19)$$

$$\frac{n_1 \cos \theta_i}{Z_0}(E_i - E_r) = \frac{n_2 \cos \theta_t}{Z_0}E_t. \quad (20)$$

これらを解くと

$$\boxed{r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}}, \quad \boxed{t_s = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}}. \quad (21)$$

透過電力の比は $T_s = (n_2 \cos \theta_t / n_1 \cos \theta_i) |t_s|^2$ で、 $|t_s|^2$ 単独ではない。無損失かつ透過角が実数なら $R_s + T_s = 1$ を検算に使う。 p 偏光では磁場の接線成分と電場の接線振幅の比が $n/(Z_0 \cos \theta)$ になり、 s 偏光のアドミタンス $n \cos \theta / Z_0$ とは異なる。

7 2001 年：固有加速度一定の相対論的なロケット

一直線運動の速度を $\beta = v/c = \tanh \eta$ で書く。ラピディティ η により

$$\gamma = \cosh \eta, \quad \gamma\beta = \sinh \eta, \quad \frac{dt}{d\tau} = \cosh \eta, \quad \frac{dx}{d\tau} = c \sinh \eta \quad (22)$$

が成り立つ。固有加速度 $g > 0$ が一定で初期静止なら $d\eta/d\tau = g/c$ 。 $\tau = 0$ で $x = t = 0$ として積分すると

$$\boxed{t(\tau) = \frac{c}{g} \sinh \left(\frac{g\tau}{c} \right)}, \quad \boxed{x(\tau) = \frac{c^2}{g} \left[\cosh \left(\frac{g\tau}{c} \right) - 1 \right]}, \quad (23)$$

$$\boxed{v(\tau) = c \tanh \left(\frac{g\tau}{c} \right)}. \quad (24)$$

$\tau \ll c/g$ で $t \simeq \tau$ 、 $x \simeq g\tau^2/2$ となり Newton 極限に戻る。 $\tau \rightarrow \infty$ で $|v| \rightarrow c$ だが超光速にはならない。また

$$\left(x + \frac{c^2}{g} \right)^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{g^2} \quad (25)$$

となり、時空図で運動が双曲線を描くこともわかる。

8 2009 年・2005 年：中心力散乱とスイングバイの共通骨格

質量 m_1, m_2 の 2 体問題では重心運動を除くと、換算質量 $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ が中心ポテンシャル $V(r)$ 中を動く。

$$L = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r), \quad \ell = \mu r^2 \dot{\phi}, \quad E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + V(r). \quad (26)$$

無限遠速度 v_∞ 、衝突径数 b のとき $\ell = \mu b v_\infty$ 。反発 Coulomb 型 $V = \kappa/r$ ($\kappa > 0$) の散乱角 Θ は

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \frac{\kappa}{\mu v_\infty^2 b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\kappa^2}{4\mu^2 v_\infty^4 \sin^4(\Theta/2)}}. \quad (27)$$

2005 年の惑星重力では $V = -GMm/r$ に符号を替え、中心天体が非常に重い近似で

$$\boxed{\Theta = 2 \arctan \left(\frac{GM}{bv_\infty^2} \right)}. \quad (28)$$

スイングバイでは基準系が要点：惑星静止系では進入・退出の速度の大きさは同じ。惑星が恒星基準系で速度 $\mathbf{V}$ を持つときは $\mathbf{v}_{\text{in/out}} = \mathbf{V} + \mathbf{u}_{\text{in/out}}$ だから、向きが変わるだけで恒星基準系の速度の大きさが変わり得る。

9 2003 年：同軸導体の Gauss・Ampère と鏡像法

軸上の線電荷 λ と接地された半径 R の無限長導体筒を考える。円筒対称なら Gauss 則から内側電場は

$$\boxed{E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (0 < r < R)}, \quad \boxed{\phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}}. \quad (29)$$

軸を外して $x = a$ ($0 < a < R$) に線電荷を置くと、上の単純な $E_r(r)$ は使えない。接地円筒の境界条件を満たすため、円筒外 $x' = R^2/a$ に線電荷 $-\lambda$ を置く鏡像構成を利用できる。筒内の電位は

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{a}{R} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{a}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \right]} \quad (|\mathbf{r}| < R). \quad (30)$$

$|\mathbf{r}| = R$ では $|\mathbf{r} - \mathbf{a}'|/|\mathbf{r} - \mathbf{a}| = R/a$ なので、確かに $\phi = 0$ である。電流の磁場は別途 Ampère 則または Biot-Savart 則で求め、電位の鏡像電荷をそのまま磁場の解に流用しない。

10 2004・2006・2007・2010 年の転用メモ

2004 年：電子の光電場による往復運動

空間変化を無視し、 $m\ddot{x} = qE_0 \cos \omega t$ とする。自由な一様加速解を取り除いた周期特解は $x = -qE_0 \cos \omega t / (m\omega^2)$ 。周期平均した運動エネルギーは

$$\boxed{\langle K \rangle = \frac{q^2 E_0^2}{4m\omega^2} = \frac{q^2 I}{2m\epsilon_0 c \omega^2}}, \quad I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2. \quad (31)$$

強い場でも無条件に成立するわけではなく、非相対論的速度と磁気力の無視を確認する。

2006 年：平面電磁波

自由空間では $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 、 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ より波数 $k = \omega/c$ の平面波で $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ 、 $\mathbf{B} = (\mathbf{k} \times \mathbf{E})/\omega$ 。従って $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ は直交する。 $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ より

$$\boxed{\frac{|E_0|}{|H_0|} = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}, \quad \boxed{\langle S \rangle = \frac{E_0^2}{2Z_0}}. \quad (32)$$

2007 年：回転座標系の重力ポテンシャル

角速度 ω で回る 2 天体系の小質量粒子を考える。回転系で $\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}}$ とすると

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \nabla U_{\text{eff}}, \quad U_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}. \quad (33)$$

$\dot{\mathbf{r}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0$ なので、 $C_J = 2U_{\text{eff}} - |\dot{\mathbf{r}}|^2$ が一定。遠心項と Coriolis 項を区別するのが要点。

2010 年：損失媒質の平面波

第 4 版補遺の導体中の複素波数 $k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$ がそのまま入口になる。ただし原題は平行導体の電場・電流も問うので、導体表面の接線電場 $E_{\parallel} = 0$ と、板間の電位差を電場の線積分から作る操作を追加する。

11 理解確認の例題（独立に作成）

例題 A：導波管の断面が $a = 2b$ である。TE₁₀、TE₀₁、TM₁₁ のカットオフ周波数の比を求めよ。

解： $\omega_{c,10} = \pi c/a$ 、 $\omega_{c,01} = \pi c/b = 2\pi c/a$ 、 $\omega_{c,11} = \pi c\sqrt{1/a^2 + 1/b^2} = \sqrt{5}\pi c/a$ 。従って $1:2:\sqrt{5}$ 。TM₁₀ は許されない。

例題 B：一様電場 $\mathbf{E} = E\hat{x}$ 、一様磁場 $\mathbf{B} = B\hat{z}$ で電荷の符号を反転させる。ドリフト速度は反転するか。

解： $\mathbf{v}_D = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2 = -(E/B)\hat{y}$ は電荷によらない。円運動の回転方向のみ q で反転する。

例題 C： $\omega \rightarrow 0$ で束縛電子模型の誘電率はどうなるか。

解： $\epsilon_r(0) = 1 + \omega_p^2/\omega_0^2$ 。 $\omega_0 \rightarrow 0$ （自由電子極限）と $\omega \rightarrow 0$ は交換できない。

12 到達度と未完了の区分

確認対象	現時点
2001–2013 年度の公式原題 PDF の所在確認	13/13 年度
選定した代表設問の問題番号と主題を原題画像で照合	13/13 件
既存の 25 年度 × 4 分野 = 100 学習枠の主題対応	100/100 枠（混合基準）
100 枠すべての原題・主題の独立精査	未完了
全小問の解法・模範解答と教科書の厳密照合	未完了

重要：「100 枠の主題対応」は、既存 87 件の索引由来の対応と、今回 13 件の原題画像確認を合算した混合エビデンスである。公式問題は年により設問数が異なり、この 100 という数値は公式な実際の大問数ではない。公式試験問題の転載や公式解答との誤認を避け、式は教材用に独立導出した。

1993–2000 年度・旧形式過去問から学ぶ解法

第 6 版増補章：公式原題と有志アーカイブの区別

東大大学院物理学専攻・非公式学習教材

2026 年 10 月 13 日

本章の立場 2001–2026 年度（2021 年度を除く）の既存 25 年度対応は保持し、その前の **1993–2000 年度入学分**を歴史的な解法補強資料として追加する。元の問題文・解答 PDF は本書に転載しない。出典 URL を記録し、抽出した手法を独自の式変形と例題で説明する。年度は「**入学年度**」で統一し、試験実施年との 1 年差を区別する。

目次

1	どの過去問を確認したか 出典と試験制度	2
2	2000 年度：二重井戸のエネルギー分裂からトンネル振動へ	3
3	2000 年度：冷たいプラズマの分散関係を運動方程式から求める	3
4	2000 年度：断熱消磁を「エントロピー一定」から解く	4
5	1999 年度：同種電子の 2 粒子状態を作る	4
6	1998 年・1996 年度：球対称の有限井戸を動径方程式に還元	4
7	1997 年度：電子・正孔の換算質量と束縛尺度	5
8	1995 年度：WKB を「障壁の面積」から覚える	5
9	1994 年度：突然の外力を受けた調和振動子	6
10	1994 年度：導波管の境界値問題と遮断周波数	6
11	1993 年度：2 次元電子気体の状態密度と低温比熱	6
12	1993 年度：局所調和近似から 4 次摂動まで	7
13	学習優先度と資料の扱い	7

1 どの過去問を確認したか 出典と試験制度

一次資料：東京大学物理学専攻の修士課程過去問題集 (<https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/about/147/>)。平成 8–12 年度 = **1996–2000 年度入学分**には物理専門問題の公式 PDF がある。1999 年度実施 (2000 年度入学) の専門問題は全 8 問から 4 問選択と明記されており、現在の 4 分野固定テンプレートに写像してはいけない。

補助資料：学生有志が維持する非公式アーカイブ ([過去問アーカイブ](#))。実施年 1992–1994 の「物理専門科目」は **1993–1995 年度入学分**に対応する。編集済みの問題・解答を公開しているが、**東大の公式解答ではない**。作成者も解答の正確性を保証しない旨を注記している。

入学年度	設問 (検証範囲)	原題から抽出した主題	最初に使う解法
2000	公式・問題 1	対称二重井戸とトンネル分裂	偶奇対称性、境界接続、2 状態時間発展
2000	公式・問題 2	電離層プラズマと円偏光	電子の運動、分極・電流、波動分散
2000	公式・問題 3	断熱消磁とスピン統計	2 状態分配関数、エントロピー、等エントロピー
1999	公式・問題 1	井戸中の 2 電子とスピン	Pauli 原理、空間・スピンの交換対称性
1998	公式・問題 1	中心力中の球対称井戸	動径方程式、 $u = rR$ 、接続条件
1997	公式・問題 1	半導体中の電子・正孔対	換算質量、Coulomb 束縛、波動関数のスケール
1996	公式・問題 1	球状井戸の束縛と散乱	球面調和関数、束縛条件、位相のずれ
1995	有志・専門問題 1	障壁透過と電界放出	WKB 作用積分、 $\log T$ 対 $1/F$
1994	有志・専門問題 1	急に力を加える調和振動子	平方完成、基底変換、重なり係数
1994	有志・専門問題 2	矩形導波管と周期構造	TE/TM の境界条件、Bloch 条件
1993	有志・専門問題 1	余弦ポテンシャルの非調和項	調和近似、4 次摂動、近似の成立域
1993	有志・専門問題 3	2 次元電子気体の低温統計	状態密度、Fermi 分布、Sommerfeld 展開

網羅性の区別：上表は **8 年度・代表 12 設問の主題確認**であり、8 年度の全大問・全小問を照合したことを意味しない。原題・該当ページ・確認根拠は付属 CSV の「出典索引」に記録した。

2 2000 年度：二重井戸のエネルギー分裂からトンネル振動へ

第 1 段階：偶奇を用いて未知関数を半分にする

$V(x) = V(-x)$ なら $[H, P] = 0$ 。したがって固有関数は偶関数または奇関数に選べる。障壁内の禁制領域 $E < V_0$ で

$$\psi'' = \kappa^2 \psi, \quad \kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar},$$

の解を $\cosh(\kappa x)$ (偶) と $\sinh(\kappa x)$ (奇) に分ける。左右の井戸の $\sin, \cos$ 解と ψ, ψ' を接続し、各対称性の固有値方程式を作るのが基本手順である。

第 2 段階：大きい障壁を 2 状態模型へ落とす

ほぼ左右に局在した正規直交状態 $|L\rangle, |R\rangle$ を用い、等価な 2 井戸の有効ハミルトニアンを

$$H_{\text{eff}} = E_c I - J \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J > 0$$

とする。固有状態は $|+\rangle = (|L\rangle + |R\rangle)/\sqrt{2}$ 、 $|-\rangle = (|L\rangle - |R\rangle)/\sqrt{2}$ で、固有エネルギーは $E_{\pm} = E_c \mp J$ 、分裂は $\Delta = 2J$ である。

初期状態を $|R\rangle$ とすると

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE_c t/\hbar} (\cos(Jt/\hbar)|R\rangle + i \sin(Jt/\hbar)|L\rangle),$$

よって

$$P_{R \rightarrow L}(t) = \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2\hbar}\right).$$

典型の解法：偶奇分解 → 境界条件 → 低エネルギーの 2 状態近似 → 行列の対角化 → 時間発展。

注意： Δ は $E_- - E_+$ のエネルギーであり、角周波数は $\Delta/\hbar$ 。 $e^{-\kappa(2d)}$ のような分裂の指数依存は障壁形状と幅に依存する。

3 2000 年度：冷たいプラズマの分散関係を運動方程式から求める

時間依存性 $e^{-i\omega t}$ とし、電子密度 n_e 、質量 m 、電荷 $-e$ を持つ電子を線形応答させる。イオン静止・衝突無視・弱い波の近似では

$$-i\omega m \mathbf{v} = -e\mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = -n_e e \mathbf{v} = i \frac{n_e e^2}{m\omega} \mathbf{E}.$$

これより $\sigma(\omega) = in_e e^2/(m\omega)$ となる。Maxwell 方程式で横波の $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ を用いれば

$$k^2 c^2 = \omega^2 + i\omega \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad \boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m\varepsilon_0}.$$

すなわち $\omega < \omega_p$ では k が純虚数となり、この理想模型の一樣媒質では進行波として伝わらない。背景磁場が波の伝播方向にある場合は、 $v_x \pm iv_y$ と $E_x \pm iE_y$ を使って 2×2 の連立方程式を独立な円偏光に分離する。

注意：普通の導電体の $k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$ と形が似ていても、ここでは σ 自体が ω に依存する。衝突や熱運動を無視した模型の結論を一般の電離層すべてに拡張しない。

4 2000 年度：断熱消磁を「エントロピー一定」から解く

相互作用しない N 個の $s = \frac{1}{2}$ の古典的二値磁気モーメント μ に対して、 $\varepsilon = \pm\mu H$ とする。 $y = \mu H/(k_B T)$ を用いて

$$Z_N = [2 \cosh y]^N, \quad F = -Nk_B T \ln(2 \cosh y).$$

$S = -(\partial F / \partial T)_{H,N}$ を微分すると

$$\boxed{\frac{S}{Nk_B} = \ln(2 \cosh y) - y \tanh y}.$$

この関数は $y > 0$ で $d(S/Nk_B)/dy = -y \operatorname{sech}^2 y < 0$ なので、完全に可逆な断熱磁場変化 (S 一定) は y を一定に保つ。従って

$$\boxed{T_f/T_i = H_f/H_i} \quad (H_i, H_f > 0).$$

注意：この関係だけを使って $H_f \rightarrow 0$ で現実に $T \rightarrow 0$ を達成できるとは言えない。低温磁気相互作用や熱漏れで独立スピン近似が破れる。問題の近似の範囲内で使う式である。

5 1999 年度：同種電子の 2 粒子状態を作る

同種フェルミ粒子では粒子全体の交換により全波動関数が負号を受ける。1 粒子軌道 ϕ_a, ϕ_b から

$$\psi_{\pm}(x_1, x_2) = \frac{\phi_a(x_1)\phi_b(x_2) \pm \phi_b(x_1)\phi_a(x_2)}{\sqrt{2}} \quad (a \neq b)$$

を作る。対称な空間状態 ψ_+ は反対称なスピン一重項

$$|S=0, M=0\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$$

と組み合わせ、反対称な空間状態 ψ_- は対称な三重項と組み合わせる。

$\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ に対して

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}(S^2 - s_1^2 - s_2^2) = \begin{cases} -3\hbar^2/4 & (S=0), \\ +\hbar^2/4 & (S=1). \end{cases}$$

スピンに依存する接触摂動 $g\delta(x_1 - x_2)\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$ では、三重項の空間波動関数が $x_1 = x_2$ で 0 になる点が鍵である。

典型の解法：粒子交換 $\rightarrow$ 空間の対称・反対称 $\rightarrow$ 反対称な全状態 $\rightarrow \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$ の固有値 $\rightarrow$ 摂動行列要素。

6 1998 年・1996 年度：球対称の有限井戸を動径方程式に還元

$V(r) = -V_0$ ($r < a$)、 $V = 0$ ($r > a$) とし、 $-V_0 < E = -\varepsilon < 0$ の s 波を考える。 $\psi = R_0(r)Y_{00}$ 、 $u(r) = rR_0(r)$ とすれば遠心項が消え

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u''(r) + V(r)u(r) = Eu(r), \quad u(0) = 0.$$

したがって

$$u_{\text{in}} = A \sin(kr), \quad u_{\text{out}} = B e^{-\kappa r}, \quad k^2 = \frac{2m(V_0 - \varepsilon)}{\hbar^2}, \quad \kappa^2 = \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}.$$

$r = a$ で u, u' を連続にすると

$$k \cot(ka) = -\kappa.$$

ここから束縛状態の存在条件を調べられる。最初の s 波束縛準位は $\kappa \downarrow 0$ で $ka \downarrow \pi/2$ となるため

$$V_0 > \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

が有限幅の井戸に対して最初の s 波束縛準位の存在条件となる（等号は $E = 0$ の閾値）。

注意： R そのものを 1 次元の正弦波として接続すると $1/r$ の因子を落とす。まず $u = rR$ を作り $u(0) = 0$ とする。1996 年度の散乱設問ではさらに $u \sim \sin(kr + \delta_0)$ の位相ずれを用いる。

7 1997 年度：電子・正孔の換算質量と束縛尺度

電子と正孔の有効質量 m_e^*, m_h^* に対し、重心・相対座標への分離で

$$\mu = \frac{m_e^* m_h^*}{m_e^* + m_h^*}, \quad H_{\text{rel}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r}.$$

水素原子と同じ無次元方程式に変形すれば

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 \hbar^2 n^2}, \quad a_{\text{B}}^* = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r \hbar^2}{\mu e^2}.$$

使い方：2 体であることを確認 $\rightarrow$ 換算質量 $\rightarrow e^2 \mapsto e^2/\epsilon_r$ の置換 $\rightarrow$ エネルギーと半径の次元で検算。結晶中の有効質量近似と静的・等方誘電率を仮定するので、任意の材料にそのまま適用できるわけではない。

8 1995 年度：WKB を「障壁の面積」から覚える

一次元障壁 $V(x) > E$ の禁制領域 $[a, b]$ で

$$T_{\text{WKB}} \asymp \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(V(x) - E)} dx \right].$$

三角障壁 $V(x) = U_0 - qFx$ ($qF > 0, U_0 > E$) では転回点 $b = (U_0 - E)/(qF)$ となり

$$\int_0^b \sqrt{2m(U_0 - E - qFx)} dx = \frac{2\sqrt{2m}}{3qF} (U_0 - E)^{3/2}.$$

したがって

$$\ln T \simeq -\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar qF} (U_0 - E)^{3/2}.$$

解法エッセンス： $\ln j$ 対 $1/F$ の傾きが障壁の強さと粒子質量を読み取る測定量になる。 $\log_{10}$ に変換すると傾きは $1/\ln 10$ 倍である。

注意：これは指数の支配項で、障壁の前因子や界面の波動関数整合を含む厳密透過率ではない。

9 1994 年度：突然の外力を受けた調和振動子

時刻 0 で加わった一定外力 f によって

$$H_f = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - fx = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 (x - x_0)^2}{2} - \frac{f^2}{2m\omega^2}, \quad x_0 = \frac{f}{m\omega^2}.$$

基底状態の確率密度は中心 x_0 へ移動する。断熱的に力を増やした場合と違い、突然の切替えでは $t = 0$ 直後の状態は旧基底状態のままで、新ハミルトニアン固有状態を重ね合わせたものになる。

生成消滅演算子で $\alpha = \sqrt{m\omega/(2\hbar)} x_0$ と置くと、旧基底状態から新基底状態への確率は

$$\boxed{|\langle 0_f | 0_i \rangle|^2 = e^{-\alpha^2}}, \quad \bar{n} = \alpha^2, \quad P_n = e^{-\alpha^2} \frac{\alpha^{2n}}{n!}.$$

後者は新しい振動子基底に展開した際の Poisson 分布である。

典型の解法：平方完成 → 座標の平行移動 → 変位演算子 → 重なり係数 → 新固有エネルギーによる時間発展。

10 1994 年度：導波管の境界値問題と遮断周波数

完全導体の矩形導波管（辺 $a > b$ ）の中を z 方向に進む波について、 $e^{i(kz - \omega t)}$ を分離する。縦成分は断面で Helmholtz 方程式を満たし

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_c^2)\Psi = 0, \quad \omega^2/c^2 = k^2 + k_c^2.$$

TE モードでは H_z の法線微分が導体壁で零、TM モードでは E_z が導体壁で零。 Ψ を $\cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)$ または $\sin \sin$ に分離して

$$\boxed{\omega_{c,mn} = \pi c \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}, \quad v_p = \frac{\omega}{k}, \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c^2 k}{\omega}, \quad \boxed{v_p v_g = c^2}.$$

$a > b$ で最も低い非自明な TE モードは TE_{10} 。 TE_{00} は導体壁と Maxwell 方程式を同時に満たす非自明な伝播モードではない。 TM_{mn} では両指数とも正の整数である。

11 1993 年度：2 次元電子気体の状態密度と低温比熱

面積 A 、周期境界条件、スピン縮退度 g で $\varepsilon = \hbar^2 k^2/(2m)$ とすると、 k 空間の状態数は

$$N(\varepsilon) = \frac{gA}{(2\pi)^2} \pi \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}, \quad \boxed{D(\varepsilon) = \frac{dN}{d\varepsilon} = \frac{gAm}{2\pi\hbar^2}}.$$

二次元自由粒子の状態密度はエネルギーに依存しない。定粒子数の条件は

$$N = D \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \mu)/(k_B T)} + 1} = D k_B T \ln(1 + e^{\mu/(k_B T)}).$$

$E_F = N/D$ を使えば

$$\boxed{\mu(T) = k_B T \ln \left(e^{E_F/(k_B T)} - 1 \right)}.$$

低温では $\mu(T) = E_F + O(Te^{-E_F/(k_B T)})$ 。Sommerfeld 展開により内部エネルギーは

$$U(T) - U(0) = \frac{\pi^2}{6} D(k_B T)^2 + O(e^{-E_F/(k_B T)}), \quad \boxed{\frac{C_V}{A} = \frac{\pi g m k_B^2}{6 \hbar^2} T + \text{指数的小補正}}.$$

注意： D を全系の状態密度とするか単位面積の状態密度とするかで面積 A が変わる。初めに定義を固定する。

12 1993 年度：局所調和近似から 4 次摂動まで

底の近くで $V(x) = -V_0 \cos x$ を展開すると

$$V(x) = -V_0 + \frac{V_0}{2} x^2 - \frac{V_0}{24} x^4 + O(x^6).$$

$m\omega^2 = V_0$ なら零次エネルギーは $E_n^{(0)} = -V_0 + \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ 。4 次項の一次摂動は調和振動子の期待値

$$\langle n | x^4 | n \rangle = 3 \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 (2n^2 + 2n + 1)$$

を用いて

$$\boxed{E_n^{(1)} = -\frac{V_0 \hbar^2}{32m^2\omega^2} (2n^2 + 2n + 1)}.$$

適用条件：状態の広がり $\langle x^2 \rangle = (n + 1/2)\hbar/(m\omega)$ がポテンシャルの変化尺度に比べ十分小さいことと、 $|E_n^{(1)}| \ll \hbar\omega$ を確認する。 x を無次元角度として定義する旧原題の設定を前提とする。

13 学習優先度と資料の扱い

1993–2000 年度は現行形式より歴史的な出題形態に近い。そのため「**基礎解法の理解を深める素材**」として使い、最近 25 年度分の学習を置き換ええない。優先度は、(1) 波動関数と境界条件、(2) 量子状態の対称性、(3) 分散関係、(4) 統計集団、(5) 漸近・摂動計算の順が実用的である。元の問題・解答の著作権を尊重し、原題の全文転載や有志解答の再収録を避け、各出典は URL として参照する。

未完了の監査：各年度の全専門問題、1993–2000 年度の一般物理・数学問題、原題の全小問との照合。特に 1993–1995 年度については公式サイト原題が見当たらないため、学生有志資料に依拠している。問題資料の同定と教科書に必要な解法の完全網羅とは区別する。