

難問に挑み、**合格**をつかむ。

本質を問う問題で
思考力を鍛える

東大院試 対策問題パック

物理 予想問題集

第**1**集

全5集シリーズ

出題分野

量子力学

統計力学

電磁気学

力学

数学

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$



$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$



この1冊で、院試物理を徹底対策！



オリジナル予想問題を多数収録

過去問を徹底分析した、実戦的な良問で演習！



詳しい解答・解説

解法の考え方から丁寧に解説し、理解を深める！



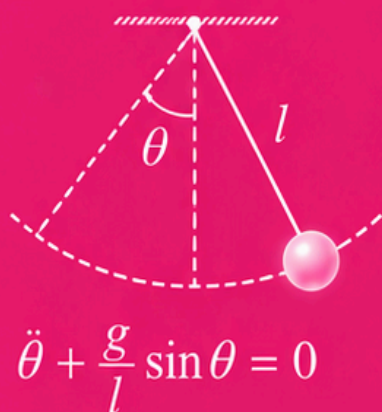
東大院試の出題傾向に完全対応

典型問題から応用・発展問題まで幅広くカバー！



解法のポイント・物理の本質も解説

答案作成のコツや思考プロセスも学べる！



総合目次

出題傾向と予想の根拠	6
全 5 回の出題設計表	8
第 I 部 問題編	9
第 1 回問題	10
1 問 1：調和振動子の微小変形と外力クエンチ	11
2 問 2：三次元理想 Bose 気体と異方的分散	12
3 問 3：Fresnel 係数・エネルギー保存と単層無反射膜	13
4 問 4：行列指数・減衰振動・Green 関数	15
第 2 回問題	16
5 第 2 回・問 1：駆動二準位系と共鳴遷移	17
6 第 2 回・問 2：一次元 Ising 環の転送行列	18
7 第 2 回・問 3：同軸線路の TEM 波とエネルギー輸送	19
8 第 2 回・問 4：無限直線上の Helmholtz 型 Green 関数	20
第 3 回問題	21
9 第 3 回・問 1：スピン 1 系の縮退と遷移	22
10 第 3 回・問 2：三次元自由 Fermi 気体の低温比熱	23

11	第 3 回・問 3：一様な直交電磁場中の荷電粒子	24
12	第 3 回・問 4：留数・積分パラメータと Laplace 法	25
第 4 回問題		26
13	第 4 回・問 1：有限幅障壁の量子透過と共鳴	27
14	第 4 回・問 2：張力による高分子鎖のエントロピー弾性	28
15	第 4 回・問 3：二質点連成振動と断熱不変量	29
16	第 4 回・問 4：特性曲線・衝撃波・粘性解	30
第 5 回問題		31
17	第 5 回・問 1：Bell 状態と量子相関 ($+\alpha$)	32
18	第 5 回・問 2：Curie–Weiss 模型と平均場相転移	33
19	第 5 回・問 3：時間変化する電気双極子からの放射	34
20	第 5 回・問 4：Sturm–Liouville 固有関数と Green 関数	35
第 II 部 解答・解説編		36
第 1 回詳解		37
1	問 1：調和振動子の微小変形と外力クエンチ（詳解）	38
2	問 2：三次元理想 Bose 気体と異方的分散（詳解）	42
3	問 3：Fresnel 係数・エネルギー保存と単層無反射膜（詳解）	45
4	問 4：行列指数・減衰振動・Green 関数（詳解）	49

検算・表記規約・出典上の扱い	52
分野別索引	52
第 2 回詳解	53
5 第 2 回・問 1：駆動二準位系（解答）	54
6 第 2 回・問 2：Ising 転送行列（解答）	55
7 第 2 回・問 3：同軸伝送線路（解答）	56
8 第 2 回・問 4：Helmholtz Green 関数（解答）	57
第 3 回詳解	58
9 第 3 回・問 1：スピン 1 系（解答）	59
10 第 3 回・問 2：Fermi 気体（解答）	60
11 第 3 回・問 3：直交電磁場とドリフト（解答）	61
12 第 3 回・問 4：留数と漸近積分（解答）	62
第 4 回詳解	63
13 第 4 回・問 1：有限幅障壁の散乱（解答）	64
14 第 4 回・問 2：高分子鎖とエントロピー（解答）	65
15 第 4 回・問 3：連成振動（解答）	66
16 第 4 回・問 4：Burgers 方程式（解答）	67
第 5 回詳解	68

17	第 5 回・問 1：Bell 状態と量子相関（解答）	69
18	第 5 回・問 2：Curie–Weiss 模型（解答）	70
19	第 5 回・問 3：電気双極子放射（解答）	71
20	第 5 回・問 4：Sturm–Liouville と Green 関数（解答）	72

出題傾向と予想の根拠

資料の位置づけ 本書は新作の非公式模擬問題集であり、大学の予告問題・公式の配点・採点基準・試験時間ではない。問題設定と解答を独自に制作した。5 回は「次回以降の受験に向けた 5 セット」を意味する。2027 年度入学試験は 2026 年 8 月に実施済みであり、本書は 2028 年度以降の練習用に再整理したものである。将来の公式出題を言い当てる趣旨ではない。1 大問 25 点、1 回 100 点は本書の練習用配点である。

公式の 2026 年度出題意図 東京大学物理学専攻は、基礎学力・論理的思考力を重視し、量子・統計・古典力学と電磁気・数学から各 1 問を課したと説明している。量子力学では交換関係と周期ポテンシャル、統計力学ではゴム弾性と Ising 模型の関係、古典力学・電磁気学では回転管内の連成運動と電磁場、数学では冪零行列と特性曲線法を題材とした。従って、題材の新しさ以上に「基本法則 → 模型化 → 計算 → 物理的解釈」が重要と判断した。

分野	近年の既出例（年度は入学年度）	本書が重点化する基礎手法
量子力学	2026: 周期ポテンシャル、2025: 二光子遷移、2024: スクイーズド状態、2022: 最小不確定状態	固有値・演算子・境界接続・遷移振幅・対称性
統計力学	2026: 高分子と Ising、2025: トラップ Bose、2023: Dirac 電子の低温、2022: Bose 凝縮	状態密度・分配関数・転送行列・低温展開・相転移
電磁気・力学	2026: 回転運動と荷電粒子、2025: 鏡像法、2024: 散乱と光ピンセット、2022: Fresnel、2020: 同軸線路	境界条件・エネルギー保存・波動・正規モード・電磁場
数学	2026: 冪零行列・特性曲線、2025: Pauli 行列・直交多項式、2024: Fourier・固有値	行列の対角化・Green 関数・複素解析・偏微分方程式

参考：2027 年度入試公式日程 (https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/g_info/49259/)。
資料：東京大学物理学専攻「修士課程過去問題集」(<https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/about/147/>)、同「令和 8 年度専門科目出題意図」(<https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/wp-content/uploads/2026/04/7279dddee7f4ed267cae8c23fe4cd7d1.pdf>)、過去年度の分野別索引（本書に付属する CSV）。**2021 年度は筆記試験が実施されていない**。索引に残る旧年度の分類は一部が代表主題レベルであり、全小問の再照合とは異なる。

予想の考え方 重点：定常摂動／遷移、状態密度／揺らぎ、Maxwell 境界条件／運動方程式、線形代数／PDE。準重点：角運動量、散乱と共鳴、平均場、導波管・双極子放射。+ α ：量子相関・CHSH（第 5 回のみ）。これは出題確率の数値推定ではなく、過去問から抽出した学習上の優先度である。

学習上の運用 各回は問 1 = 量子、問 2 = 統計、問 3 = 電磁気・力学、問 4 = 数学で統一した。問題編のみを最初に解き、解答編では物理法則・導出・適用条件を自分の解法と比較する。予想順位の低い題材でも、標準計算力の確認には価値がある。

全 5 回の出題設計表

回	問 1：量子力学	問 2：統計力学	問 3：電磁気・力学	問 4：数学
1	調和振動子・外力クエ ンチ	理想 Bose 気体・異方 分散	Fresnel 係数・無反射膜	減衰振動・行列指数・ Green
2	駆動二準位・Rabi 回転	1D Ising 転送行列	同軸線路・TEM 波	Helmholtz Green 関数
3	スピン 1・縮退の解消	Fermi 気体・Sommer- feld	直交電磁場・ドリフト	留数と Laplace 法
4	有限障壁・透過共鳴	高分子鎖・エントロピ ー弾性	連成振動・断熱不変量	Burgers 特性曲線・衝 撃波
5	Bell 相関 (+ α)	Curie-Weiss 相転移	電気双極子放射	Sturm-Liouville と Green

各問は 25 点とし、第 1 回は既存の独立制作原稿（全 26 小問）を再利用、第 2～5 回は今回新作（各問 5 小問）である。第 1 回は細分配点の合計を 25 点とした。2027 年度入学試験の公式筆記時間は **240 分**であった。全 4 問を **240 分で解く練習**を推奨する（本書の 25 点 $\times$ 4 問という配点は非公式の 100 点換算）。問題ごとの推奨時間は計算に集中する場合の参考値であり、残り時間は見直しに充てる。

第 I 部

問題編

第 1 回 標準総合演習

1 問 1：調和振動子の微小変形と外力クエンチ

難易度：標準～応用 推奨時間：40 分 配点：25 点 (4+4+5+4+4+4)

質量 $m > 0$ の粒子の 1 次元運動を考える。位置・運動量演算子は $[x, p] = i\hbar$ を満たす。基準ハミルトニアンおよび摂動後のハミルトニアンを

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad H_{\varepsilon, F} = H_0 + \frac{\varepsilon m\omega^2 x^2}{2} - Fx \quad (1)$$

とする。 $\omega > 0, \varepsilon > -1, F \in \mathbb{R}$ 。摂動論を使う小問では $|\varepsilon| \ll 1$ および $|Fx_*| \ll \hbar\omega$ とし、 $x_* = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}$ と書く。 H_0 の規格化固有状態を $|n\rangle$ ($n = 0, 1, \dots$) とする。

- (1) $a = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}x + ip/\sqrt{2m\hbar\omega}$ と定義する。 $[a, a^\dagger]$ と H_0 の $a, a^\dagger$ による表示を求め、 $\langle n | x^2 | n \rangle$ を計算せよ。【4 点】
- (2) $H_{\varepsilon, F}$ のエネルギー固有値 E_n について、 ε の 1 次および F の 2 次までの補正を、各摂動を独立に扱って求めよ。交差項 εF の有無も答えよ。【4 点】
- (3) 基底状態 $|\psi_0\rangle$ を ε, F の 1 次まで $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ で表せ。さらに $\langle x \rangle$ を F の 1 次まで求めよ。状態の規格化誤差の次数も述べよ。【5 点】
- (4) $H_{\varepsilon, F}$ を平方完成して厳密な固有値 $E_n(\varepsilon, F)$ を求めよ。その結果を展開し、(2) の答えと照合せよ。【4 点】
- (5) $t = 0$ に $|0\rangle$ にあった粒子に対して、 $t \geq 0$ に一定の外力 F を突然加える（この小問から $\varepsilon = 0$ とする）。 $\langle x(t) \rangle, \langle p(t) \rangle, \Delta x(t)\Delta p(t)$ を求めよ。【4 点】
- (6) (5) で、時刻 t に外力を切る直前の状態を $|\psi(t)\rangle$ とする。元の基底状態へ戻る確率 $P_0(t) = |\langle 0 | \psi(t) \rangle|^2$ を厳密に求め、 $F \rightarrow 0$ の極限と周期性を確認せよ。【4 点】

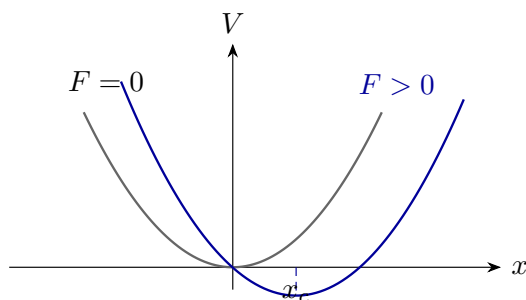


図1 外力によるポテンシャル最小点の移動（模式図、 $\varepsilon = 0$ ）。

2 問 2：三次元理想 Bose 気体と異方的分散

難易度：標準 推奨時間：45 分 配点：25 点 (4+4+4+4+5+4)

体積 $V = L^3$ の周期境界条件を課した箱に、スピンをもたない相互作用しない同種 Bose 粒子 $N \gg 1$ 個を入れる。はじめ 1 粒子エネルギーは $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 |\mathbf{k}|^2 / (2m)$ 、 $\mathbf{k} = (2\pi/L)\mathbf{n}$ 、 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$ とする。熱力学極限 $N, V \rightarrow \infty$ ($n = N/V$ 固定) で議論する。 $\beta = (k_B T)^{-1}$ 、 $z = e^{\beta\mu}$ とし、 $\mu \leq 0$ 、

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}, \quad g_s(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell^s} \quad (0 < z \leq 1, s > 1) \quad (2)$$

を定義する。 $s \leq 1$ では必要な場合 $0 < z < 1$ のみで $g_s(z)$ を用いる。

- (1) 基底準位を除く 1 粒子状態の状態密度 $D(\epsilon)$ を求めよ。【4 点】
- (2) 励起状態の粒子数が $N_{\text{ex}} = V\lambda_T^{-3} g_{3/2}(z)$ と書けることを積分で示せ。【4 点】
- (3) Bose-Einstein 凝縮の臨界温度 T_c と、 $0 < T < T_c$ の凝縮割合 N_0/N を求めよ。【4 点】
- (4) 全エネルギー U を $g_{5/2}(z)$ で表示し、 $T < T_c$ における定積比熱 C_V を求めよ。【4 点】
- (5) $T > T_c$ で粒子数一定条件から dz/dT を決定し、 $C_V/(Nk_B)$ を $g_{1/2}, g_{3/2}, g_{5/2}$ で表せ。
 $T \downarrow T_c$ の極限は下側の値と連続か。【5 点】
- (6) 分散を $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2(k_x^2 + k_y^2)/(2m) + \hbar^2 k_z^2/(2\alpha m)$ ($\alpha > 0$ は固定) に変更する。 $D_\alpha(\epsilon)$ と $T_c(\alpha)/T_c(1)$ を求めよ。【4 点】

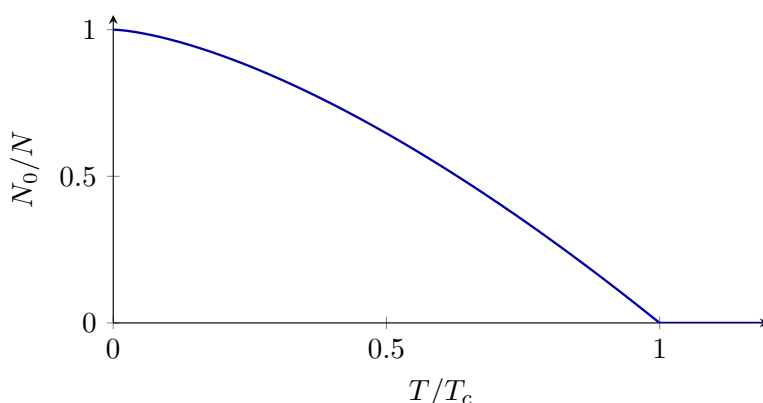


図2 (3)で導かれる凝縮割合の温度依存性 (解答内容を定性的に示す補助図)。

3 問 3：Fresnel 係数・エネルギー保存と単層無反射膜

難易度：標準～応用 推奨時間：50 分 配点：25 点 (3+3+4+4+4+4+3)

真空の誘電率・透磁率を ϵ_0, μ_0 、真空光速度を $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ とする。 $z = 0$ を境に、 $z < 0$ には媒質 1 (屈折率 $n_1 > 0$)、 $z > 0$ には媒質 2 (屈折率 $n_2 > 0$) がある。どちらも損失のない線形・等方・非磁性誘電体 ($\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_0 n^2$) で、自由表面電荷・自由表面電流はない。角周波数 ω 、入射角 $0 \leq \theta_i < \pi/2$ の平面波が媒質 1 から入射する。入射面は xz 平面とする。物理量は複素振幅の実部 $\text{Re}[E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}]$ とする。TE (s) 偏光の振幅は E_y 、TM (p) 偏光の振幅は接線電場 E_x によって定義し、反射係数 $r = E_{\parallel}^{(r)} / E_{\parallel}^{(i)}$ 、透過係数 $t = E_{\parallel}^{(t)} / E_{\parallel}^{(i)}$ とする。

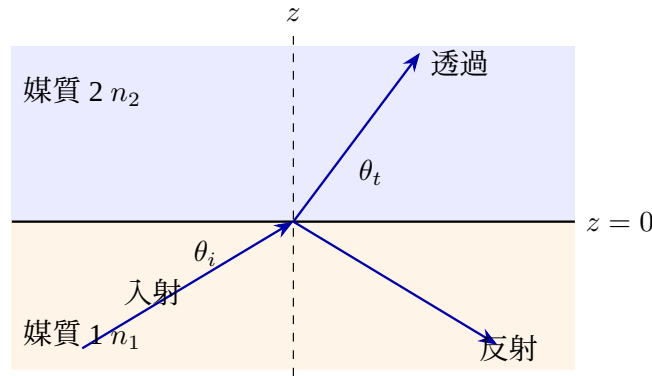


図 3 入射・反射・透過波の模式図。縦軸は界面法線 z 、横方向は x 。

- (1) Maxwell 方程式から、媒質中の波数 $|\mathbf{k}|$ と磁場振幅 $\mathbf{H}_0$ を電場振幅 $\mathbf{E}_0$ で表せ。【3 点】
- (2) 界面で位相がすべての位置・時間で一致する条件から、反射の法則と Snell の法則を導け。【3 点】
- (3) 接線 E, H の境界条件を用い、TE 偏光の r_s, t_s を $n_1, n_2, \theta_i, \theta_t$ で求めよ。【4 点】
- (4) 同様に TM 偏光の r_p, t_p を求めよ。振幅は問題文で定義した接線成分を用いること。【4 点】
- (5) 両偏光について時間平均 Poynting 流束の界面法線成分から、反射率 R 、透過率 T を振幅係数で表し、屈折角が実数のとき $R + T = 1$ を示せ。【4 点】
- (6) TM 偏光の Brewster 角を求めよ。また $n_1 > n_2$ の場合、全反射の臨界角と、TE 偏光の透過側における減衰定数 κ を求めよ。【4 点】

- (7) 次に垂直入射のみを考え、媒質 1 と媒質 3 ($n_3 > 0$) の間に屈折率 n_2 、厚さ d の薄膜を挿入する。膜内往復位相を考慮した全振幅反射係数を、 $r_{ij} = (n_i - n_j)/(n_i + n_j)$ を用いて書け。真空中設計波長 λ_0 に対し $n_2^2 = n_1 n_3$, $d = \lambda_0/(4n_2)$ のとき無反射であることを示せ。【3 点】

4 問 4：行列指数・減衰振動・Green 関数

難易度：標準～応用 推奨時間：40 分 配点：25 点 (4+4+4+4+4+3+2)

$\omega_0 > 0, \gamma \geq 0$ を定数とし、実数値関数 $x(t)$ の運動方程式

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (3)$$

を考える。 $\mathbf{y}(t) = (x(t), \dot{x}(t))^T$ 、 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix}$ とする。時間依存の外力 $f(t)$ は単位質量当たりの力である。Fourier の時間依存規約は $e^{-i\Omega t}$ とする。

- (1) $f = 0$ のとき $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ を確かめ、 A の特性多項式と固有値を求めよ。 $B = A + \gamma I$ に対し $B^2 = (\gamma^2 - \omega_0^2)I$ を示せ。【4 点】
- (2) $\Delta^2 = \gamma^2 - \omega_0^2$ として、 $\Delta \neq 0$ のとき e^{At} を双曲線関数で表せ。複素 Δ に対しても成立する形で答えよ。【4 点】
- (3) $0 \leq \gamma < \omega_0$ のとき $\nu = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ を用いて e^{At} を実行列で表せ。初期条件 $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ の解を求めよ。【4 点】
- (4) 臨界減衰 $\gamma = \omega_0 > 0$ で A が非対角化可能であることを示し、 e^{At} および同じ初期条件での $x(t)$ を求めよ。【4 点】
- (5) $0 \leq \gamma < \omega_0$ のとき、因果的 Green 関数 $G(t)$ ($t < 0$ で 0、 $\ddot{G} + 2\gamma\dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t)$) を求め、初期値ゼロの外力応答を積分で表せ。【4 点】
- (6) 周波数 $\Omega \in \mathbb{R}$ の調和外力 $f(t) = \text{Re}[f_0 e^{-i\Omega t}]$ に対する定常応答 $x(t) = \text{Re}[\chi(\Omega)f_0 e^{-i\Omega t}]$ の応答関数 $\chi(\Omega)$ を求めよ ($\gamma > 0$)。【3 点】
- (7) $f = 0$ で $E(t) = (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2)/2$ とおき、 $\dot{E}$ を求めて $\gamma > 0$ のとき静止解が漸近安定である理由を簡潔に述べよ。【2 点】

第 2 回 基礎の接続：二準位・Ising・伝送 線路・Green 関数

5 第 2 回・問 1：駆動二準位系と共鳴遷移

難易度：標準～応用 推奨時間：40 分 配点：25 点（5 小問・各 5 点）

スピン $1/2$ の基底を $\sigma_z |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle$ とする。 $H_0 = \hbar\omega_0\sigma_z/2$ ($\omega_0 > 0$)、初期状態は $|-\rangle$ 。 $0 < t < \tau$ に $V(t) = \hbar\Omega \cos(\omega t)\sigma_x$ を加える。 $\Omega > 0, \omega > 0$ 。それ以外の時刻は $V = 0$ とする。

- (1) H_0 の固有値、 σ_x の行列要素、 $|-\rangle$ から $|+\rangle$ への遷移を可能にする選択則を述べよ。
- (2) 相互作用表示の 1 次摂動論から、時刻 τ に $|+\rangle$ にいる振幅 $c_+^{(1)}(\tau)$ を時間積分で求め、指数関数による閉形式を示せ。
- (3) $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ では反回転項を捨てる回転波近似 (RWA) を使える。離調 $\Delta = \omega_0 - \omega$ とするとき、有効 Hamiltonian $H_{\text{RWA}} = \hbar(\Delta\sigma_z + \Omega\sigma_x)/2$ の固有値差を求めよ。
- (4) H_{RWA} による遷移確率 $P_+(\tau)$ を厳密に求め、 $\Delta = 0$ における π パルスの最短時間を求めよ。
- (5) $|\Omega\tau| \ll 1$ の極限で (2) と (4) を比較し、RWA の条件と 1 次摂動近似の条件が別であることを説明せよ。

6 第 2 回・問 2：一次元 Ising 環の転送行列

難易度：標準 推奨時間：40 分 配点：25 点（5 小問・各 5 点）

N 個のスピン $s_i = \pm 1$ ($s_{N+1} = s_1$) に $\mathcal{H} = -J \sum_i s_i s_{i+1} - h \sum_i s_i$ を課す。 $J > 0, \beta = (k_B T)^{-1}, K = \beta J, H = \beta h$ とおく。

- (1) Boltzmann 因子を隣接スピン間へ分配し、対称転送行列 $T_{ss'} = \exp[Kss' + H(s + s')/2]$ を明示せよ。
- (2) T の二固有値 $\lambda_{\pm}$ を求め、 $Z_N = \text{Tr} T^N$ を示せ。
- (3) $N \rightarrow \infty$ の 1 スピン自由エネルギー $f(T, h)$ と磁化 $m = -\partial f / \partial h$ を導け。
- (4) $h = 0$ で $\langle s_0 s_r \rangle$ と相関長 ξ を求め、 ξ が有限温度で有限なことを示せ。
- (5) $h = 0$ のゼロ磁場感受率 $\chi = \partial m / \partial h|_{h=0}$ を求め、 $\chi = \beta \sum_{r=-\infty}^{\infty} \langle s_0 s_r \rangle$ と整合することを確認せよ。

7 第 2 回・問 3：同軸線路の TEM 波とエネルギー輸送

難易度：標準～応用 推奨時間：45 分 配点：25 点（5 小問・各 5 点）

完全導体の同軸線路を考える。内半径 a 、外導体内半径 b ($0 < a < b$)、間隙には誘電率 ε 、透磁率 μ の一様な損失のない媒質を満たす。単位長さの内導体電荷 λ 、導体に流れる電流 I 、導体間電圧 V を用いる。端効果は無視する。

- (1) Gauss の法則から電場 $E_r(r)$ と単位長さ静電容量 C' を求めよ。
- (2) Ampère の法則から磁場 $H_\phi(r)$ と単位長さ自己インダクタンス L' を求めよ。
- (3) 損失のない線路の方程式 $\partial_z V = -L' \partial_t I$, $\partial_z I = -C' \partial_t V$ から伝搬速度 v と特性インピーダンス Z_0 を導け。
- (4) 進行波について Poynting 流束を断面で積分し、輸送パワー $P = VI$ と一致することを示せ。
- (5) 抵抗負荷 $R_L > 0$ で終端した場合の電圧反射係数 Γ を、入射・反射波の電圧と電流の符号に注意して求めよ。

8 第 2 回・問 4：無限直線上の Helmholtz 型 Green 関数

難易度：標準 推奨時間：40 分 配点：25 点（5 小問・各 5 点）

$\kappa > 0$ に対して、 $L = -\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 + \kappa^2$ を $\mathbb{R}$ 上で考える。解は $|x| \rightarrow \infty$ で 0 に減衰するものとする。Fourier 変換は $\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x$, $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k/(2\pi)$ と定める。

- (1) $LG = \delta$ の Fourier 変換と $\hat{G}(k)$ を求めよ。
- (2) $x \neq 0$ の微分方程式および G' の跳び条件から $G(x)$ を実空間で求めよ。
- (3) $Lf = f_0(x)$ の解を畳み込みで表し、 $f_0(x) = \delta(x - a)$ の場合を答えよ。
- (4) $f_0(x) = e^{-a|x|}$ ($a > 0, a \neq \kappa$) の場合の解を求めよ。 $x = 0$ での滑らかさを確認せよ。
- (5) $a \rightarrow \kappa$ の極限を求め、 L^{-1} が正の核をもつことを簡潔に説明せよ。

第 3 回 対称性と固有値：角運動量・Fermi 気体・磁場・複素積分

9 第 3 回・問 1：スピン 1 系の縮退と遷移

難易度：標準～応用 推奨時間：40 分 配点：25 点（5 小問・各 5 点）

角運動量 $\ell = 1$ の基底 $|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle$ において

$$H = D \frac{L_z^2}{\hbar^2} + h \frac{L_x}{\hbar}, \quad D > 0, h \in \mathbb{R}$$

を考える。 $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ とする。

- (1) $L_{\pm}$ の作用を用い、 H の 3×3 行列表示を求めよ。
- (2) $|s\rangle = (|1\rangle + |-1\rangle)/\sqrt{2}$, $|a\rangle = (|1\rangle - |-1\rangle)/\sqrt{2}$ を導入し、 $|a\rangle$ が固有状態であることを示せ。
- (3) 全固有値を厳密に求め、 $|h| \ll D$ で h^2 まで展開せよ。
- (4) $h = 0$ の縮退部分空間 $\text{span}\{|1\rangle, |-1\rangle\}$ を先に対角化することの意味を説明せよ。
- (5) 初期状態 $|0\rangle$ から時間発展したとき、 $|s\rangle$ を観測する確率を求めよ。 $h \rightarrow 0$ の極限も示せ。

10 第 3 回・問 2：三次元自由 Fermi 気体の低温比熱

難易度：標準 推奨時間：45 分 配点：25 点 (5 小問・各 5 点)

体積 V 、粒子数 N 、密度 $n = N/V$ のスピン 1/2 理想 Fermi 気体 (質量 m) を考える。相互作用を無視し、1 粒子エネルギーは $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / (2m)$ 。スピン縮退 2 を含める。弱い磁場では各スピンのエネルギーを $\epsilon_k \mp \mu_B B$ とし、 $\mu_B > 0$ とする。

- (1) $T = 0$ の Fermi 波数 k_F 、Fermi エネルギー ϵ_F を n で求めよ。
- (2) スピンの 2 重縮退を含む状態密度 $D(\epsilon)$ を求めよ。
- (3) 粒子数一定で Sommerfeld 展開を使い、低温化学ポテンシャル $\mu(T)$ を T^2 まで求めよ。
- (4) $T \ll T_F = \epsilon_F / k_B$ の内部エネルギーおよび定積比熱 C_V の先頭温度依存性を求めよ。
- (5) $T = 0$ の一様磁化 M の線形係数 $\chi = \partial M / \partial B|_0$ を求め、どの状態だけが磁気応答に寄与するかを説明せよ。

11 第 3 回・問 3：一様な直交電磁場中の荷電粒子

難易度：標準 推奨時間：40 分 配点：25 点（5 小問・各 5 点）

電荷 $q > 0$ 、質量 $m > 0$ の粒子が $\mathbf{E} = E\hat{x}$, $\mathbf{B} = B\hat{z}$ ($E, B > 0$) に置かれる。初期条件は $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{0}$ 。重力・放射は無視する。

- (1) Lorentz 力を成分で書き、 $\omega_c = qB/m$ を定義せよ。
- (2) $v_x(t), v_y(t)$ と $x(t), y(t)$ を求めよ。
- (3) 長時間平均の $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト速度を求め、電荷の符号に依存しない理由を述べよ。
- (4) $\mathbf{A} = Bx\hat{y}$, $\phi = -Ex$ を用い、Lagrange 関数と保存正準運動量 p_y を示せ。
- (5) ゲージ関数 $\Lambda = -Bxy$ で $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda$ としたとき、軌道および作用がどう変化するか述べよ。

12 第 3 回・問 4：留数・積分パラメータと Laplace 法

難易度：標準～応用 推奨時間：45 分 配点：25 点（5 小問・各 5 点）

$a > 0, c \geq 0, \lambda > 0$ とし、 x, a は無次元の実数変数・パラメータとする（ λ, c も対応する無次元パラメータ）。実積分の収束を仮定する。

- (1) 上半平面の半円を用いた留数計算で $I(a) = \int_0^\infty dx/(x^2 + a^2)$ を求めよ。
- (2) a で微分して $\int_0^\infty dx/(x^2 + a^2)^2$ を求めよ。
- (3) $x \mapsto a/x$ の置換を用いて $\int_0^\infty \ln x \, dx/(x^2 + a^2)$ を求めよ。
- (4) $J(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda(x^2 + cx^4)} dx$ の $\lambda \rightarrow \infty$ における主項と最初の補正項を求めよ。
- (5) (4) の展開に必要な一様な支配関数を説明し、 $c = 0$ で厳密な Gaussian 積分と一致することを確かめよ。

第 4 回 境界と近似：散乱・高分子・正規 モード・非線形波

13 第 4 回・問 1：有限幅障壁の量子透過と共鳴

難易度：標準～応用 推奨時間：45 分 配点：25 点（5 小問・各 5 点）

$V(x) = V_0 > 0$ ($0 < x < L$)、それ以外で 0 という一次元の矩形ポテンシャル障壁を考える。質量 m 、エネルギー $E > 0$ の粒子が左から入射する。 $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ とする。

- (1) 各領域の波動関数を右行波・左行波の組として書き、 $x = 0, L$ で必要な接続条件を列挙せよ。
- (2) $0 < E < V_0$ とする。 $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ を用い、透過確率 $T(E)$ を求めよ。
- (3) (2) で $\kappa L \gg 1$ としたときの指数的な透過率を求め、WKB の作用積分と比較せよ。
- (4) $E > V_0$ のとき $q = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$ と置き、 $T(E)$ および共鳴透過の条件を求めよ。
- (5) $V_0 \rightarrow \infty, L \rightarrow 0, V_0 L = g > 0$ 固定の極限でデルタ障壁の透過確率を導け。

14 第 4 回・問 2：張力による高分子鎖のエントロピー弾性

難易度：標準 推奨時間：40 分 配点：25 点（5 小問・各 5 点）

N 本の独立な結合からなる一次元鎖を考える。各結合は $s_i = \pm 1$ の方向を向き長さ $a > 0$ をもつ。全伸長は $L = a \sum_i s_i$ 。外力 f を加えた Hamiltonian は $H_f = -fL$ とする。 $\beta = (k_B T)^{-1}$ 。

- (1) 分配関数 $Z_N(T, f)$ と外力固定の自由エネルギー $F(T, f)$ を求めよ。
- (2) 平均伸長 $\langle L \rangle$ と微分感受率 $\chi_L = \partial \langle L \rangle / \partial f$ を求めよ。
- (3) 長さの分散 $\text{Var } L$ を求め、揺らぎ・応答公式を示せ。
- (4) 外力がないとき長さ L をもつ微視状態数を数え、 $N \gg 1$ でのエントロピー $S(L)$ を Stirling 近似で表せ。
- (5) 一定伸長を維持する力を $f_{\text{ent}}(L) = -T \partial S / \partial L$ で定義し、弱伸長極限が Hooke の法則になることを示せ。

15 第 4 回・問 3：二質点連成振動と断熱不変量

難易度：標準～応用 推奨時間：40 分 配点：25 点（5 小問・各 5 点）

同じ質量 $m > 0$ の二粒子が一直線上を動く。各質点を壁と結ぶばね定数は $k > 0$ 、二質点を結ぶばね定数は $K \geq 0$ 。平衡位置からの微小変位を x_1, x_2 とする。

- (1) Lagrange 関数と運動方程式を求めよ。
- (2) 正規座標 $q_+ = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$, $q_- = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$ を導入し、二つの固有角周波数を求めよ。
- (3) 初期条件 $x_1(0) = A$, $x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ の運動を求めよ。
- (4) $K \ll k$ の極限で包絡のうなりの周期を求めよ。
- (5) $K = K(t)$ をゆっくり変える。 $\omega_-(t)$ の変化について断熱条件を明示し、作用変数 $I_- = E_-/\omega_-$ の振る舞いを述べよ。

16 第 4 回・問 4：特性曲線・衝撃波・粘性解

難易度：標準～応用 推奨時間：45 分 配点：25 点（5 小問・各 5 点）

実関数 $u(x, t)$ が非粘性 Burgers 方程式 $\partial_t u + u \partial_x u = 0$ に従う。初期値を $u(x, 0) = u_0(x)$ とする。

- (1) 特性曲線による解 $x = \xi + tu_0(\xi)$, $u(x, t) = u_0(\xi)$ を導け。
- (2) $u_0(x) = -ax$ ($a > 0$) の解を求め、最初に勾配が発散する時刻を求めよ。
- (3) 一般に滑らかな u_0 の勾配破綻条件を求めよ。
- (4) $u_L > u_R$ の Riemann 初期値 $u_0(x) = u_L$ ($x < 0$)、 u_R ($x > 0$) に対し、保存則の Rankine–Hugoniot 条件から衝撃波速度を導け。
- (5) 粘性係数 $\nu > 0$ を加えた $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$ における定常進行衝撃波 $u(x, t) = U(x - st)$ を求め、 $\nu \rightarrow 0^+$ の極限を述べよ。

第 5 回 発展を含む総合演習：量子情報・ 相転移・放射・固有関数

17 第 5 回・問 1：Bell 状態と量子相関（+ α ）

難易度：応用・発展 推奨時間：45 分 配点：25 点（5 小問・各 5 点）

二つの量子ビット A, B に対し、 $|\Phi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ を考える。Pauli 行列を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ とする。二準位の計算基底で $\sigma_z|0\rangle = |0\rangle, \sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$ とする。

- (1) $\rho = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$ を行列で表し、規格化と純粋性 $\rho^2 = \rho$ を確認せよ。
- (2) 部分トレース $\rho_A = \text{Tr}_B \rho$ と von Neumann エントロピー $S_A = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A)$ を求めよ。
- (3) $C_{xx} = \langle \sigma_x \otimes \sigma_x \rangle, C_{zz} = \langle \sigma_z \otimes \sigma_z \rangle, C_{xz} = \langle \sigma_x \otimes \sigma_z \rangle$ を求めよ。
- (4) $A_0 = \sigma_z, A_1 = \sigma_x, B_0 = (\sigma_z + \sigma_x)/\sqrt{2}, B_1 = (\sigma_z - \sigma_x)/\sqrt{2}$ とする。CHSH 量 $B = \langle A_0 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_0 - A_1 \otimes B_1 \rangle$ を求めよ。
- (5) 位相緩和した混合状態 $\rho_p = (1-p)\rho + \frac{p}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$ ($0 \leq p \leq 1$) を考える。 ρ_A, C_{xx}, C_{zz} を求め、混合状態では部分系エントロピーだけからエンタングルメントを判定できない理由を説明せよ。

18 第 5 回・問 2：Curie–Weiss 模型と平均場相転移

難易度：標準～応用 推奨時間：45 分 配点：25 点（5 小問・各 5 点）

N 個の Ising スピン $s_i = \pm 1$ に $\mathcal{H} = -\frac{J}{2N}(\sum_i s_i)^2 - h \sum_i s_i$ ($J > 0$) を与える。熱力学極限で 1 スピン平均磁化 $m = N^{-1} \sum_i s_i$ を考える。

(1) 固定磁化 m をもつ状態数の Stirling 近似から、磁化自由エネルギー密度

$$\phi(m) = -\frac{J}{2}m^2 - hm + k_B T \left[\frac{1+m}{2} \ln \frac{1+m}{2} + \frac{1-m}{2} \ln \frac{1-m}{2} \right]$$

を導け。

(2) $\phi'(m) = 0$ を用い、自己無撞着方程式 $m = \tanh[\beta(Jm + h)]$ を導け。

(3) $h = 0$ 、 $|m| \ll 1$ で $\phi(m)$ を 4 次まで展開し、臨界温度を求めよ。

(4) $T < T_c$ の臨界温度近傍の自発磁化 $m_*(T)$ の先頭次数を求め、安定解を指定せよ。

(5) $T > T_c$ の常磁性相で $\chi = \partial m / \partial h|_{h=0}$ を求めよ。 $T \downarrow T_c$ での振る舞いを述べよ。

19 第 5 回・問 3：時間変化する電気双極子からの放射

難易度：標準～応用 推奨時間：45 分 配点：25 点（5 小問・各 5 点）

真空中の空間的に局在した電荷・電流分布の電気双極子モーメントを $\mathbf{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \hat{z}$ ($p_0, \omega > 0$) とする。源の大きさは波長より十分小さい。観測点は $r \gg$ 波長、遅延時刻 $t_r = t - r/c$ 、 $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ とする。必要なら遠方放射場の関係 $\mathbf{B}_{\text{rad}} = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}/c$ を用いてよい。

- (1) retarded potential の遠方展開を用い、 $1/r$ 次の電場が $\ddot{\mathbf{p}}(t_r)$ の横成分に比例することを説明せよ。
- (2) $\mathbf{E}_{\text{rad}}$ と $\mathbf{B}_{\text{rad}}$ を $\hat{\mathbf{r}}$ と $\ddot{\mathbf{p}}(t_r)$ で表せ。
- (3) θ を $\hat{z}$ と観測方向のなす角として、放射電場の大きさと、周期平均 Poynting 流束を求めよ。
- (4) 単位立体角当たりの放射パワー $d\bar{P}/d\Omega$ と総放射パワー $\bar{P}$ を計算せよ。
- (5) $\omega \rightarrow 0$ における放射と、静的な双極子近接場の距離依存性を比較せよ。

20 第 5 回・問 4：Sturm–Liouville 固有関数と Green 関数

難易度：標準 推奨時間：45 分 配点：25 点 (5 小問・各 5 点)

$0 < x < L$ で $\mathcal{L}_0 = -d^2/dx^2$ を Dirichlet 条件 $y(0) = y(L) = 0$ のもとで考える。 $L > 0, \kappa > 0$ とする。

- (1) 固有値問題 $\mathcal{L}_0 y = \lambda y$ の固有値 λ_n と規格化固有関数 $\varphi_n(x)$ を求めよ。
- (2) 部分積分を用いて固有値が実数かつ正であること、異なる固有値に属する固有関数が直交することを示せ。
- (3) $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \kappa^2$ の Dirichlet Green 関数 $G(x, \xi)$ を求めよ。 $x_{<} := \min(x, \xi), x_{>} := \max(x, \xi)$ と書いてよい。
- (4) G の $x = \xi$ での微分の跳びを確認し、固有関数展開を示せ。
- (5) $\mathcal{L}y = 1$ の境界値問題を直接解き、 $y(x) = \int_0^L G(x, \xi) d\xi$ と等しいことを説明せよ。

第 II 部

解答・解説編

第 1 回 模範解答と採点上の要点

1 問 1：調和振動子の微小変形と外力クエンチ（詳解）

原理：正準交換関係、非縮退定常摂動論、平方完成、Heisenberg 方程式、coherent state の重なり。

(1：生成消滅演算子と位置の分散（4 点）)

$a^\dagger = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}x - ip/\sqrt{2m\hbar\omega}$ である。 $[x, p] = i\hbar$ から

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad x = x_*(a + a^\dagger), \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a). \quad (4)$$

従って $H_0 = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ 、 $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ 、 $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ 。

$$x^2 = x_*^2(a^2 + (a^\dagger)^2 + 2a^\dagger a + 1), \quad (5)$$

$$\langle n|x^2|n\rangle = x_*^2(2n+1) = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (6)$$

奇数べきの位置の対角行列要素は偶奇性によりゼロである。

検算・採点上の注意：交換関係 1 点、 H_0 表示 1 点、 x^2 の展開と期待値 2 点。

(2：摂動によるエネルギー補正（4 点）)

$V_\varepsilon = \varepsilon m\omega^2 x^2/2$ の 1 次補正は

$$E_n^{(1,\varepsilon)} = \frac{\varepsilon m\omega^2}{2} \langle n|x^2|n\rangle = \frac{\varepsilon\hbar\omega}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (7)$$

$V_F = -Fx$ の 1 次補正は対称性によりゼロ。非縮退摂動論で、 x が $n \pm 1$ のみをつなぐことから

$$E_n^{(2,F)} = F^2 \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k|x|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \quad (8)$$

$$= F^2 x_*^2 \left(\frac{n}{\hbar\omega} - \frac{n+1}{\hbar\omega} \right) = -\frac{F^2}{2m\omega^2}. \quad (9)$$

εF の 2 次混合項は x^2 が偶パリティ、 x が奇パリティなので 0 となる。従って、指定次数では

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\varepsilon\hbar\omega}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{F^2}{2m\omega^2} + O(\varepsilon^2, \varepsilon F^2, F^4). \quad (10)$$

ここで記号 $O(\varepsilon^2, \varepsilon F^2, F^4)$ は ε の 2 次以上、 εF^2 および F の 4 次以上の省略を示す（力に関する奇数次数は厳密解で消える）。

検算・採点上の注意： ε 1 次 1 点、 F 1 次消滅 1 点、 F^2 2 次 1 点、混合項の説明 1 点。

典型的な誤答：外力による 2 次シフトを正とすること。分母の符号を $k = n \pm 1$ ごとに保持する必要がある。

(3：基底状態の摂動と分極 (5 点))

一般の非縮退 1 次固有ベクトル補正は

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle + \sum_{k \geq 1} \frac{\langle k | (V_\varepsilon + V_F) | 0 \rangle}{E_0^{(0)} - E_k^{(0)}} |k\rangle + O(\varepsilon^2, \varepsilon F, F^2). \quad (11)$$

$\langle 1 | x | 0 \rangle = x_*$ 、 $\langle 2 | x^2 | 0 \rangle = \sqrt{2}x_*^2$ を用いると

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle + \frac{Fx_*}{\hbar\omega} |1\rangle - \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{8} |2\rangle + O(\varepsilon^2, \varepsilon F, F^2). \quad (12)$$

係数 $-\varepsilon\sqrt{2}/8$ は $(\varepsilon m\omega^2\sqrt{2}x_*^2/2)/(-2\hbar\omega)$ から出る。位置期待値は $\varepsilon = 0$ の線形応答で

$$\langle x \rangle = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{Fx_*}{\hbar\omega} \langle 0 | x | 1 \rangle \right] = \frac{2Fx_*^2}{\hbar\omega} = \boxed{\frac{F}{m\omega^2}} + O(F^3). \quad (13)$$

厳密解では $\langle x \rangle = F/[m\omega^2(1+\varepsilon)]$ なので $O(\varepsilon F)$ の交差補正は上式の精度外である。表示した 1 次状態のノルムは $1 + O(\varepsilon^2, F^2, \varepsilon F)$ 、よって規格化のずれは 2 次から始まる。

検算・採点上の注意：摂動論の公式 1 点、 $|1\rangle$ 係数 1 点、 $|2\rangle$ 係数 1 点、期待値 1 点、規格化次数 1 点。

典型的な誤答： ε と F を同時に 1 次まで残した式を用いて εF の係数も確定したと誤認すること。2 次状態補正が必要である。

(4：平方完成による厳密解 (4 点))

$\Omega = \omega\sqrt{1+\varepsilon} > 0$ と $x_c = F/(m\Omega^2)$ を定義する。すると

$$H_{\varepsilon, F} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2}(x - x_c)^2 - \frac{F^2}{2m\Omega^2}, \quad (14)$$

$$\boxed{E_n(\varepsilon, F)} = \boxed{\hbar\omega\sqrt{1+\varepsilon}\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{F^2}{2m\omega^2(1+\varepsilon)}}. \quad (15)$$

定数 x_c の並進はエネルギー間隔を変更せず、ばね定数変更のみが Ω を変える。 $\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \varepsilon/2 - \varepsilon^2/8 + O(\varepsilon^3)$ 、 $(1+\varepsilon)^{-1} = 1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)$ なので

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8}\varepsilon^2\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (16)$$

$$- \frac{F^2}{2m\omega^2} + \frac{\varepsilon F^2}{2m\omega^2} + O(\varepsilon^3, \varepsilon^2 F^2). \quad (17)$$

(2) に一致し、 εF は確かでない。単位 $[F^2/(m\omega^2)] = \text{energy}$ でも確認できる。

検算・採点上の注意：有効周波数 1 点、平方完成 1 点、エネルギー 1 点、次数比較 1 点。

(5：突然加えた外力と運動 (4 点))

$t \geq 0$ に $H = H_0 - Fx$ で発展する。Heisenberg 方程式より

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -m\omega^2 x + F, \quad \ddot{x} + \omega^2 x = F/m. \quad (18)$$

$x_H(0) = x, p_H(0) = p$ を用いて

$$x_H(t) = x \cos \omega t + \frac{p}{m\omega} \sin \omega t + \frac{F}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t), \quad (19)$$

$$p_H(t) = p \cos \omega t - m\omega x \sin \omega t + \frac{F}{\omega} \sin \omega t. \quad (20)$$

初期状態が H_0 の基底状態なので $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$ 。従って

$$\boxed{\langle x(t) \rangle = \frac{F}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)}, \quad \boxed{\langle p(t) \rangle = \frac{F}{\omega} \sin \omega t}. \quad (21)$$

演算子の変動部分は自由調和振動子の回転なので基底状態の分散は一定：

$$(\Delta x)^2 = x_*^2, \quad (\Delta p)^2 = \frac{m\hbar\omega}{2}, \quad \boxed{\Delta x(t)\Delta p(t) = \frac{\hbar}{2}}. \quad (22)$$

すなわち波束の中心は動くが波束の幅は変化しない。

検算・採点上の注意：運動方程式 1 点、 $\langle x \rangle$ 1 点、 $\langle p \rangle$ 1 点、不確定性 1 点。

(6：基底状態への回帰確率 (4 点))

$g = Fx_*/(\hbar\omega)$ (無次元) とおく。外力つき調和振動子は元の基底状態を coherent state へ移す。生成消滅演算子の Heisenberg 方程式から

$$a_H(t) = ae^{-i\omega t} + g(1 - e^{-i\omega t}). \quad (23)$$

従って Schrödinger 表示の状態は、全体位相を除き、変位振幅 $\alpha(t) = g(1 - e^{-i\omega t})$ の coherent state $|\alpha(t)\rangle$ に等しい。規格化された coherent state の展開 $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ から

$$P_0(t) = |\langle 0 | \alpha(t) \rangle|^2 = e^{-|\alpha(t)|^2} = \boxed{\exp \left[-4 \left(\frac{Fx_*}{\hbar\omega} \right)^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2} \right]}. \quad (24)$$

$F \rightarrow 0$ で $P_0 \rightarrow 1$ 、 $t = 2\pi\ell/\omega$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) で $P_0 = 1$ 。 F が微小なら $P_0 = 1 - 4g^2 \sin^2(\omega t/2) + O(F^4)$ 。
 P_0 は無次元かつ $0 < P_0 \leq 1$ である。

検算・採点上の注意：変位振幅 2 点、重なり 1 点、極限と周期 1 点。

典型的な誤答：振幅 $\langle 0 | \alpha \rangle = e^{-|\alpha|^2/2}$ と、確率 $e^{-|\alpha|^2}$ の取り違い。

2 問 2：三次元理想 Bose 気体と異方的分散（詳解）

原理：熱力学極限の状態計数、Bose 分布、Gaussian 積分、粒子数制約の陰関数微分、楕円体の体積。

(1：状態密度（4 点）)

周期境界では 1 状態の波数空間体積は $(2\pi)^3/V$ である。 k の球殻内にある状態数は

$$dN = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk, \quad k = \frac{\sqrt{2m\epsilon}}{\hbar}, \quad \frac{dk}{d\epsilon} = \frac{m}{\hbar\sqrt{2m\epsilon}}. \quad (25)$$

したがって励起状態の連続状態密度は

$$D(\epsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} \quad (\epsilon > 0). \quad (26)$$

$[D] = [\text{energy}]^{-1}$ 。 $k = 0$ の基底準位は別に数え、熱力学極限でも N_0 が巨視的となり得ることを意識する。

検算・採点上の注意：波数空間の状態体積 1 点、球殻計数 1 点、変数変換 1 点、係数と次元 1 点。

(2：Bose 分布の積分（4 点）)

励起準位の平均占有数は $(z^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1)^{-1}$ 。 $0 < z < 1$ で

$$\frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1} = \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} e^{-\ell\beta\epsilon}. \quad (27)$$

Tonelli の定理（非負項）で積分と和を交換し、 $\int_0^{\infty} \epsilon^{1/2} e^{-a\epsilon} d\epsilon = \Gamma(3/2)a^{-3/2}$ と $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ を使うと

$$N_{\text{ex}} = \int_0^{\infty} \frac{D(\epsilon)d\epsilon}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1} \quad (28)$$

$$= \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (k_B T)^{3/2} \sum_{\ell \geq 1} \frac{z^{\ell}}{\ell^{3/2}} \quad (29)$$

$$= \boxed{\frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z)}. \quad (30)$$

$z \uparrow 1$ には単調収束で拡張できる。

検算・採点上の注意：分布と級数 1 点、積分 1 点、 Γ 関数 1 点、熱波長への整理 1 点。

(3：臨界温度と凝縮割合 (4 点))

$\mu \leq 0$ なので励起状態に入る最大粒子数は $z = 1$ での $N_{\text{ex}}^{\text{max}} = V\lambda_T^{-3}\zeta(3/2)$ 。 $T = T_c$ で $N = N_{\text{ex}}^{\text{max}}$ と置き

$$n = \left(\frac{mk_{\text{B}}T_c}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \zeta(3/2), \quad T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_{\text{B}}} \left(\frac{n}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}. \quad (31)$$

$T < T_c$ で $z = 1$ 、余剰粒子は基底状態に入るため

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_{\text{ex}}}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}. \quad (32)$$

$T \downarrow 0$ で $N_0/N \rightarrow 1$ 、 $T \uparrow T_c$ で 0 となる。

検算・採点上の注意：飽和粒子数 1 点、 T_c 1 点、凝縮割合 1 点、極限の説明 1 点。

(4：エネルギーと凝縮相の比熱 (4 点))

基底状態エネルギーは 0 と取り、

$$U = \int_0^\infty \frac{\epsilon D(\epsilon) d\epsilon}{z^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1} = \left[\frac{3}{2} \frac{V k_{\text{B}} T}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z) \right]. \quad (33)$$

$\Gamma(5/2) = (3/2)\Gamma(3/2)$ により係数 $3/2$ が付く。凝縮相では $z = 1$ なので U は $T^{5/2}$ に比例し

$$U_{<} = \frac{3}{2} N k_{\text{B}} T \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)}, \quad (34)$$

$$C_{V,<} = \frac{15}{4} N k_{\text{B}} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)}. \quad (35)$$

$T \rightarrow 0$ で $C_V \rightarrow 0$ 。

検算・採点上の注意：エネルギー積分 2 点、凝縮相の式 1 点、微分と極限 1 点。

(5：非凝縮相の比熱と連続性 (5 点))

$T > T_c$ で $N = V \lambda_T^{-3} g_{3/2}(z)$ は一定。 $z (d/dz) g_s(z) = g_{s-1}(z)$ に注意して温度微分すると

$$0 = \frac{3}{2T} + \frac{g_{1/2}(z)}{z g_{3/2}(z)} \frac{dz}{dT}, \quad \boxed{\frac{dz}{dT} = -\frac{3z g_{3/2}(z)}{2T g_{1/2}(z)}}. \quad (36)$$

$U = (3/2) N k_B T g_{5/2}(z) / g_{3/2}(z)$ を微分し、上式を代入して

$$\boxed{\frac{C_{V,>}}{N k_B} = \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}}. \quad (37)$$

ここで $T \downarrow T_c$ では $z \uparrow 1$ 、 $g_{1/2}(z) \rightarrow \infty$ 、 $g_{3/2}(z) \rightarrow \zeta(3/2)$ 、 $g_{5/2}(z) \rightarrow \zeta(5/2)$ なので

$$\lim_{T \downarrow T_c} \frac{C_{V,>}}{N k_B} = \frac{15}{4} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} = \lim_{T \uparrow T_c} \frac{C_{V,<}}{N k_B}. \quad (38)$$

したがって C_V は臨界温度で連続である（一般に温度微分は滑らかではない）。 $z \ll 1$ の古典極限では $g_s(z) \simeq z$ から $C_V / (N k_B) \rightarrow 3/2$ となる。

検算・採点上の注意：粒子数微分 1 点、 dz/dT 1 点、エネルギー微分 2 点、連続極限 1 点。

典型的な誤答：凝縮相で $z < 1$ として粒子数を解き続けること。また $T > T_c$ で z を固定したまま C_V を計算すること。

(6：異方的有効質量 (4 点))

等エネルギー面は $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 / \alpha = 2m\epsilon / \hbar^2$ という楕円体。変数 $q_z = k_z / \sqrt{\alpha}$ とすると $d^3k = \sqrt{\alpha} dk_x dk_y dq_z$ 。従って

$$\boxed{D_\alpha(\epsilon) = \sqrt{\alpha} D_1(\epsilon)}, \quad N_{\text{ex}}^{\text{max}}(\alpha) = \sqrt{\alpha} \frac{V}{\lambda_T^3} \zeta(3/2). \quad (39)$$

同じ N, V, m について $n \propto \sqrt{\alpha} T_c(\alpha)^{3/2}$ なので

$$\boxed{\frac{T_c(\alpha)}{T_c(1)} = \alpha^{-1/3}}. \quad (40)$$

$\alpha = 1$ で元に戻り、 α が大きいほど低エネルギーの状態数が増え凝縮温度が低下する。 α を熱力学極限中に無限大へ発散させる場合は、この固定 α の議論は適用できない。

検算・採点上の注意：楕円体変数変換 1 点、状態密度 1 点、臨界条件 1 点、臨界温度比 1 点。

3 問 3：Fresnel 係数・エネルギー保存と単層無反射膜（詳解）

原理：巨視的 Maxwell 方程式、境界における位相連続、接線電磁場の境界条件、Poynting ベクトル、薄膜多重反射。

(1：波数と磁場 (3 点))

電荷・電流がない均一媒質で、時間因子 $e^{-i\omega t}$ と平面波 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ を代入すると

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega\mu_0\mathbf{H}_0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\omega\epsilon_0 n^2 \mathbf{E}_0. \quad (41)$$

Gauss 則より $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0 = 0$ 。前式の外積から

$$\boxed{|\mathbf{k}| = \frac{n\omega}{c}}, \quad \boxed{\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\omega\mu_0} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \frac{n}{\mu_0 c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0}. \quad (42)$$

磁場の単位は A/m で、 $E/H = \mu_0 c/n$ は電磁波インピーダンスに等しい。

検算・採点上の注意：Maxwell の代入 1 点、分散関係 1 点、磁場と方向 1 点。

(2：反射角と屈折角 (3 点))

界面 $z = 0$ の任意の x, t に対して入射・反射・透過の位相が整合する必要がある、

$$k_{xi} = k_{xr} = k_{xt}, \quad \omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega. \quad (43)$$

$k_{xi} = n_1(\omega/c) \sin \theta_i$ 、 $k_{xt} = n_2(\omega/c) \sin \theta_t$ だから

$$\boxed{\theta_r = \theta_i}, \quad \boxed{n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t}. \quad (44)$$

全反射の領域では θ_t を実数とみなさず、接線波数を保って透過側の法線波数を複素数として扱う。

検算・採点上の注意：位相整合 1 点、反射角 1 点、Snell 則 1 点。

(3：TE 偏光 (4 点))

TE では $\mathbf{E} \parallel \hat{\mathbf{y}}$ 、前問の $\mathbf{H}_0 = (n/\mu_0 c) \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0$ より、進行波の接線磁場 H_x は

$$H_x^{(i)} = -\frac{n_1 \cos \theta_i}{\mu_0 c} E_y^{(i)}, \quad H_x^{(r)} = +\frac{n_1 \cos \theta_i}{\mu_0 c} E_y^{(r)}, \quad H_x^{(t)} = -\frac{n_2 \cos \theta_t}{\mu_0 c} E_y^{(t)}. \quad (45)$$

境界条件 $E_y^{(i)} + E_y^{(r)} = E_y^{(t)}$ および $H_x^{(i)} + H_x^{(r)} = H_x^{(t)}$ から

$$1 + r_s = t_s, \quad n_1 \cos \theta_i (1 - r_s) = n_2 \cos \theta_t t_s. \quad (46)$$

連立方程式を解き

$$\boxed{r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}}, \quad \boxed{t_s = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}}. \quad (47)$$

検算・採点上の注意：磁場の方向 1 点、二つの境界条件 1 点、 r_s 1 点、 t_s 1 点。

(4：TM 偏光 (4 点))

TM では接線電場 E_x を振幅とするので、全電場の大きさではなく、進行側で $H_y = (n/\mu_0 c \cos \theta) E_x$ 、反射側では符号が反対である。従って

$$1 + r_p = t_p, \quad \frac{n_1}{\cos \theta_i} (1 - r_p) = \frac{n_2}{\cos \theta_t} t_p. \quad (48)$$

これを解いて

$$\boxed{r_p = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}}, \quad \boxed{t_p = \frac{2n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}}. \quad (49)$$

文献でよく見る $r_p = (n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t)/(\dots)$ は、反射光の電場の偏光基底を別向きに取った全電場振幅の係数である。本問の接線 E_x 基準では上記の符号となり、垂直入射では $r_p = r_s = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ が成立する。

検算・採点上の注意： H_y/E_x の幾何因子 1 点、二つの境界条件 1 点、 r_p 1 点、 t_p 1 点。

典型的な誤答：TE の $n \cos \theta$ を TM にもそのまま使うこと。TM は振幅を E_x と定義したので、磁場との比は $n/\cos \theta$ である。

(5：反射率と透過率 (4 点))

時間平均 Poynting ベクトルは $\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*)$ 。界面に垂直なエネルギー流束の大きさは、TE 偏光では $\bar{S}_z = n \cos \theta |E_y|^2 / (2\mu_0 c)$ 、TM 偏光では $\bar{S}_z = n |E_x|^2 / (2\mu_0 c \cos \theta)$ 。したがって屈折角が実数の領域で

$$\boxed{R_s = |r_s|^2}, \quad \boxed{T_s = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} |t_s|^2}, \quad (50)$$

$$\boxed{R_p = |r_p|^2}, \quad \boxed{T_p = \frac{n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t} |t_p|^2}. \quad (51)$$

一般に $y_1, y_2 > 0$ を TE では $y_j = n_j \cos \theta_j$ 、TM では $y_j = n_j / \cos \theta_j$ とおくと、両者とも

$$r = \frac{y_1 - y_2}{y_1 + y_2}, \quad t = \frac{2y_1}{y_1 + y_2}, \quad R + T = \frac{(y_1 - y_2)^2 + 4y_1y_2}{(y_1 + y_2)^2} = \boxed{1}. \quad (52)$$

ここで媒質は損失がなく、界面にも散逸がないことが本質である。

検算・採点上の注意：流束 1 点、TE の係数 1 点、TM の係数 1 点、恒等式 1 点。

(6：Brewster 角と全反射 (4 点))

TM で $r_p = 0$ となる条件は $n_1 \cos \theta_t = n_2 \cos \theta_i$ 。Snell 則 $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ と併せて $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ となり、

$$\boxed{\theta_B = \arctan \left(\frac{n_2}{n_1} \right)} \quad (n_1 \neq n_2). \quad (53)$$

$n_1 = n_2$ では全入射角で反射がなく、孤立した Brewster 角は特定できない。 $n_1 > n_2$ のときは

$$\boxed{\theta_c = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)}. \quad (54)$$

$\theta_i > \theta_c$ では接線波数 $k_x = (\omega/c)n_1 \sin \theta_i$ が媒質 2 の波数 $n_2\omega/c$ を超え、

$$k_{z,2} = i\kappa, \quad \boxed{\kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}. \quad (55)$$

$z > 0$ での透過側 TE 電場は $e^{-\kappa z}$ と減衰する。 r_s は位相を持つが $|r_s| = 1$ 、単一 evanescent 波の時間平均法線エネルギー流束は 0。

検算・採点上の注意：Brewster 1 点、臨界角 1 点、減衰定数 1 点、物理的意味 1 点。

(7：単層薄膜と無反射条件 (3 点))

ここでは垂直入射のみ。媒質 i から j の電場振幅反射係数 $r_{ij} = (n_i - n_j)/(n_i + n_j)$ と置く。薄膜の一往復の位相は 2ϕ 、 $\phi = (\omega/c)n_2d = 2\pi n_2d/\lambda_0$ 。多重反射の幾何級数を足すと ($r_{21} = -r_{12}$ を使用)

$$\boxed{r_{\text{film}} = \frac{r_{12} + r_{23}e^{2i\phi}}{1 + r_{12}r_{23}e^{2i\phi}}}. \quad (56)$$

設計膜厚 $d = \lambda_0/(4n_2)$ のとき $\phi = \pi/2$ 、すなわち $e^{2i\phi} = -1$ 。また $n_2^2 = n_1n_3$ なら

$$\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} \iff r_{12} = r_{23}. \quad (57)$$

ゆえに分子 $r_{12} - r_{23} = 0$ 、 $r_{\text{film}} = 0$ 。損失なしゆえ反射率 0、透過率 1 となる。例えば $n_1 = 1$, $n_3 = 2.25$ では $n_2 = 1.5$ 、 $d = \lambda_0/6$ が設計条件である。

検算・採点上の注意：往復位相 1 点、反射振幅の幾何級数 1 点、無反射条件 1 点。

典型的な誤答：薄膜内の往復位相 2ϕ と片道位相 ϕ を混同すること。

4 問 4：行列指数・減衰振動・Green 関数（詳解）

原理：Cayley–Hamilton 定理、行列指数の冪級数、Jordan 標準形、因果的 Green 関数、Fourier 応答。

(1：固有値と二次関係 (4 点))

$x' = v$ 、 $v' = -\omega_0^2 x - 2\gamma v + f$ より $f = 0$ の場合 $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ 。

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \omega_0^2 & \lambda + 2\gamma \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2. \quad (58)$$

$\Delta^2 = \gamma^2 - \omega_0^2$ として

$$\boxed{\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \Delta}. \quad (59)$$

Cayley–Hamilton 定理で $A^2 + 2\gamma A + \omega_0^2 I = 0$ 。従って

$$\boxed{B^2 = (A + \gamma I)^2 = (\gamma^2 - \omega_0^2)I = \Delta^2 I}. \quad (60)$$

検算・採点上の注意：一次化 1 点、特性多項式 1 点、固有値 1 点、二次関係 1 点。

(2：行列指数の閉形式 (4 点))

$A = -\gamma I + B$ で I, B は可換ゆえ $e^{At} = e^{-\gamma t} e^{Bt}$ 。 $B^{2k} = \Delta^{2k} I$ 、 $B^{2k+1} = \Delta^{2k} B$ を級数に代入すると

$$e^{Bt} = \sum_{k \geq 0} \frac{(\Delta t)^{2k}}{(2k)!} I + \sum_{k \geq 0} \frac{\Delta^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} B \quad (61)$$

$$= \cosh(\Delta t) I + \frac{\sinh(\Delta t)}{\Delta} B. \quad (62)$$

よって

$$\boxed{e^{At} = e^{-\gamma t} \left[\cosh(\Delta t) I + \frac{\sinh(\Delta t)}{\Delta} (A + \gamma I) \right]}. \quad (63)$$

$\Delta = i\nu$ でも双曲線関数は複素解析接続によって実行列になる。

検算・採点上の注意：因数分解 1 点、偶数冪 1 点、奇数冪 1 点、最終式 1 点。

(3: 減衰振動領域 (4 点))

$\nu = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} > 0$ 、 $\Delta = i\nu$ を代入すると

$$e^{At} = e^{-\gamma t} \left[\cos(\nu t)I + \frac{\sin(\nu t)}{\nu}(A + \gamma I) \right] \quad (64)$$

$$= e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos \nu t + \frac{\gamma}{\nu} \sin \nu t & \frac{1}{\nu} \sin \nu t \\ -\frac{\omega_0^2}{\nu} \sin \nu t & \cos \nu t - \frac{\gamma}{\nu} \sin \nu t \end{pmatrix}. \quad (65)$$

$y(0) = (x_0, 0)^T$ とすれば

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \left[\cos(\nu t) + \frac{\gamma}{\nu} \sin(\nu t) \right]. \quad (66)$$

$t = 0$ で $x = x_0$ 、 $\dot{x} = 0$ を満たす。

検算・採点上の注意：解析接続 1 点、実行列 2 点、初期値への適用 1 点。

(4: 臨界減衰と Jordan 形 (4 点))

$\gamma = \omega_0 > 0$ では固有値 $-\gamma$ が代数的重複度 2 であるが

$$B = A + \gamma I = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ -\gamma^2 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad B^2 = 0, \quad B \neq 0. \quad (67)$$

$\ker B$ は 1 次元 ($\text{rank } B = 1$) なので独立固有ベクトルは 1 本、 A は対角化できない。指数の冪級数は 1 次で停止して

$$e^{At} = e^{-\gamma t}(I + tB) = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} 1 + \gamma t & t \\ -\gamma^2 t & 1 - \gamma t \end{pmatrix}, \quad (68)$$

$$x(t) = x_0(1 + \gamma t)e^{-\gamma t}. \quad (69)$$

(3) から $\nu \rightarrow 0$ を取っても $\sin(\nu t)/\nu \rightarrow t$ より一致する。

検算・採点上の注意：nilpotent B 1 点、非対角化可能 1 点、指数 1 点、初期値と極限 1 点。

典型的な誤答：重根だから必ず $A = -\gamma I$ とすること。固有値重複と対角化可能性は別問題である。

(5: 因果的 Green 関数 (4 点))

$t \neq 0$ で斉次方程式を満たす因果的関数として $G(t) = \Theta(t)e^{-\gamma t} \sin(\nu t)/\nu$ を取る。 $G(0+) = G(0-) = 0$ とし、方程式を 0 の微小近傍で積分すると

$$\dot{G}(0+) - \dot{G}(0-) = 1. \quad (70)$$

上記の関数は $\dot{G}(0+) = 1, \dot{G}(0-) = 0$ を満たすので確かに $\delta(t)$ を生成する。

$$G(t) = \Theta(t)e^{-\gamma t} \frac{\sin \nu t}{\nu}. \quad (71)$$

初期条件が $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ のとき、 $t \geq 0$ で

$$x(t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \frac{\sin[\nu(t-s)]}{\nu} f(s) ds. \quad (72)$$

もし $f(s) = J\delta(s - s_0)$ ($s_0 > 0$) なら $x(t) = JG(t - s_0)$ 。

検算・採点上の注意：因果条件 1 点、ジャンプ条件 1 点、Green 関数 1 点、畳み込み 1 点。

(6: 周波数応答 (3 点))

$\gamma > 0$ の定常解を $\tilde{x}(t) = \chi(\Omega)f_0e^{-i\Omega t}$ と仮定すると $\dot{\tilde{x}} = -i\Omega\tilde{x}, \ddot{\tilde{x}} = -\Omega^2\tilde{x}$ 。

$$(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega)\chi(\Omega) = 1, \quad \chi(\Omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega}. \quad (73)$$

χ の次元は時間²。 $\gamma > 0$ のとき斉次解は減衰し、この定常応答が長時間後に残る。

検算・採点上の注意：Fourier 規約 1 点、分母 1 点、定常解の物理的意味 1 点。

(7: エネルギーによる安定性 (2 点))

$f = 0$ なら

$$\dot{E} = \dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = -2\gamma\dot{x}^2 \leq 0. \quad (74)$$

$\gamma > 0, \omega_0 > 0$ において E は正定値で単調非増加。 $\dot{E} = 0$ が全時刻で保たれる軌道では $\dot{x} = 0$ 、さらに運動方程式から $x = 0$ 。従って唯一の不変集合は原点であり、LaSalle の不変性原理、または (1) の固有値の実部がすべて負という事実により、原点は漸近安定である。

検算・採点上の注意：エネルギーの微分 1 点、漸近安定の根拠 1 点。

検算・表記規約・出典上の扱い

- 量子力学： $[x, p] = i\hbar$ 、状態は $\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$ に規格化。外力はポテンシャル $-Fx$ によって導入した。
- 統計力学：粒子スピンの縮退度は 1、基底準位のエネルギーは 0、 $N, V \rightarrow \infty$ を固定密度で取った。
- 電磁気学：SI 単位系。全媒質 $\mu = \mu_0$ 、複素振幅の時間因子は $e^{-i\omega t}$ 。TM 反射係数は接線電場 E_x を用いるため、偏光基底の慣習によって文献の符号と異なることがある。
- 数学：Green 関数は因果的、Fourier の時間因子は $e^{-i\Omega t}$ 。臨界減衰 $\gamma = \omega_0$ は極限で処理した。
- 検算プログラムとその結果は編集ソース ZIP の checks/ に同梱。プログラムが確認できるのは指定の代数恒等式・数値例等であり、全ての説明を独立に形式証明したという意味ではない。

分野別索引

量子力学	問 1 詳解：正準交換関係、定常摂動、coherent state、クエンチ
統計力学	問 2 詳解：Bose 分布、凝縮、比熱、異方的状態密度
電磁気学	問 3 詳解：Maxwell 境界条件、TE・TM、Poynting 流束、薄膜干渉
数学	問 4 詳解：固有値、Cayley–Hamilton、Jordan 形、Green 関数

第 2 回 模範解答と採点上の要点

5 第 2 回・問 1：駆動二準位系（解答）

(1) $E_{\pm} = \pm \hbar \omega_0 / 2$ 。 $\langle + | \sigma_x | - \rangle = 1$, $\langle \pm | \sigma_x | \pm \rangle = 0$ 。 σ_x は二準位の間だけを結び、遷移周波数は ω_0 である。

(2) 相互作用表示で $\langle + | V_I(t) | - \rangle = \hbar \Omega \cos(\omega t) e^{i\omega_0 t}$ 。 よって

$$c_+^{(1)}(\tau) = -i\Omega \int_0^\tau \cos(\omega t) e^{i\omega_0 t} dt \quad (75)$$

$$= \frac{\Omega}{2} \left[\frac{1 - e^{i(\omega_0 + \omega)\tau}}{\omega_0 + \omega} + \frac{1 - e^{i(\omega_0 - \omega)\tau}}{\omega_0 - \omega} \right]. \quad (76)$$

$\omega = \omega_0$ の第二項は極限をとり $-i\Omega\tau/2$ となる。一次振幅に摂動の有効条件 $|c_+^{(1)}| \ll 1$ が必要。

(3) 有効行列の二固有値は $\pm(\hbar/2)\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}$ 。固有値差は $\hbar\Omega_R$ 、 $\Omega_R = \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}$ である。

(4) $H_{\text{RWA}}^2 = \hbar^2 \Omega_R^2 I / 4$ を使い

$$U_R(t) = \cos \frac{\Omega_R t}{2} I - \frac{i(\Delta \sigma_z + \Omega \sigma_x)}{\Omega_R} \sin \frac{\Omega_R t}{2}.$$

$|-\rangle$ からの遷移確率は

$$P_+(t) = \frac{\Omega^2}{\Delta^2 + \Omega^2} \sin^2 \frac{t\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}}{2}.$$

共鳴 $\Delta = 0$ で完全反転の最短時間は $\tau_\pi = \pi/\Omega$ 。

(5) Δ が小さく $\Omega, |\Delta| \ll \omega_0$ 、かつ $\omega + \omega_0$ に対応する高速振動が平均化される場合、(2) の第 1 項（反回転項）を無視できる。そのとき $c_+^{(1)} \simeq -i(\Omega/2) \int_0^\tau e^{i\Delta t} dt$ となり、 $P \simeq \Omega^2 \sin^2(\Delta\tau/2)/\Delta^2$ 。一方 (4) を $\Omega\tau \ll 1$ で展開すると同じ式になる（ $\Delta\tau$ は任意でよいが $|c_+^{(1)}| \ll 1$ ）。RWA の $\Omega/\omega_0 \ll 1$ と、一次摂動の遷移確率が小さい条件は別である。

検算・採点上の注意：回転波近似は弱駆動の周波数スケール条件であり、RWA 内の時間発展を 1 次摂動に制限しない。

6 第 2 回・問 2: Ising 転送行列 (解答)

$$(1) T = \begin{pmatrix} e^{K+H} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-H} \end{pmatrix}, \quad \prod_i T_{s_i s_{i+1}} = e^{-\beta \mathcal{H}}.$$

$$(2) \operatorname{tr} T = 2e^K \cosh H, \quad \det T = e^{2K} - e^{-2K} \text{ から}$$

$$\lambda_{\pm} = e^K \cosh H \pm \sqrt{e^{2K} \sinh^2 H + e^{-2K}}, \quad Z_N = \lambda_+^N + \lambda_-^N.$$

$$(3) J > 0 \text{ では } \lambda_+ > |\lambda_-|. \quad f = -k_B T \ln \lambda_+. \text{ 微分により}$$

$$m = \frac{\sinh H}{\sqrt{\sinh^2 H + e^{-4K}}}.$$

$h = 0$ で $m = 0$ 、有限温度に自発磁化はない。

$$(4) h = 0 \text{ の伝達行列を二つの固有ベクトルに対角化すると、} \lambda_+/\lambda_- = \coth K, \quad \sigma_z \text{ は二固有空間間をつなぐ。熱力学極限における相関は}$$

$$\langle s_0 s_r \rangle = (\tanh K)^{|r|}, \quad \xi^{-1} = -\ln(\tanh K).$$

$T > 0$ で $0 < \tanh K < 1$ なので相関長は有限。

$$(5) \chi = \beta e^{2K}. \text{ 別経路で } \sum_{r \in \mathbb{Z}} (\tanh K)^{|r|} = (1 + \tanh K)/(1 - \tanh K) = e^{2K} \text{ となり、} \\ \chi = \beta \sum_r \langle s_0 s_r \rangle \text{ と一致する。感受率は粒子 1 個当たりの磁化 } m \text{ を外場エネルギー } h \text{ で微分する規約である。}$$

検算・採点上の注意: 有限の一次元短距離 Ising 模型は、 $T > 0$ で非解析的な熱力学相転移をもたない。

7 第 2 回・問 3：同軸伝送線路（解答）

- (1) $a < r < b$ では $2\pi r \varepsilon E_r = \lambda$ なので $E_r = \lambda/(2\pi \varepsilon r)$ 。 $V = \int_a^b E_r dr = \lambda \ln(b/a)/(2\pi \varepsilon)$ 、従って

$$C' = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi \varepsilon}{\ln(b/a)}.$$

- (2) $H_\varphi = I/(2\pi r)$ 。単位長さ磁場エネルギーを $\frac{1}{2} L' I^2 = \frac{1}{2} \int_a^b \mu H_\varphi^2 2\pi r dr$ と比較して

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a).$$

- (3) 線路方程式より $V_{zz} = L' C' V_{tt}$ (I も同じ)。

$$v = (L' C')^{-1/2} = (\mu \varepsilon)^{-1/2}, \quad Z_0 = \sqrt{L'/C'} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi} \sqrt{\mu/\varepsilon}.$$

- (4) 電圧正方向を内導体から外導体へのポテンシャル差、電流 I は $+z$ 方向と定めると、 $\mathbf{E} = E_r \hat{r}$, $\mathbf{H} = H_\varphi \hat{\varphi}$ で $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = E_r H_\varphi \hat{z}$ 。断面積分は

$$P = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon r} \frac{I}{2\pi r} 2\pi r dr = \frac{\lambda I}{2\pi \varepsilon} \ln \frac{b}{a} = VI.$$

交流の場合の周期平均は $\bar{P} = \frac{1}{2} \text{Re}(V_0 I_0^*)$ 、上の式は瞬時値を示す。

- (5) 負荷端の電圧 $V_L = V_i + V_r$ 、電流 $I_L = (V_i - V_r)/Z_0$ 。 $R_L = V_L/I_L$ より

$$\Gamma = \frac{V_r}{V_i} = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}.$$

整合負荷 $R_L = Z_0$ で反射なし。短絡 $R_L = 0$ で $\Gamma = -1$ 。

検算・採点上の注意： C', L' は単位長さ当たり。Poynting 流束の断面積分で特性インピーダンスを検算できる。

8 第 2 回・問 4：Helmholtz Green 関数（解答）

(1) Fourier 変換では $(-\partial_x^2 + \kappa^2) \mapsto k^2 + \kappa^2$ 。従って $\widehat{G}(k) = 1/(k^2 + \kappa^2)$ 。

(2) $x \neq 0$ では $G'' = \kappa^2 G$ 。左右で減衰する連続な偶関数 $G = Ae^{-\kappa|x|}$ とする。両辺を $(-\epsilon, \epsilon)$ で積分すると $-G'(0^+) + G'(0^-) = 1$ 。従って $2\kappa A = 1$ 、

$$G(x) = \frac{e^{-\kappa|x|}}{2\kappa}.$$

(3) 線形性・平行移動対称性より

$$f(x) = (G * f_0)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\kappa|x-y|}}{2\kappa} f_0(y) dy, \quad f_0 = \delta(x-a) \Rightarrow f = G(x-a).$$

(4) $a \neq \kappa$ で $f(x) = Ae^{-a|x|} + Be^{-\kappa|x|}$ と置く。 $x \neq 0$ で $A = 1/(\kappa^2 - a^2)$ 、 $x = 0$ の δ を打ち消すため $aA + \kappa B = 0$ 。すなわち

$$f(x) = \frac{e^{-a|x|} - (a/\kappa)e^{-\kappa|x|}}{\kappa^2 - a^2}.$$

左右微分は $f'(0^+) = f'(0^-) = 0$ で、滑らかな右辺に対応する。

(5) $a \rightarrow \kappa$ は L'Hôpital 則により

$$f(x) = \frac{(1 + \kappa|x|)e^{-\kappa|x|}}{2\kappa^2}.$$

$G(x) > 0$ より右辺 $f_0 \geq 0$ の場合、減衰する解は $f = G * f_0 \geq 0$ 。

検算・採点上の注意： G' の跳び条件の符号は、作用素が $-\partial_x^2 + \kappa^2$ であることから決まる。

第 3 回 模範解答と採点上の要点

9 第 3 回・問 1：スピン 1 系（解答）

- (1) $L_{\pm}|m\rangle = \hbar\sqrt{2-m(m\pm 1)}|m\pm 1\rangle$ より、基底 $(|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle)$ で

$$H = \begin{pmatrix} D & h/\sqrt{2} & 0 \\ h/\sqrt{2} & 0 & h/\sqrt{2} \\ 0 & h/\sqrt{2} & D \end{pmatrix}.$$

- (2) $H|a\rangle = D|a\rangle$ 。 $|0\rangle, |s\rangle$ の部分空間では $H_{0s} = \begin{pmatrix} 0 & h \\ h & D \end{pmatrix}$ であり、反対称状態は結合しない。

- (3) $\det(H_{0s} - EI) = E(E - D) - h^2 = 0$ から

$$E_a = D, \quad E_{\pm} = \frac{D \pm \sqrt{D^2 + 4h^2}}{2}.$$

$|h|/D \ll 1$ では $E_- = -h^2/D + O(h^4/D^3)$ 、 $E_+ = D + h^2/D + O(h^4/D^3)$ 、 $E_a = D$ 。縮退 D は、2 次で一方だけ分裂する。

- (4) $h = 0$ で $|\pm 1\rangle$ が縮退するが、摂動が間接的に結ぶ対称状態 $|s\rangle$ と、厳密に切り離される $|a\rangle$ を区別する必要がある。単に縮退を無視して各ベクトルへ非縮退摂動公式を当てはめることはできない。

- (5) $|0\rangle$ と $|s\rangle$ の 2 状態 Hamiltonian を $H_{0s} = DI/2 + h\sigma_x - (D/2)\sigma_z$ と書くと、恒等部分は全体位相のみ。

$$P_s(t) = \frac{4h^2}{D^2 + 4h^2} \sin^2\left(\frac{t\sqrt{D^2 + 4h^2}}{2\hbar}\right).$$

$h \rightarrow 0$ で $P_s \rightarrow 0$ 。 $P_0 = 1 - P_s$ 、 $P_a = 0$ で規格化が保たれる。

検算・採点上の注意：縮退の取り扱いでは、保存される対称性に従い先に基底を変える。

10 第 3 回・問 2：Fermi 気体（解答）

- (1) $T = 0$ でスピン 2 重の球を充填： $N = 2 \times V(4\pi k_F^3/3)/(2\pi)^3 = V k_F^3/(3\pi^2)$ 。

$$\boxed{k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}}, \quad \boxed{\epsilon_F = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3}}{2m}}.$$

- (2) $N(\epsilon) = V(2m\epsilon/\hbar^2)^{3/2}/(3\pi^2)$ を微分して

$$\boxed{D(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon}}.$$

- (3) Sommerfeld 展開は $\int_0^\infty F(\epsilon) n_F(\epsilon) d\epsilon = \int_0^\mu F(\epsilon) d\epsilon + (\pi^2/6)(k_B T)^2 F'(\mu) + O(T^4)$ 。 $F = D$ として

$$N = A \left[\frac{2}{3} \mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{12} (k_B T)^2 \mu^{-1/2} \right] + O(T^4), \quad A = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2}.$$

$N = 2A\epsilon_F^{3/2}/3$ を固定して

$$\boxed{\mu(T) = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + O(T^4/T_F^4) \right]}.$$

- (4) $U = \int \epsilon D(\epsilon) n_F d\epsilon$ を同じ展開で計算。 T^2 の係数に $\mu(T)$ の補正を含めると

$$\boxed{U = \frac{3}{5} N \epsilon_F + \frac{\pi^2}{4} N \frac{(k_B T)^2}{\epsilon_F} + O(T^4)}, \quad \boxed{C_V = \frac{\pi^2}{2} N k_B \frac{T}{T_F} + O(T^3)}.$$

- (5) $B \rightarrow 0$ で二つのスピンの Fermi 面はそれぞれ $\mu \pm \mu_B B$ だけずれる。 D は二スピン合計なので $N_+ - N_- = D(\epsilon_F) \mu_B B + O(B^3)$ 、 $M = \mu_B (N_+ - N_-)$ 。

$$\boxed{\chi = \mu_B^2 D(\epsilon_F) = \frac{3N\mu_B^2}{2\epsilon_F}}.$$

完全に占有された深部の状態はスピンの入れ替えに寄与できず、応答は Fermi 面近傍の状態から生じる。

検算・採点上の注意：Sommerfeld 展開で粒子数一定の制約を無視すると、比熱の係数がずれる。

11 第 3 回・問 3：直交電磁場とドリフト（解答）

(1) $m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 。 $\dot{v}_x = (q/m)(E + Bv_y)$ 、 $\dot{v}_y = -\omega_c v_x$ 、 $\dot{v}_z = 0$ 、 $\omega_c = qB/m$ 。

(2) $v_y = -E/B$ を特解に取り、初期条件から

$$\boxed{v_x(t) = \frac{E}{B} \sin \omega_c t, \quad v_y(t) = -\frac{E}{B} (1 - \cos \omega_c t)}, \quad (77)$$

$$\boxed{x(t) = \frac{E}{B\omega_c} (1 - \cos \omega_c t), \quad y(t) = -\frac{E}{B} t + \frac{E}{B\omega_c} \sin \omega_c t}. \quad (78)$$

微分すると Lorentz 方程式と初期条件を再現する。

(3) 周期平均で $\overline{v_x} = 0$, $\overline{v_y} = -E/B$ 。すなわち

$$\boxed{\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = -\frac{E}{B} \hat{y}}.$$

ω_c と旋回の方法は電荷の符号で変わるが、静的な力の釣り合い $\mathbf{E} + \mathbf{v}_D \times \mathbf{B} = 0$ は電荷を含まず、ドリフトは符号に依存しない。

(4) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + qBx\dot{y} + qEx$ 。 y は循環座標なので

$$\boxed{p_y = \partial L / \partial \dot{y} = m\dot{y} + qBx = \text{const}}.$$

上記解に代入すると $p_y = 0$ 。静電場を含むエネルギー $\frac{m}{2}v^2 - qEx$ も保存する。

(5) $\Lambda = -Bxy$ なら $\mathbf{A}' = Bx\hat{y} - B(y\hat{x} + x\hat{y}) = -By\hat{x}$ 。 $\phi' = \phi - \partial_t \Lambda = \phi$ 。 $L' = L + qd\Lambda/dt$ で、作用は端点項 $q[\Lambda(t_f) - \Lambda(t_i)]$ だけ変わる。Euler-Lagrange 方程式と $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 、粒子軌道は同じである。

検算・採点上の注意：ゲージで変化する正準運動量と、観測できる機械的運動量 $m\mathbf{v}$ を区別する。

12 第 3 回・問 4：留数と漸近積分（解答）

- (1) $1/(z^2 + a^2)$ は上半平面に $z = ia$ の単純極をもち、留数は $1/(2ia)$ 。半円寄与は半径 $R \rightarrow \infty$ で 0 だから実軸全体の積分は $2\pi i/(2ia) = \pi/a$ 。偶関数より

$$I(a) = \frac{\pi}{2a}.$$

- (2) 絶対収束により a 微分を積分の中へ移せる。 $I'(a) = \int_0^\infty -2a/(x^2 + a^2)^2 dx = -\pi/(2a^2)$ 。従って

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}.$$

- (3) $x = at$ で $\int_0^\infty \ln x/(x^2 + a^2) dx = (1/a) \int_0^\infty (\ln a + \ln t)/(1+t^2) dt$ 。 $t \mapsto 1/t$ により $\int_0^\infty \ln t/(1+t^2) dt = 0$ 。 よって

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \ln a.$$

- (4) $u = \sqrt{\lambda}x$ と置くと $J = \lambda^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-cu^4/\lambda} du$ 。 $e^{-cu^4/\lambda} = 1 - cu^4/\lambda + O(\lambda^{-2}u^8)$ を積分する。 $\int_{\mathbb{R}} u^4 e^{-u^2} du = 3\sqrt{\pi}/4$ なので

$$J(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left(1 - \frac{3c}{4\lambda} + O(\lambda^{-2}) \right).$$

- (5) $c \geq 0$ により $0 \leq e^{-cu^4/\lambda} \leq 1$ 。Taylor の剰余は $0 \leq e^{-z} - 1 + z \leq z^2/2$ ($z \geq 0$)。従って誤差の絶対値は $\frac{c^2}{2\lambda^2} u^8 e^{-u^2}$ に支配され積分可能。 $c = 0$ では $J = \sqrt{\pi/\lambda}$ が厳密に成立する。

検算・採点上の注意：形式展開を積分交換する場合は、支配関数や剰余の評価を示すと厳密になる。

第 4 回 模範解答と採点上の要点

13 第 4 回・問 1：有限幅障壁の散乱（解答）

- (1) 左 $\psi_I = e^{ikx} + re^{-ikx}$ 、中央 $\psi_{II} = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$ ($E < V_0$)、右 $\psi_{III} = te^{ikx}$ と置く。有限の段差なので ψ と ψ' は $x = 0, L$ でそれぞれ連続。 $E > V_0$ では中央 $Ae^{iqx} + Be^{-iqx}$ とする。

- (2) 接続条件を行列で解くか中央領域を消去すると

$$T(E) = |t|^2 = \left[1 + \frac{V_0^2 \sinh^2(\kappa L)}{4E(V_0 - E)} \right]^{-1}, \quad 0 < E < V_0.$$

左右の自由空間の波数が等しいため、確率流の比は $|t|^2$ 。 $R = 1 - T$ は確率流保存から従う。

- (3) $\kappa L \gg 1$ では $\sinh^2(\kappa L) \sim e^{2\kappa L}/4$ なので

$$T(E) \sim \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\kappa L}.$$

WKB では禁制領域の作用 $\int_0^L \sqrt{2m(V_0 - E)} dx / \hbar = \kappa L$ から指数 $e^{-2\kappa L}$ が得られる。前因子は単純な WKB 指数評価では固定できない。

- (4) $\kappa = iq$ と解析接続すると $\sinh^2(iqL) = -\sin^2(qL)$ と $V_0 - E = -(E - V_0)$ から

$$T(E) = \left[1 + \frac{V_0^2 \sin^2(qL)}{4E(E - V_0)} \right]^{-1}, \quad E > V_0.$$

$qL = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$) で $T = 1$ 。この共鳴は障壁内部の進行波の干渉による。

- (5) $V_0 L = g$ 固定で $\kappa^2 L^2 \sim (2mg/\hbar^2)L \rightarrow 0$ 。 $\sinh(\kappa L) \sim \kappa L$ を (2) に用い

$$\frac{V_0^2 (\kappa L)^2}{4E(V_0 - E)} = \frac{mV_0^2 L^2}{2\hbar^2 E} = \left(\frac{mg}{\hbar^2 k} \right)^2.$$

従って

$$T_\delta = \frac{1}{1 + (mg/(\hbar^2 k))^2}.$$

検算・採点上の注意：接続条件・左右の確率流・ $E < V_0$ と $E > V_0$ の解析接続を一貫して扱う。

14 第 4 回・問 2：高分子鎖とエントロピー（解答）

(1) 独立なので $Z_N = (e^{\beta fa} + e^{-\beta fa})^N = [2 \cosh(\beta fa)]^N$ 、 $F = -Nk_B T \ln[2 \cosh(\beta fa)]$ 。

(2) 力を含めたエネルギーを $H_f = H_0 - fL$ と定義したため $\langle L \rangle = -\partial F / \partial f$ 。よって

$$\langle L \rangle = Na \tanh(\beta fa), \quad \chi_L = \beta Na^2 \operatorname{sech}^2(\beta fa).$$

(3) 独立な s_i から $\operatorname{Var} L = a^2 N (1 - \tanh^2 \beta fa) = Na^2 \operatorname{sech}^2(\beta fa)$ 。従って $\chi_L = \beta \operatorname{Var} L$ 。
 L は H_f と可換な古典量なのでこの関係を使える。

(4) $n_+ - n_- = L/a$, $n_+ + n_- = N$ 。 $\ell = L/(Na)$ とすると $n_{\pm} = N(1 \pm \ell)/2$ 。微視状態数 $\Omega(L) = N!/(n_+!n_-!)$ （許された L のみ）。Stirling による主項は

$$\frac{S(L)}{Nk_B} = -\frac{1+\ell}{2} \ln \frac{1+\ell}{2} - \frac{1-\ell}{2} \ln \frac{1-\ell}{2} + O(\ln N/N).$$

(5) $\partial S / \partial L = -(k_B/a) \operatorname{artanh} \ell$ なので

$$f_{\text{ent}} = \frac{k_B T}{a} \operatorname{artanh} \left(\frac{L}{Na} \right).$$

$|L| \ll Na$ で $\operatorname{artanh} z = z + z^3/3 + \dots$ だから $f_{\text{ent}} = k_B T L / (Na^2) + O(L^3)$ 。従ってばね定数は $k_{\text{eff}} = k_B T / (Na^2)$ 。

検算・採点上の注意：ここでは外力との結合が $-fL$ なので重みは $e^{-\beta(H_0 - fL)}$ 。熱力学第一法則の符号と一貫させる。

15 第 4 回・問 3：連成振動（解答）

- (1) $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{K}{2}(x_1 - x_2)^2$ 。Euler-Lagrange 方程式は

$$m\ddot{x}_1 + (k + K)x_1 - Kx_2 = 0, \quad m\ddot{x}_2 + (k + K)x_2 - Kx_1 = 0.$$

- (2) 直交変換して $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{q}_+^2 + \dot{q}_-^2) - \frac{1}{2}kq_+^2 - \frac{1}{2}(k + 2K)q_-^2$ 。従って

$$\omega_+ = \sqrt{k/m}, \quad \omega_- = \sqrt{(k + 2K)/m}.$$

- (3) $q_{\pm}(0) = A/\sqrt{2}$ 、 $\dot{q}_{\pm}(0) = 0$ から

$$x_1(t) = \frac{A}{2}[\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)], \quad x_2(t) = \frac{A}{2}[\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)].$$

和積公式 $x_1 = A \cos[(\omega_+ + \omega_-)t/2] \cos[(\omega_- - \omega_+)t/2]$ でうなりを確認できる。

- (4) $K \ll k$ なら $\omega_- \simeq \omega_+(1 + K/k)$ 、差 $\Delta\omega \simeq K/\sqrt{mk}$ 。 x_1 の振幅包絡 $|\cos(\Delta\omega t/2)|$ の繰返し周期は

$$T_{\text{beat}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \simeq \frac{2\pi\sqrt{mk}}{K}.$$

包絡の符号込みの余弦周期は $4\pi/\Delta\omega$ だが、振幅の絶対値・エネルギー交換の周期は上式。

- (5) $K(t)$ でも固有ベクトルは一定なので正規座標は厳密に分離し、 $\ddot{q}_- + \omega_-^2(t)q_- = 0$ 。断熱条件

$$|\dot{\omega}_-| \ll \omega_-^2$$

で周期平均した作用変数 $I_- = E_-/\omega_- \simeq \text{const}$ 。ここで $E_- = \frac{m}{2}\dot{q}_-^2 + \frac{m}{2}\omega_-^2 q_-^2$ は瞬時モードエネルギー。 I_- は厳密保存でなく断熱不変量。

検算・採点上の注意：うなり周期は「符号付き包絡」か「振幅絶対値」かで 2 倍異なる。

16 第 4 回・問 4 : Burgers 方程式 (解答)

- (1) $dx/dt = u$ の曲線に沿って $du/dt = u_t + \dot{x}u_x = 0$ 。 $t = 0$ の座標を ξ とすると $u = u_0(\xi)$ 、
 $x = \xi + tu_0(\xi)$ 。逆写像が単価な間、 $u(x, t) = u_0(\xi(x, t))$ 。

- (2) $u_0(\xi) = -a\xi$ なら $x = (1 - at)\xi$ 。 $t < 1/a$ の解は

$$u(x, t) = -\frac{ax}{1 - at}, \quad u_x = -\frac{a}{1 - at}.$$

最初の勾配発散時刻は $t_* = 1/a$ 。その後は滑らかな古典解をそのまま延長できない。

- (3) $\partial x/\partial \xi = 1 + tu'_0(\xi)$ 。これがゼロとなる時刻に特性が交差する。 $\min_{\xi} u'_0(\xi) < 0$ かつ最小が達成されれば

$$t_* = -\frac{1}{\min_{\xi} u'_0(\xi)}.$$

$u'_0(\xi) \geq 0$ なら正の時間に交差しない。

- (4) 保存形 $u_t + \partial_x(u^2/2) = 0$ 。衝撃波が $x = st$ を進むとき $s[u] = [u^2/2]$ 、 $[f] = f_R - f_L$ 。よって

$$s = \frac{u_L + u_R}{2}.$$

$u_L > u_R$ は entropy 条件を満たす圧縮衝撃波である。

- (5) $z = x - st$, $\Delta = u_L - u_R > 0$ とし、 $U(\pm\infty) = u_{L,R}$ 。進行波方程式を一度積分すると
 $\nu U' = (U - u_L)(U - u_R)/2$ 。解は

$$U(z) = s - \frac{\Delta}{2} \tanh\left(\frac{\Delta z}{4\nu}\right), \quad s = \frac{u_L + u_R}{2}.$$

$\nu \rightarrow 0^+$ で $z < 0$ は u_L 、 $z > 0$ は u_R に収束する。粘性が衝撃波の幅 $O(\nu/\Delta)$ を決める。

検算・採点上の注意：特性曲線が交差した後は、保存形と entropy 条件を使う弱解へ移行する必要がある。

第 5 回 模範解答と採点上の要点

17 第 5 回・問 1: Bell 状態と量子相関 (解答)

(1) 基底 $(|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle)$ で

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\text{Tr } \rho = 1, \rho^2 = \rho$ を直接確認できる。 ρ の固有値は $1, 0, 0, 0$ 。

(2) $\rho_A = \sum_{b=0}^1 \langle b|_B \rho |b\rangle_B$ 、従って

$$\rho_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_A = \ln 2.$$

この状態は Schmidt 係数が $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ で、純粋二量子ビット状態として最大にエンタングルしている。

(3) $\sigma_x \otimes \sigma_x$ は $|00\rangle \leftrightarrow |11\rangle$ を入れ替えるので期待値 1。 $\sigma_z \otimes \sigma_z$ は両項に固有値 1 を与える。一方 $\sigma_x \otimes \sigma_z$ は直交する $|10\rangle, |01\rangle$ に移す。

$$C_{xx} = 1, \quad C_{zz} = 1, \quad C_{xz} = 0.$$

(4) CHSH 演算子をまとめると

$$\mathcal{B} = \sqrt{2} \langle \sigma_z \otimes \sigma_z + \sigma_x \otimes \sigma_x \rangle = 2\sqrt{2}.$$

これは古典的局所隠れ変数の上限 2 を超えるが、量子力学の Tsirelson 上限 $2\sqrt{2}$ の範囲内。

(5) ρ_p は $|00\rangle, |11\rangle$ の人口をそれぞれ $1/2$ に保ち、非対角コヒーレンスを $(1-p)/2$ に減衰させる。 $\rho_{A,p} = I/2$ 、 $C_{xx} = 1-p$ 、 $C_{zz} = 1$ 。 $p=1$ なら $\rho_1 = (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)/2$ は分離可能な古典混合状態だが、 $S_A = \ln 2$ のままである。従って部分系 entropy は全体系が純粋なときだけエンタングルメント量とみなせる。

検算・採点上の注意：量子情報は発展設問。特に純粋状態の縮約 entropy と混合状態の量子相関を混同しない。

18 第 5 回・問 2：Curie–Weiss 模型（解答）

- (1) $n_+ = N(1+m)/2$, $n_- = N(1-m)/2$ 。状態数 $\Omega = N!/(n_+!n_-!)$ 、 $N^{-1} \ln \Omega = -[(1+m)/2] \ln[(1+m)/2] - [(1-m)/2] \ln[(1-m)/2] + o(1)$ 。 $\mathcal{H}/N = -Jm^2/2 - hm$ 、 $\phi = (\mathcal{H} - TS)/N$ より問題の式。

- (2) $\phi'(m) = -Jm - h + k_B T \operatorname{artanh} m$ 。停留条件を $\operatorname{artanh} m = \beta(Jm + h)$ と書き換え

$$m = \tanh[\beta(Jm + h)].$$

実際の平衡解は停留解から自由エネルギーを最小にするものを選ぶ。

- (3) $h = 0$ で entropy の展開は

$$\phi(m) = -k_B T \ln 2 + \frac{k_B T - J}{2} m^2 + \frac{k_B T}{12} m^4 + O(m^6).$$

二次係数の符号が変わる $T_c = J/k_B$ が臨界温度。

- (4) $T < T_c$ で安定な非零の二つの停留点は $\phi'(m) = 0$ より

$$m^2 = \frac{3(J - k_B T)}{k_B T} + O((T_c - T)^2), \quad m_* \sim \pm \sqrt{\frac{3(T_c - T)}{T_c}}.$$

$h = 0$ では $+$, $-$ が等価で、 $m = 0$ は不安定。近似は $T \uparrow T_c$ のみで有効。

- (5) $T > T_c$ の $m \simeq \beta(Jm + h)$ より $m(1 - \beta J) = \beta h$ 。従って

$$\chi = \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_0 = \frac{1}{k_B T - J}.$$

$T \downarrow T_c^+$ で $\chi \propto (T - T_c)^{-1}$ へ発散する（有限 N では解析的な丸まりがある）。

検算・採点上の注意：全ての自己無撞着解が安定とは限らない。自由エネルギーの二階微分で判断する。

19 第 5 回・問 3：電気双極子放射（解答）

- (1) Lorenz ゲージの遅延ポテンシャル $\phi(\mathbf{r}, t) = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \int \rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| d^3r'$ 、 $\mathbf{A} = (\mu_0/4\pi) \int \mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| d^3r'$ を遠方で展開する。局在源の電荷保存 $\int \mathbf{J} d^3r' = \dot{\mathbf{p}}$ により、 $-\partial_t \mathbf{A}$ と $-\nabla \phi$ の $1/r$ 成分の合計は $\dot{\mathbf{p}}$ の横方向射影になる。

- (2) $\mathbf{p}_\perp = \mathbf{p} - \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})$ を用い

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\mathbf{r}} \times (\ddot{\mathbf{p}}(t_r) \times \hat{\mathbf{r}})}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}, \quad \mathbf{B}_{\text{rad}} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}.$$

- (3) $\ddot{\mathbf{p}} = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t_r) \hat{\mathbf{z}}$ 。したがって電場振幅の大きさは $E_0(\theta) = \omega^2 p_0 \sin \theta / (4\pi\epsilon_0 c^2 r)$ 、周期平均の動径 Poynting 流束は

$$\overline{S_r} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2}.$$

- (4) $d\bar{P}/d\Omega = r^2 \overline{S_r}$ 。 $\int \sin^2 \theta d\Omega = 8\pi/3$ から

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3}, \quad \bar{P} = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}.$$

$\theta = 0, \pi$ で放射はゼロ、赤道方向で最大。SI 単位 $[\bar{P}] = \text{W}$ を確認する。

- (5) $\omega \rightarrow 0$ で $\bar{P} \propto \omega^4 \rightarrow 0$ 。近接場の静電双極子電場は $E_{\text{near}} \propto p_0/r^3$ 、遠方放射場は $E_{\text{rad}} \propto \omega^2 p_0/(c^2 r)$ 。それぞれの近似は $r \ll c/\omega$ と $r \gg c/\omega$ で用いる。静的場の $1/r^3$ を放射パワーに代入してはいけない。

検算・採点上の注意： $1/r$ の放射成分を抜き出してから Poynting 流束を積分する。

20 第 5 回・問 4 : Sturm–Liouville と Green 関数 (解答)

- (1)
- $-y'' = \lambda y$
- と Dirichlet 条件から (零解を除き)

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{2/L} \sin(n\pi x/L), \quad n = 1, 2, \dots$$

- (2)
- $\int_0^L \overline{y}(-y'')dx = \int_0^L |y'|^2 dx$
- (境界項はゼロ)。よって
- $\lambda \int |y|^2 = \int |y'|^2 > 0$
- で
- λ
- は実数かつ正。異なる
- λ_n, λ_m
- に対し自己共役性から
- $(\lambda_n - \lambda_m) \int \overline{\varphi_m} \varphi_n = 0$
- 。

- (3)
- $x < \xi$
- では左端で消える
- $A \sinh \kappa x$
- 、
- $x > \xi$
- では右端で消える
- $B \sinh \kappa(L - x)$
- と置く。連続条件と
- $G_x(\xi^+) - G_x(\xi^-) = -1$
- から

$$G(x, \xi) = \frac{\sinh(\kappa x_{<}) \sinh[\kappa(L - x_{>})]}{\kappa \sinh(\kappa L)}.$$

- (4) Wronskian の恒等式
- $\sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b = \sinh(a + b)$
- により微分の跳びは
- -1
- 。
-
- $\mathcal{L}\varphi_n = (\lambda_n + \kappa^2)\varphi_n$
- 、完全固有関数系を用いて

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{(n\pi/L)^2 + \kappa^2}.$$

- (5)
- $-y'' + \kappa^2 y = 1$
- の一般解は
- $y = 1/\kappa^2 + C \cosh \kappa(x - L/2) + D \sinh \kappa(x - L/2)$
- 。両端ゼロより
- $D = 0$
- 、
- $C = -1/[\kappa^2 \cosh(\kappa L/2)]$
- なので

$$y(x) = \frac{1}{\kappa^2} \left[1 - \frac{\cosh \kappa(x - L/2)}{\cosh(\kappa L/2)} \right].$$

同じ境界条件を持つ $\mathcal{L}y = 1$ の解は一意 (正定値性) だから、 $\int_0^L G(x, \xi) d\xi$ もこの y と一致する。

検算・採点上の注意：Green 関数の導関数の跳びを検算すると、符号と係数の取り違えを防げる。