

難問に挑み、**合格**をつかむ。

本質を問う問題で
思考力を鍛える

東大院試 対策問題パック

物理 予想問題集

第**2**集

全5集シリーズ

出題分野

量子力学

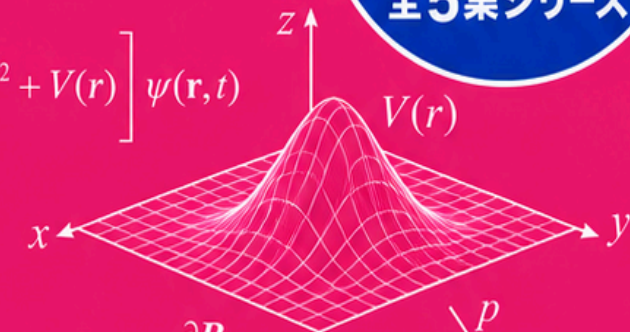
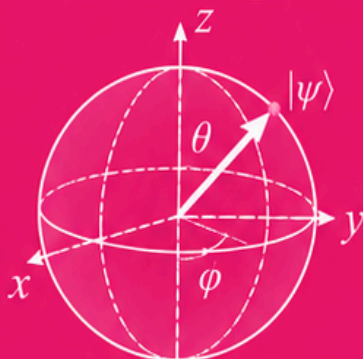
統計力学

電磁気学

力学

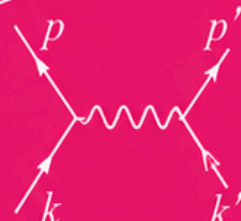
数学

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}, t)$$



$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$



この1冊で、院試物理を徹底対策！



オリジナル予想問題を多数収録

過去問を徹底分析した、実戦的な良問で演習！



詳しい解答・解説

解法の考え方から丁寧に解説し、理解を深める！



東大院試の出題傾向に完全対応

典型問題から応用・発展問題まで幅広くカバー！



解法のポイント・物理の本質も解説

答案作成のコツや思考プロセスも学べる！



$$m\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

taku

takuphys.com

本書の位置づけ

本書は、東京大学大学院理学系研究科物理学専攻の修士課程入試対策として独自に作成した**予想問題集の第2集**である。既刊の5回分と異なる20大問を収録する。問題文、解答・解説、配点案は大学が作成・公表したものではない。

各回：量子力学、統計力学、電磁気学または古典力学、数学の各1大問、計4大問。各25点・計100点換算は自主演習用である。**推奨時間：240分／1回**。実際の試験は400点、240分、4問必答という案内があるが、本冊子の配点・予測トピックを保証するものではない。

出題設計：過去問題と公式の出題意図で重視される、基本式の導出、境界・初期条件、無次元化、物理的な極限、線形代数・解析学の応用を優先した。エンタングルメントを中心とした第1集と重複させず、今回は第5回問1のSSH格子模型の位相を $+\alpha$ として配置する。全小問は新規に作問した。

出典・注意：本書の問題は原題の転載ではない。公式過去問：<https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/about/147/>。出題意図等は公式サイトの公開資料を参照。**予想は出題確率の統計的推定ではない**。試験形式は年度により変更されうる。

第2集の5回のテーマ

回	量子力学	統計力学	電磁気・力学	数学
1	有限井戸	重力下の気体	誘電体球	階数1摂動
2	スピン軌道結合	黒体輻射	導体棒の誘導	熱方程式
3	周波数急変	Langevin 過程	Lorentz 分散	複素積分・畳み込み
4	球面デルタ殻	格子気体	回転する円環	積分作用素
5	SSH 鎖 ($+\alpha$)	Debye 模型	相互インダクタンス	波動方程式

解答の読み方：まず問題編を時間を計って解き、その後に詳解編を参照する。数式の検算は代表的な計算に限り、全20題の外部査読を完了したものではない。

目次

本書の位置づけ	1
問題編	6
第 1 回：束縛状態・熱力学・境界条件・行列	7
1 第 1 回・問 1 一次元有限井戸の束縛状態	8
2 第 1 回・問 2 一様重力下の古典理想気体	9
3 第 1 回・問 3 一様電場中の誘電体球	10
4 第 1 回・問 4 階数一摂動を受けた三次元行列	11
第 2 回：角運動量・熱輻射・電磁誘導・拡散	12
5 第 2 回・問 1 スピン軌道結合と弱磁場	13
6 第 2 回・問 2 黒体輻射の熱力学	14
7 第 2 回・問 3 動く導体棒と電磁誘導	15
8 第 2 回・問 4 有限区間の熱方程式	16
第 3 回：急変・確率過程・光学分散・複素解析	17
9 第 3 回・問 1 調和振動子の周波数急変	18
10 第 3 回・問 2 過減衰 Langevin 方程式	19
11 第 3 回・問 3 Lorentz 模型の誘電分散と吸収	20

12	第 3 回・問 4	複素積分と Lorentz 型核の畳み込み	21
第 4 回：散乱・格子統計・安定性・作用素			22
13	第 4 回・問 1	三次元球面デルタ殻の束縛と散乱	23
14	第 4 回・問 2	独立サイト格子気体と数揺らぎ	24
15	第 4 回・問 3	鉛直軸周りに回転する円環上の質点	25
16	第 4 回・問 4	積分作用素の固有値と Fredholm 方程式	26
第 5 回：格子模型・フォノン・結合回路・波動			27
17	第 5 回・問 1	二量体一次元格子のバンドと端状態（+）	28
18	第 5 回・問 2	Debye 模型と低温比熱	29
19	第 5 回・問 3	相互インダクタンスをもつ二つの RL 回路	30
20	第 5 回・問 4	半無限弦の波動方程式と反射	31
詳解編			32
第 1 回：詳解：束縛状態・熱力学・境界条件・行列			33
21	第 1 回・問 1	一次元有限井戸（詳解）	34
22	第 1 回・問 2	重力下の気体（詳解）	36
23	第 1 回・問 3	誘電体球（詳解）	37
24	第 1 回・問 4	階数一摂動（詳解）	38
第 2 回：詳解：角運動量・熱輻射・電磁誘導・拡散			39

25	第 2 回・問 1	スピン軌道結合 (詳解)	40
26	第 2 回・問 2	黒体輻射 (詳解)	41
27	第 2 回・問 3	動く導体棒 (詳解)	42
28	第 2 回・問 4	有限区間の熱方程式 (詳解)	43
第 3 回：詳解：急変・確率過程・光学分散・複素解析			44
29	第 3 回・問 1	調和振動子の周波数急変 (詳解)	45
30	第 3 回・問 2	過減衰 Langevin 方程式 (詳解)	46
31	第 3 回・問 3	Lorentz 分散 (詳解)	48
32	第 3 回・問 4	複素積分と畳み込み (詳解)	49
第 4 回：詳解：散乱・格子統計・安定性・作用素			50
33	第 4 回・問 1	球面デルタ殻 (詳解)	51
34	第 4 回・問 2	独立サイト格子気体 (詳解)	52
35	第 4 回・問 3	回転円環のビーズ (詳解)	53
36	第 4 回・問 4	積分作用素 (詳解)	54
第 5 回：詳解：格子模型・フォノン・結合回路・波動			55
37	第 5 回・問 1	SSH 模型 (+) (詳解)	56
38	第 5 回・問 2	Debye 比熱 (詳解)	58
39	第 5 回・問 3	結合 RL 回路 (詳解)	59

40	第 5 回・問 4 半無限弦の反射 (詳解)	60
----	------------------------	----

	出題傾向の読み方と第 2 集の狙い	61
--	-------------------	----

問題編

第 1 回 束縛状態・熱力学・境界条件・行列

1 第 1 回・問 1 一次元有限井戸の束縛状態

25 点 (各小問 5 点) / 目安 45~65 分

質量 m の粒子が $V(x) = -V_0$ ($|x| < a$)、 $V(x) = 0$ ($|x| \geq a$) にある。 $V_0, a > 0$ 。 $-V_0 < E < 0$ の束縛状態について $q = \sqrt{2m(V_0 + E)}/\hbar$, $\kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar$ と置く。

- (1) Schrödinger 方程式から井戸内外の解を示し、境界で連続となる量を述べよ。
- (2) 偶・奇パリティの束縛条件をそれぞれ求めよ。
- (3) 偶パリティの波動関数を井戸内 $A \cos qx$ としたとき、規格化定数 A を求めよ。
- (4) 最初の奇パリティ束縛状態が出現する深さの閾値を求めよ。
- (5) $2mV_0a^2/\hbar^2 \ll 1$ で存在する最も浅い偶束縛状態のエネルギーを先頭次数で求めよ。

2 第 1 回・問 2 一様重力下の古典理想気体

25 点 (各小問 5 点) / 目安 45~65 分

断面積 A 、高さ無限大の容器の $z \geq 0$ 部に、質量 m の非相互作用古典粒子 N 個を封入する。重力ポテンシャルは mgz 、温度 T は一様。 $\beta = 1/(k_B T)$ 、熱的波長 $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ とする。

- (1) 1 粒子の正準分配関数 Z_1 を位置積分・運動量積分から求めよ。
- (2) 同種粒子の古典希薄極限で Z_N を求め、鉛直方向の粒子数密度 $n(z)$ を求めよ。
- (3) 平均高度とその分散を求めよ。
- (4) 平均全エネルギーと定積熱容量を求めよ。ただし重力場と容器の形は固定する。
- (5) 底面への圧力 P_0 を静水圧平衡から計算し、粒子の総重量との整合を示せ。

3 第 1 回・問 3 一様電場中の誘電体球

25 点 (各小問 5 点) / 目安 45~65 分

半径 a 、誘電率 ε_1 の線形・等方・非導電性の球が、誘電率 ε_2 の無限媒質中に置かれる。遠方電場は $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{z}$ 。界面に自由表面電荷はない。静電ポテンシャルは $\phi(\infty) \sim -E_0 r \cos \theta$ とする。

- (1) 軸対称な Laplace 方程式のうち $l = 1$ 成分を使い、球内外のポテンシャルの一般形を示せ。
- (2) 界面 $r = a$ の接線電場・法線電束密度の条件を示せ。
- (3) 球内電場 $\mathbf{E}_{\text{in}}$ を求めよ。
- (4) 外部遠方の誘起双極子モーメント $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_0$ を求めよ。
- (5) $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ の極限、および $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ の極限を解釈せよ。

4 第 1 回・問 4 階数一摂動を受けた三次元行列

25 点（各小問 5 点）／目安 45～65 分

$\Delta > 0, g \in \mathbb{R}$ とし、 $D = \text{diag}(0, \Delta, 2\Delta)$ 、 $u = (1, 1, 0)^T / \sqrt{2}$ 、 $H = D + guu^T$ とする。

- (1) H を行列表示し、明らかな固有ベクトルを 1 つ挙げよ。
- (2) 行列式補題を用いて、残る固有値の満たす方程式を作れ。
- (3) H の 3 固有値を明示せよ。
- (4) $|g| \ll \Delta$ の場合、最低固有値を g^2 まで展開せよ。
- (5) 2 つの低い成分の固有ベクトルの混合角を求め、 $g \rightarrow 0$ の極限を説明せよ。

第 2 回 角運動量・熱輻射・電磁誘導・拡散

5 第 2 回・問 1 スピン軌道結合と弱磁場

25 点 (各小問 5 点) / 目安 45~65 分

電子の軌道角運動量 $l = 1$ 、スピン $s = 1/2$ の 6 次元空間で $H_{s_0} = \lambda \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} / \hbar^2$ を考える。 $\lambda > 0$ とする。弱い一様磁場 $B\hat{z}$ を加えたとき $H_Z = (\mu_B B / \hbar)(L_z + 2S_z)$ とする。

- (1) $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ を使い $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ を J^2, L^2, S^2 で表せ。
- (2) $j = 3/2$ と $j = 1/2$ の固有エネルギーと縮退度を求めよ。
- (3) H_{s_0} のトレースが 0 であることを確認せよ。
- (4) $|\mu_B B| \ll \lambda$ で、各多重項の弱磁場 1 次エネルギーシフトを $g_j m_j \mu_B B$ の形で求めよ。
- (5) $|j = 1/2, m_j = 1/2\rangle$ を非結合基底に展開し、(4) の結果を直接検算せよ。

6 第 2 回・問 2 黒体輻射の熱力学

25 点（各小問 5 点）／目安 45～65 分

体積 V の空洞にある熱平衡の光子を考える。偏光は 2 種類、分散は $\omega = c|\mathbf{k}|$ 。光子数は保存されないので化学ポテンシャルは 0 とする。

- (1) 単位体積・単位角周波数あたりのモード密度を求めよ。
- (2) 熱的内部エネルギー密度 $u(T)$ を求めよ。 $\int_0^\infty x^3/(e^x - 1)dx = \pi^4/15$ を用いてよい。
- (3) 輻射圧 $P = u/3$ を導き、Helmholtz 自由エネルギーを求めよ。
- (4) エントロピー S と固定体積の熱容量 C_V を求めよ。
- (5) 準静的断熱膨張における T と V の関係を求めよ。

7 第 2 回・問 3 動く導体棒と電磁誘導

25 点 (各小問 5 点) / 目安 45~65 分

平行な導電レール間隔 ℓ に質量 m の導体棒を横渡しし、棒は速度 $v(t) > 0$ で移動する。回路の全抵抗は R 、回路面に垂直な磁束密度は一様に $B > 0$ 。自己インダクタンス、摩擦、接触抵抗以外の抵抗は無視する。初期速度は v_0 。

- (1) Faraday の法則から誘導起電力の大きさを求めよ。
- (2) Lenz の法則で電流方向を判定し、棒に働く磁気力を求めよ。
- (3) $v(t)$ と速度緩和時間 τ を求めよ。
- (4) $t \rightarrow \infty$ までの棒の移動距離と、抵抗で発生する Joule 熱を求めよ。
- (5) 棒に一定の外力 $F_0 > 0$ を進行方向へ加えた場合の終端速度を求めよ。

8 第 2 回・問 4 有限区間の熱方程式

25 点（各小問 5 点）／目安 45～65 分

$0 < x < L$ で $\partial_t u = D \partial_x^2 u$ ($D > 0$) を満たし、両端は $u(0, t) = u(L, t) = 0$ 、初期条件は $u(x, 0) = x(L - x)$ とする。

- (1) 境界条件に適合する固有関数と固有値を求めよ。
- (2) 初期条件を Fourier 正弦級数に展開し、係数を求めよ。
- (3) $u(x, t)$ を級数で示し、長時間の主要項を求めよ。
- (4) 全量 $Q(t) = \int_0^L u(x, t) dx$ を求め、 $Q(0)$ が $L^3/6$ に等しいと確かめよ。
- (5) $\mathcal{E}(t) = \int_0^L u(x, t)^2 dx$ の時間微分が非正となることを示せ。

第 3 回 急変・確率過程・光学分散・複素解析

9 第 3 回・問 1 調和振動子の周波数急変

25 点 (各小問 5 点) / 目安 45~65 分

一次元調和振動子 $H(\omega) = p^2/(2m) + m\omega^2 x^2/2$ の周波数を $t = 0$ に ω_i から $\omega_f > 0$ へ瞬時に切り替える。初期状態は $H(\omega_i)$ の基底状態。

- (1) $t = 0^+$ における $\langle x^2 \rangle$ と $\langle p^2 \rangle$ を求めよ。
- (2) 急変直後の最終 Hamiltonian の平均エネルギーを求めよ。
- (3) 最終振動子の平均励起数 $\bar{n}_f$ を求めよ。
- (4) 最終振動子の基底状態にいる確率 P_0 を求めよ。
- (5) $t > 0$ での位置の分散 $\langle x^2(t) \rangle$ を求め、時間振動を説明せよ。

10 第 3 回・問 2 過減衰 Langevin 方程式

25 点 (各小問 5 点) / 目安 45~65 分

$\gamma\dot{x}(t) = -kx(t) + \eta(t) + f(t)$ とし、 $k, \gamma > 0$ 。平均 0 の白色雑音は $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2\gamma k_B T \delta(t-t')$ 。
 $f = 0$ の平衡と、微小な外力 f に対する応答を考える。

- (1) $f = 0$ での平均位置 $\langle x(t) \rangle$ と、決定的な初期値 $x(0) = x_0$ に対する分散を求めよ。
- (2) 平衡位置分散 $\langle x^2 \rangle_{\text{eq}}$ を求めよ。
- (3) 平衡時間相関 $C(t) = \langle x(t)x(0) \rangle_{\text{eq}}$ を求めよ。
- (4) $S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t)e^{i\omega t} dt$ を求めよ。
- (5) $f(t) = \text{Re}(f_0 e^{-i\omega t})$ に対する線形応答 $\chi(\omega)$ を求め、 S_{xx} と $\text{Im}\chi$ の関係を確認せよ。

11 第 3 回・問 3 Lorentz 模型の誘電分散と吸収

25 点 (各小問 5 点) / 目安 45~65 分

電子電荷を $-e$ 、質量を m とする束縛電子が、 $m(\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x) = -eE(t)$ に従う。単位体積の電子数密度 n 、時間依存は $e^{-i\omega t}$ 、 $\Gamma > 0$ とする。背景真空誘電率は ε_0 。

- (1) 誘起双極子 $p = -ex$ の複素振幅を求めよ。
- (2) 電気感受率 $\chi_e(\omega)$ と複素誘電率 $\varepsilon(\omega)$ を求めよ。
- (3) $\text{Im} \varepsilon(\omega) > 0$ ($\omega > 0$) を示せ。
- (4) 単位体積・時間平均の吸収電力 $\bar{w}$ を求めよ。
- (5) $\omega \ll \omega_0, \Gamma \ll \omega_0$ の静的極限を求め、 $\Gamma = 0$ で共鳴前後の実部の符号変化を論じよ。

12 第 3 回・問 4 複素積分と Lorentz 型核の畳み込み

25 点 (各小問 5 点) / 目安 45~65 分

$a > 0$ に対し $F(b) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ibx}/(x^2 + a^2)dx$ を定める。実数 b について以下を解け。

- (1) 複素平面の極を示し、 $b > 0$ のとき閉じる積分路を述べよ。
- (2) 留数定理から $F(b)$ の閉形式を求め、 $b < 0$ に拡張せよ。
- (3) $-\frac{1}{2a}\partial_a F(b)$ を使い、 $\int e^{ibx}/(x^2 + a^2)^2 dx$ を求めよ。
- (4) 畳み込み $I(b) = \int dx/[(x^2 + a^2)((x - b)^2 + a^2)]$ を求めよ。
- (5) Parseval の恒等式により、 $\int_{-\infty}^{\infty} |F(b)|^2 db/(2\pi)$ を求め、直接積分と比較せよ。

第 4 回 散乱・格子統計・安定性・作用素

13 第 4 回・問 1 三次元球面デルタ殻の束縛と散乱

25 点 (各小問 5 点) / 目安 45~65 分

質量 m の粒子が球対称ポテンシャル $V(r) = -g\delta(r-a)$ ($g, a > 0$) にある。 s 波だけを扱い、 $u(r) = rR(r)$ 、 $u(0) = 0$ とする。 $s = 2mga/\hbar^2$ と定義する。

- (1) 負のエネルギー $E = -\hbar^2\kappa^2/(2m)$ に対し内外の減衰解を示せ。
- (2) $r = a$ の微分の跳び条件を導き、 κ の超越方程式を作れ。
- (3) s に関する s 波束縛状態の存在条件を求めよ。
- (4) $s = 1 + \epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$ の束縛エネルギーの先頭次数を求めよ。
- (5) $E \downarrow 0^+$ における零エネルギー外部解を $u \propto r - a_s$ としたとき、散乱長 a_s を求めよ ($s \neq 1$)。

14 第 4 回・問 2 独立サイト格子気体と数揺らぎ

25 点 (各小問 5 点) / 目安 45~65 分

独立な M サイトがそれぞれ粒子を高々 1 個収容し、占有時のエネルギーは ε 、空席時は 0 とする。粒子の化学ポテンシャルは μ 、温度は T 。サイト間相互作用はない。

- (1) 1 サイトと全体の大分配関数 Ξ を求めよ。
- (2) 平均占有率 ρ と平均粒子数 $\langle N \rangle$ を求めよ。
- (3) 粒子数分散を求め、 $\partial \langle N \rangle / \partial \mu = \beta \text{Var}(N)$ を確かめよ。
- (4) 1 サイトのエントロピーを ρ の関数で求めよ。
- (5) サイトの半分が ε_A 、残り半分が ε_B の場合の平均粒子数と $T \rightarrow 0$ の挙動を求めよ。

15 第 4 回・問 3 鉛直軸周りに回転する円環上の質点

25 点（各小問 5 点）／目安 45～65 分

半径 a の滑らかな円環を鉛直な直径の周りに一定角速度 Ω で回転させる。質量 m のビーズは円環上を摩擦なく動く。最下点から測った角度を θ とし、位置の高さを $z = -a \cos \theta$ とする。重力加速度を g とする。

- (1) 慣性系での運動エネルギーと Lagrangian を求めよ。
- (2) θ の Euler-Lagrange 方程式を導け。
- (3) 有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(\theta)$ を求め、平衡角度を列挙せよ。
- (4) 最下点 $\theta = 0$ の安定条件と微小振動角周波数を求めよ。
- (5) $\Omega^2 > g/a$ で現れる斜めの平衡点の角度と微小振動角周波数を求めよ。

16 第 4 回・問 4 積分作用素の固有値と Fredholm 方程式

25 点 (各小問 5 点) / 目安 45~65 分

$0 \leq x \leq 1$ 上で、 $(Kf)(x) = \int_0^1 \min(x, y)f(y)dy$ を定める。連続関数を考え、必要に応じ微分可能とする。

- (1) $g = Kf$ の微分 g'' と端点条件 $g(0), g'(1)$ を求めよ。
- (2) $Kf = \lambda f$ ($\lambda \neq 0$) の固有関数と固有値を求めよ。
- (3) 正規直交化した固有関数を挙げよ。
- (4) $\text{Tr } K = \int_0^1 K(x, x)dx$ を計算し、固有値の級数と比較せよ。
- (5) $f(x) = x + \alpha(Kf)(x)$ を $\alpha > 0, \cos \sqrt{\alpha} \neq 0$ の場合に解き、共鳴条件を説明せよ。

第 5 回 格子模型・フォノン・結合回路・波動

17 第 5 回・問 1 二量体一次元格子のバンドと端状態 (+)

25 点 (各小問 5 点) / 目安 45~65 分

2 つの副格子 A, B を 1 組とする周期格子の Bloch Hamiltonian を

$$H(k) = \begin{pmatrix} 0 & t_1 + t_2 e^{-ika} \\ t_1 + t_2 e^{ika} & 0 \end{pmatrix}, \quad -\pi/a \leq k < \pi/a, \quad t_1, t_2 > 0$$

とする。半無限鎖では、各セルの結合は $A_n - B_n$ が t_1 、 $B_n - A_{n+1}$ が t_2 とする。

- (1) 二つのエネルギーバンド $E_{\pm}(k)$ を求めよ。
- (2) バンドギャップと閉じる条件を求めよ。
- (3) 副格子対称性 (chiral 対称性) を行列で示せ。
- (4) 複素数 $q(k) = t_1 + t_2 e^{-ika}$ の原点周りの巻き数を求め、位相が変化する条件を述べよ。
- (5) $t_2 > t_1$ の半無限開放鎖で、一方の副格子に載る零エネルギー端状態の振幅比と局在長を求めよ。

18 第 5 回・問 2 Debye 模型と低温比熱

25 点 (各小問 5 点) / 目安 45~65 分

N 個の原子を持つ三次元結晶の音響フォノンを Debye 模型で記述する。モード数は $3N$ 、角周波数 $0 \leq \omega \leq \omega_D$ に対する状態密度は $g(\omega) = C\omega^2$ とする。 $\Theta_D = \hbar\omega_D/k_B$ 。

- (1) C を決めて状態密度を規格化せよ。
- (2) 零点エネルギー E_0 を求めよ。
- (3) 熱励起エネルギー $U_{\text{th}}(T)$ を無次元積分で表せ。
- (4) $T \ll \Theta_D$ で比熱 C_V の先頭次数を求めよ。
- (5) $T \gg \Theta_D$ の比熱極限を求め、その物理的意味を述べよ。

19 第 5 回・問 3 相互インダクタンスをもつ二つの RL 回路

25 点（各小問 5 点）／目安 45～65 分

同一の自己インダクタンス L 、抵抗 R を持つ 2 つの閉回路が、正の相互インダクタンス M ($0 < M < L$) で結合している。電流の正方向は結合項の符号が $+M$ となるようにとる。 $t = 0$ に回路 1 へ一定電圧 $\mathcal{V}$ を投入し、初期電流はともに 0。回路 2 には電源を入れない。

- (1) 回路方程式を $I_1(t), I_2(t)$ に対して書け。
- (2) $I_{\pm} = I_1 \pm I_2$ の時間発展方程式を求めよ。
- (3) $I_1(t), I_2(t)$ を明示し、誘導電流の符号を論ぜよ。
- (4) 磁気エネルギーを $I_{\pm}$ で表し、正定値性を示せ。
- (5) エネルギー収支式と $t \rightarrow \infty$ の電流を求めよ。

20 第 5 回・問 4 半無限弦の波動方程式と反射

25 点 (各小問 5 点) / 目安 45~65 分

$x \geq 0$ に張られた弦の小さな変位 $u(x, t)$ は $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ に従う。初めは境界を固定端 $u(0, t) = 0$ とし、 F は十分滑らかで遠方では局在する関数とする。

- (1) 波動方程式の一般解を右行波・左行波の和として示せ。
- (2) 左向き入射波を $F(x + ct)$ とするとき、固定端での反射波と全解を求めよ。
- (3) 入射波を複素表示 $Ae^{-i(kx + \omega t)}$, $\omega = ck$ とした場合、固定端の反射係数と節の位置を求めよ。
- (4) 端点を自由端 $u_x(0, t) = 0$ に替えたときの反射係数を求めよ。
- (5) 固定端での弦のエネルギー $E = \frac{\rho}{2} \int_0^\infty (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx$ が保存する条件を導け。ただし ρ は線密度。

詳解編

第 1 回 詳解：束縛状態・熱力学・境界条件・行列

21 第 1 回・問 1 一次元有限井戸 (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

- (1) 時間に依存しない Schrödinger 方程式は $-\hbar^2 \psi'' / (2m) + V\psi = E\psi$ 。井戸内では $\psi'' + q^2 \psi = 0$ なので $A \cos qx + B \sin qx$ 、外では $\psi'' - \kappa^2 \psi = 0$ なので減衰指数関数になる。 V は有限の跳びしか持たないため、界面で ψ, ψ' の両方が連続である。

- (2) $x \geq 0$ の偶状態は内側 $A \cos qx$ 、外側 $A \cos(qa)e^{-\kappa(x-a)}$ 。 $x = a$ の導関数を接続すると $-q \sin qa = -\kappa \cos qa$ 、よって

$$q \tan(qa) = \kappa \quad (\text{偶}).$$

奇状態は内側 $A \sin qx$ 、外側 $A \sin(qa)e^{-\kappa(x-a)}$ 、従って

$$-q \cot(qa) = \kappa \quad (\text{奇}).$$

これらと $q^2 + \kappa^2 = 2mV_0/\hbar^2$ を連立する。

- (3) 偶関数の規格化条件は

$$1 = 2A^2 \int_0^a \cos^2(qx) dx + 2A^2 \cos^2(qa) \int_a^\infty e^{-2\kappa(x-a)} dx.$$

各積分を実行して

$$A^{-2} = a + \frac{\sin(2qa)}{2q} + \frac{\cos^2(qa)}{\kappa}.$$

$A > 0$ と選んでも一般性を失わない。

- (4) 奇状態の最初の出現は $\kappa \downarrow 0$ のとき $qa \downarrow \pi/2$ 。従って無次元深さ $\eta = a\sqrt{2mV_0}/\hbar$ について

$$\eta > \frac{\pi}{2}$$

で奇束縛状態が存在する。等号は $E = 0$ の非正規化閾値状態であり、束縛状態として数えない。偶状態は任意の $V_0 > 0$ で 1 つ以上存在する。

- (5) $\eta \ll 1$ なら $qa \ll 1$ 、 $\tan qa \simeq qa$ なので $\kappa \simeq q^2 a$ 。 $q^2 + \kappa^2 = 2mV_0/\hbar^2$ と合わせると $\kappa \simeq 2mV_0 a/\hbar^2$ 。従って

$$E \simeq -\frac{2mV_0^2 a^2}{\hbar^2}.$$

この結果は幅 $2a$ の弱い引力の積分 $\int V dx = -2aV_0$ から得られる一般の一次元弱結合結果とも一致する。

確認のポイント：有限段差では波動関数とその一次導関数が連続。デルタ関数の接続条件と混同しない。

22 第 1 回・問 2 重力下の気体 (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

- (1) $H = \mathbf{p}^2/(2m) + mgz$ 。水平積分が A 、鉛直積分が $1/(\beta mg)$ 、運動量積分が $(2\pi m/\beta)^{3/2}$ なので

$$Z_1 = \frac{A}{\lambda_T^3 \beta mg}.$$

- (2) Maxwell-Boltzmann 近似では $Z_N = Z_1^N/N!$ 。粒子数保存と位置分布の正規化から

$$n(z) = \frac{N\beta mg}{A} e^{-\beta mgz}, \quad A \int_0^\infty n(z) dz = N.$$

- (3) 指数分布 $P(z) = \beta mg e^{-\beta mgz}$ の積分より

$$\langle z \rangle = \frac{1}{\beta mg} = \frac{k_B T}{mg}, \quad \text{Var}(z) = \frac{1}{(\beta mg)^2}.$$

- (4) $U = -\partial_\beta \ln Z_N$ で、 $\lambda_T^{-3} \propto \beta^{-3/2}$ および鉛直積分 $\propto \beta^{-1}$ を使う。

$$U = \frac{5}{2} N k_B T, \quad C_{V,A,g} = \frac{5}{2} N k_B.$$

運動エネルギー $3Nk_B T/2$ と平均重力ポテンシャル $Nk_B T$ の和である。

- (5) 局所理想気体式 $P(z) = n(z)k_B T$ から $dP/dz = -mgn(z)$ 。底面では

$$P_0 = n(0)k_B T = \frac{Nmg}{A}, \quad P_0 A = Nmg.$$

重さが全て底面に伝わることと整合する。容器を無限高とする極限は粒子数・重力 g 固定で正当化される。

確認のポイント：重力ポテンシャルを含めると $C_V = 3Nk_B/2$ ではない。熱的高さ $k_B T/(mg)$ も温度で変わる。

23 第 1 回・問 3 誘電体球 (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

- (1) 一様場が $l = 1$ 成分なので、原点で有限・無限遠で所与の場になる解を

$$\phi_{\text{in}} = -Cr \cos \theta, \quad \phi_{\text{out}} = -E_0 r \cos \theta + \frac{D \cos \theta}{r^2}$$

と置く。 C, D は境界条件で決める。

- (2) 自由表面電荷がないので、 $E_\theta^{\text{in}} = E_\theta^{\text{out}}$ と $\varepsilon_1 E_r^{\text{in}} = \varepsilon_2 E_r^{\text{out}}$ 。ポテンシャルで表すと

$$Ca = E_0 a - D/a^2, \quad \varepsilon_1 C = \varepsilon_2 (E_0 + 2D/a^3).$$

- (3) 第 1 式から $D = a^3(E_0 - C)$ 。第 2 式へ代入すると

$$C = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0, \quad \boxed{\mathbf{E}_{\text{in}} = C \hat{z}}.$$

- (4) 双極子ポテンシャルは $\phi_{\text{dip}} = p \cos \theta / (4\pi\varepsilon_2 r^2)$ 。従って

$$\boxed{\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_2 a^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \mathbf{E}_0}, \quad \boxed{\alpha = 4\pi\varepsilon_2 a^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}}.$$

- (5) $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ では内場 0、 $p \rightarrow 4\pi\varepsilon_2 a^3 E_0$ (完全導体球)。 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ では $C = E_0, D = 0$ となり界面による分極・散乱は消える。

確認のポイント：法線方向で連続なのは E_r ではなく $D_r = \varepsilon E_r$ 。球の外部電場は双極子項を持つ。

24 第 1 回・問 4 階数一摂動（詳解）

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

(1)

$$H = \begin{pmatrix} g/2 & g/2 & 0 \\ g/2 & \Delta + g/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Delta \end{pmatrix}.$$

$e_3 = (0, 0, 1)^T$ は任意の g で固有ベクトル、固有値は 2Δ 。

(2) $\lambda \notin \{0, \Delta, 2\Delta\}$ について行列式補題より

$$\det(H - \lambda I) = \det(D - \lambda I) [1 + g u^T (D - \lambda I)^{-1} u],$$

$$1 + \frac{g}{2} \left(\frac{1}{-\lambda} + \frac{1}{\Delta - \lambda} \right) = 0.$$

極での式は連続延長して解釈する。2 次因子は $\lambda^2 - (\Delta + g)\lambda + g\Delta/2 = 0$ 。

(3) 2 次方程式を解き

$$\lambda_{\pm} = \frac{\Delta + g \pm \sqrt{\Delta^2 + g^2}}{2}, \quad \lambda_3 = 2\Delta.$$

数値的に順序が交替する g の領域もあるため、 λ_+ を常に「2 番目の固有値」とは呼ばない。

(4) $\sqrt{\Delta^2 + g^2} = \Delta + g^2/(2\Delta) + O(g^4)$ なので

$$\lambda_- = \frac{g}{2} - \frac{g^2}{4\Delta} + O(g^4/\Delta^3).$$

g^3 項はこの例では 0。

(5) $\theta = \frac{1}{2} \arctan(g/\Delta)$ ($-\pi/4 < \theta < \pi/4$) とすれば、低い枝の単位固有ベクトルは $(\cos \theta, -\sin \theta, 0)^T$ 。 $\tan 2\theta = g/\Delta$ 。 $g \rightarrow 0$ で e_1 に収束する。高い枝は $(\sin \theta, \cos \theta, 0)^T$ 。

確認のポイント： ランク 1 でも全固有値が同じ量だけ移動するわけではない。固有ベクトルの混合は g/Δ で制御される。

第 2 回 詳解：角運動量・熱輻射・電磁誘導・拡散

25 第 2 回・問 1 スピン軌道結合 (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

(1) $J^2 = L^2 + S^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ より

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2).$$

(2) $l(l+1) = 2, s(s+1) = 3/4$ 。 $j = 3/2$ は $j(j+1) = 15/4$ で $E_{3/2} = \lambda/2$ (4 重)、 $j = 1/2$ は $j(j+1) = 3/4$ で $E_{1/2} = -\lambda$ (2 重)。(3) $\text{Tr } H_{\text{so}} = 4(\lambda/2) + 2(-\lambda) = 0$ 。非結合基底での L_i, S_i のトレースが 0 であることとも一致する。(4) j 多重項内で $\langle L_z + 2S_z \rangle = \hbar g_j m_j$ 。Landé 因子は

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}.$$

従って

$$g_{3/2} = 4/3, \quad g_{1/2} = 2/3, \quad \Delta E_{jm} = \mu_B B g_j m.$$

磁場による多重項間の混合は 2 次以上であり、 $|\mu_B B| \ll \lambda$ の範囲で無視した。

(5) 全体位相を除いて

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |m_l = 0, m_s = \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |m_l = 1, m_s = -\frac{1}{2}\rangle.$$

 $L_z + 2S_z$ の固有値 ($\hbar$ 単位) は前者 1、後者 0 であるから期待値は $\hbar/3$ 。 $g_{1/2} m = (2/3)(1/2) = 1/3$ と一致する。**確認のポイント：**磁場の係数の符号は問題文で定義した H_Z に従う。自由電子の磁気モーメントの符号を二重に入れない。

26 第 2 回・問 2 黒体輻射 (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

- (1) 波数空間の体積要素 $4\pi k^2 dk$ 、状態密度 $V/(2\pi)^3$ 、偏光 2 から $2 \cdot 4\pi k^2/(2\pi)^3 \cdot dk/d\omega$ 。
 $k = \omega/c$ なので

$$\frac{g(\omega)}{V} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}.$$

- (2) Bose 占有数 $n_B = (e^{\beta\hbar\omega} - 1)^{-1}$ より

$$u = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\beta\hbar\omega} - 1)} d\omega = \boxed{a_R T^4}, \quad a_R = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3}.$$

- (3) 光子の群速度の方向平均で圧力は運動量流束 $P = u/3$ 。 $F = -k_B T \ln \Xi$ を各モードで和すると $F = -\frac{1}{3}uV$ (零点エネルギーを除く)。従って

$$\boxed{P = \frac{1}{3}a_R T^4}, \quad \boxed{F = -\frac{1}{3}a_R V T^4}.$$

また $-(\partial F/\partial V)_T = P$ を満たす。

- (4) $S = -(\partial F/\partial T)_V = (4/3)a_R V T^3$ 、 $C_V = (\partial U/\partial T)_V = 4a_R V T^3$ 。すなわち

$$\boxed{S = \frac{4}{3}a_R V T^3}, \quad \boxed{C_V = 4a_R V T^3}.$$

- (5) S 一定より $VT^3 = \text{const}$ 、従って

$$\boxed{TV^{1/3} = \text{const}}.$$

光子数が熱平衡で変わるため、物質粒子数一定の断熱法則を代用しない。

確認のポイント： ω は角周波数。通常周波数 ν を用いたモード密度との 2π の差に注意。

27 第 2 回・問 3 動く導体棒 (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

- (1) 回路の磁束の大きさが $\Phi = B\ell x$ で変わるの、起電力の大きさは

$$|\mathcal{E}| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = B\ell v.$$

- (2) 正の速度で増加する磁束を打ち消す向きに誘導電流が流れる。大きさは $I = B\ell v/R$ 。棒への磁気力は運動と反対方向で

$$F_B = -I\ell B = -\frac{B^2\ell^2}{R}v.$$

符号は Lenz の法則で判定した。

- (3) 運動方程式 $m\dot{v} = -(B^2\ell^2/R)v$ を積分して

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{mR}{B^2\ell^2}.$$

- (4) $x_\infty - x_0 = \int_0^\infty v_0 e^{-t/\tau} dt = v_0 \tau$ 。Joule 熱は

$$Q = \int_0^\infty I^2 R dt = \frac{B^2\ell^2 v_0^2}{R} \frac{\tau}{2} = \left[\frac{1}{2} m v_0^2 \right].$$

終状態で速度は 0 になり、初期運動エネルギーが全て熱になった。

- (5) 一定外力下で $m\dot{v} = F_0 - B^2\ell^2 v/R$ 。定常状態は

$$v_{\text{terminal}} = \frac{F_0 R}{B^2\ell^2}.$$

この時 $F_0 v = I^2 R$ が成り立つ。

確認のポイント：起電力と磁気力の符号を同時に整合させる。誘導電流は棒の運動を助けな

28 第 2 回・問 4 有限区間の熱方程式 (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

- (1) 変数分離 $u = X(x)T(t)$ より $X'' = -k^2 X$ 。Dirichlet 条件から

$$X_n(x) = \sin(n\pi x/L), \quad k_n = n\pi/L, \quad \lambda_n = Dk_n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

- (2) $x(L-x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L)$ 。直交性で

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x(L-x) \sin(n\pi x/L) dx = \frac{4L^2[1 - (-1)^n]}{n^3\pi^3}.$$

偶数 n は 0、奇数 n は $8L^2/(n^3\pi^3)$ 。

- (3) 各モードの時間因子は $e^{-D(n\pi/L)^2 t}$ 。

$$u(x, t) = \sum_{n \text{ odd}} \frac{8L^2}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-Dn^2\pi^2 t/L^2}.$$

長時間では $n = 1$ 項 $\simeq 8L^2 \sin(\pi x/L) e^{-D\pi^2 t/L^2} / \pi^3$ が支配する。

- (4) 正弦波積分で $\int_0^L \sin(n\pi x/L) dx = 2L/(n\pi)$ (奇数のみ)。

$$Q(t) = \frac{16L^3}{\pi^4} \sum_{n \text{ odd}} \frac{e^{-Dn^2\pi^2 t/L^2}}{n^4}.$$

$\sum_{n \text{ odd}} n^{-4} = \pi^4/96$ から $Q(0) = L^3/6 = \int_0^L x(L-x) dx$ 。

- (5) 積分部分で境界項 $uu_x|_0^L = 0$ を使い

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 2D \int_0^L uu_{xx} dx = -2D \int_0^L (u_x)^2 dx \leq 0.$$

確認のポイント：初期条件の空間対称性から偶数モードが消える。保存則ではなく境界への散逸がある。

第 3 回 詳解：急変・確率過程・光学分散・ 複素解析

29 第 3 回・問 1 調和振動子の周波数急変（詳解）

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

- (1) 急変直後は状態ベクトル自体は不連続に変化しない。初期基底状態の Gaussian 分散は

$$\langle x^2 \rangle_{0+} = \frac{\hbar}{2m\omega_i}, \quad \langle p^2 \rangle_{0+} = \frac{\hbar m\omega_i}{2}.$$

- (2) 最終 Hamiltonian の期待値は

$$\langle H_f \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_f^2 \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{4} \left(\omega_i + \frac{\omega_f^2}{\omega_i} \right).$$

$\omega_f = \omega_i$ で $\hbar\omega_i/2$ に戻る。

- (3) $H_f = \hbar\omega_f(N_f + 1/2)$ なので

$$\bar{n}_f = \frac{\langle H_f \rangle}{\hbar\omega_f} - \frac{1}{2} = \frac{(\omega_f - \omega_i)^2}{4\omega_f\omega_i} \geq 0.$$

- (4) 二つの基底状態 Gaussian の重なりを計算する。 $\psi_0^{(\omega)}(x) = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} \exp[-m\omega x^2/(2\hbar)]$ であるから

$$P_0 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^{(\omega_f)}(x)^* \psi_0^{(\omega_i)}(x) dx \right|^2 = \frac{2\sqrt{\omega_i\omega_f}}{\omega_i + \omega_f}.$$

Cauchy-Schwarz より $P_0 \leq 1$ 。 $\omega_i = \omega_f$ で 1。

- (5) 最終 Hamiltonian での Heisenberg 解は $x(t) = x(0) \cos \omega_f t + p(0) \sin \omega_f t / (m\omega_f)$ 。初期基底では $\langle xp + px \rangle = 0$ 。よって

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{\hbar}{2m} \left(\frac{\cos^2 \omega_f t}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f^2} \sin^2 \omega_f t \right).$$

$2\omega_f$ の幅の振動は Gaussian がスクイーズド状態となることを表す。

確認のポイント：エネルギーは急変時に保存されない。変化した Hamiltonian についての期待値を計算すること。

30 第 3 回・問 2 過減衰 Langevin 方程式 (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

(1) $\alpha = k/\gamma$ と置き、 $f = 0$ の解は

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t} + \frac{1}{\gamma} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \eta(s) ds.$$

従って $\langle x(t) \rangle = x_0 e^{-\alpha t}$ 。雑音の 2 点相関から

$$\text{Var}[x(t)] = \frac{2k_B T}{\gamma} \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} ds = \boxed{\frac{k_B T}{k} (1 - e^{-2\alpha t})}.$$

(2) $t \rightarrow \infty$ では $\langle x \rangle = 0$ 、

$$\boxed{\langle x^2 \rangle_{\text{eq}} = \frac{k_B T}{k}}.$$

平衡分布 $p(x) \propto \exp[-kx^2/(2k_B T)]$ でも検算できる。(3) $t \geq 0$ で $x(t) = e^{-\alpha t} x(0) + (x(0)$ と無相関な雑音項)。従って

$$\boxed{C(t) = \frac{k_B T}{k} e^{-\alpha|t|}}.$$

絶対値は平衡定常性 $C(-t) = C(t)$ による。(4) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{i\omega t} dt = 2\alpha/(\alpha^2 + \omega^2)$ を使い

$$\boxed{S_{xx}(\omega) = \frac{2\gamma k_B T}{k^2 + \gamma^2 \omega^2}}.$$

 S_{xx} は角周波数による二側 PSD であり、 2π 規約を問題文に従っている。(5) 線形方程式 $\gamma \dot{x} + kx = f_0 e^{-i\omega t}$ から

$$\boxed{\chi(\omega) = \frac{1}{k - i\gamma\omega}}, \quad \text{Im}\chi = \frac{\gamma\omega}{k^2 + \gamma^2\omega^2}.$$

よって古典的揺らぎ散逸関係

$$\boxed{S_{xx}(\omega) = \frac{2k_B T}{\omega} \text{Im}\chi(\omega)}$$

が成り立つ。 $\omega \rightarrow 0$ は連続極限で解釈する。

確認のポイント：量子系の非可換な演算子の感受率へ、古典揺らぎ散逸公式を無条件に代入してはいけない。

31 第 3 回・問 3 Lorentz 分散 (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

(1) $x(t) = \text{Re}(x_0 e^{-i\omega t})$ とすると

$$m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega)x_0 = -eE_0.$$

 $p_0 = -ex_0$ より

$$p_0 = \frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega)}.$$

(2) 分極 $P = np$ 、 $D = \varepsilon_0 E + P$ を用いると

$$\chi_e(\omega) = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega)}, \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0[1 + \chi_e(\omega)].$$

(3) $A = \omega_0^2 - \omega^2$, $B = \Gamma\omega > 0$ と置けば $(A - iB)^{-1} = (A + iB)/(A^2 + B^2)$ 。従って

$$\text{Im} \varepsilon(\omega) = \frac{ne^2 \Gamma \omega}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2]} > 0 \quad (\omega > 0).$$

(4) 1 周期の平均電場から物質への仕事率は $\langle E \partial_t P \rangle$ 。複素表示の平均公式から

$$\overline{w} = \frac{\omega}{2} \text{Im} \varepsilon(\omega) |E_0|^2 \geq 0.$$

 $|E_0|$ はピーク振幅 (RMS 振幅ではない) とする。散逸は $\Gamma > 0$ に由来する。(5) $\omega \ll \omega_0$ なら

$$\chi_e(0) = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0\omega_0^2}, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0 + \frac{ne^2}{m\omega_0^2}.$$

形式的に $\Gamma = 0$ で共鳴点を除けば χ_e は $\omega < \omega_0$ で正、 $\omega > \omega_0$ で負。実際には共鳴付近は有限 Γ が重要である。**確認のポイント：** $e^{-i\omega t}$ 規約では受動媒質の吸収に対応する $\text{Im} \varepsilon$ は正。規約の変更で虚部の表示符号も変わる。

32 第 3 回・問 4 複素積分と畳み込み (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

(1) 被積分関数 $1/(z^2 + a^2)$ の単純極は $z = ia, -ia$ 。 $b > 0$ なら e^{ibz} が上半平面で減衰するので、上半円に閉じた反時計回りの輪郭を使う。

(2) $z = ia$ の留数は $e^{-ab}/(2ia)$ 。留数定理より $F(b) = 2\pi i e^{-ab}/(2ia) = \pi e^{-ab}/a$ ($b > 0$)。偶関数性から

$$F(b) = \frac{\pi}{a} e^{-a|b|} \quad (b \in \mathbb{R}).$$

(3) $\partial_a(x^2 + a^2)^{-1} = -2a(x^2 + a^2)^{-2}$ より微分と積分を交換できる。従って

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ibx}}{(x^2 + a^2)^2} dx = -\frac{1}{2a} \partial_a F(b) = \frac{\pi}{2a^3} (1 + a|b|) e^{-a|b|}.$$

(4) $f(x) = 1/(x^2 + a^2)$ の畳み込み $I(b) = (f * f)(b)$ 。Fourier 表示では $\hat{I}(k) = F(k)^2 = \pi^2 e^{-2a|k|}/a^2$ 。逆変換すると

$$I(b) = \frac{\pi^2}{a^2} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikb-2a|k|} dk = \frac{2\pi}{a(b^2 + 4a^2)}.$$

$b = 0$ で $\pi/(2a^3)$ となり (3) の極限と一致。

(5) Parseval より $\int |F(b)|^2 db/(2\pi) = \int f(x)^2 dx$ 。左辺を直接積分すると

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi^2}{a^2} e^{-2a|b|} db = \frac{\pi}{2a^3},$$

(3) の $b = 0$ と等しい。

確認のポイント： 上半平面と下半平面を取り違えると符号や指数減衰を誤る。 $F(b)$ は実・正・偶関数。

第 4 回 詳解：散乱・格子統計・安定性・作用素

33 第 4 回・問 1 球面デルタ殻 (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

- (1) s 波で $u = rR$ は一次元方程式 $-\hbar^2 u''/(2m) + V(r)u = Eu$ に従う。負エネルギーでの内外の解は $u_{<}(r) = A \sinh(\kappa r)$ ($u(0) = 0$) と $u_{>}(r) = B e^{-\kappa(r-a)}$ ($r \rightarrow \infty$ で減衰)。

- (2) 方程式を殻の前後で積分すれば

$$u'(a^+) - u'(a^-) = -\frac{2mg}{\hbar^2} u(a).$$

連続条件は $B = A \sinh \kappa a$ 。よって

$$-\kappa B - \kappa A \cosh \kappa a = -\frac{2mg}{\hbar^2} B$$

から

$$\frac{\kappa}{1 - e^{-2\kappa a}} = \frac{mg}{\hbar^2}, \quad \text{すなわち} \quad \frac{2y}{1 - e^{-2y}} = s \quad (y = \kappa a).$$

- (3) $y > 0$ において $h(y) = 2y/(1 - e^{-2y})$ は狭義単調増加で $h(0^+) = 1$ 。従って束縛解が存在する必要十分条件は

$$s > 1.$$

$s = 1$ はゼロエネルギーの閾値 (正規化できない) である。

- (4) $h(y) = 1 + y + O(y^2)$ なので $s = 1 + \epsilon$ で $y = \epsilon + O(\epsilon^2)$ 。従って

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} \simeq -\frac{\hbar^2}{2ma^2} (s - 1)^2.$$

- (5) 零エネルギーでは $u_{<}(r) = Ar$ 、 $u_{>}(r) = B(r - a_s)$ 。導関数の跳びから $B - A = -(s/a)u(a) = -sA$ 、すなわち $B = A(1 - s)$ 。連続性 $Aa = B(a - a_s)$ を使い

$$a_s = \frac{sa}{s - 1} \quad (s \neq 1).$$

$s \rightarrow 1^\pm$ で散乱長が発散・符号反転し、浅い束縛状態の出現と対応する。

確認のポイント: 3 次元には一般に「任意の弱い引力でも束縛状態がある」という一次元の性質はない。

34 第 4 回・問 2 独立サイト格子気体（詳解）

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

- (1) サイト占有数 $n = 0, 1$ について $\Xi_1 = \sum_n e^{-\beta(\varepsilon - \mu)n} = 1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon)}$ 。独立なので

$$\Xi = (1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon)})^M.$$

- (2) $\langle n \rangle = \Xi_1^{-1} \sum_n n e^{-\beta(\varepsilon - \mu)n}$ なので

$$\rho = \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon - \mu)}}, \quad \langle N \rangle = M\rho.$$

- (3) 各サイトは Bernoulli 変数、 $\text{Var}(n) = \rho(1 - \rho)$ 。独立性より

$$\text{Var}(N) = M\rho(1 - \rho).$$

直接微分して $\partial_\mu \rho = \beta\rho(1 - \rho)$ 、従って $\partial_\mu \langle N \rangle = \beta \text{Var}(N)$ 。

- (4) 空席確率 $1 - \rho$ 、占有確率 ρ の二値分布なので

$$S_{\text{site}} = -k_B [\rho \ln \rho + (1 - \rho) \ln(1 - \rho)].$$

$\rho \rightarrow 0, 1$ で $S_{\text{site}} \rightarrow 0$ 、 $\rho = 1/2$ で最大 $k_B \ln 2$ 。

- (5) 各エネルギーのサイトが $M/2$ 個ずつ (M 偶数) あるなら

$$\langle N \rangle = \frac{M}{2} \left[\frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_A - \mu)}} + \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_B - \mu)}} \right].$$

$T \rightarrow 0$ では $\mu > \varepsilon_j$ のサイトは占有、 $\mu < \varepsilon_j$ は空席となる。 $\mu = \varepsilon_j$ ちょうどでは、この極限の大正準占有率は $1/2$ 。

確認のポイント： 占有率の Fermi 関数は、サイト間に量子トンネルがなくても二値の排他制限から現れる。

35 第 4 回・問 3 回転円環のビーズ (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

- (1) 慣性系で
- $\mathbf{r} = (a \sin \theta \cos \Omega t, a \sin \theta \sin \Omega t, -a \cos \theta)$
- 。よって

$$T = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta), \quad \boxed{\mathcal{L} = T + mga \cos \theta}.$$

- (2) Euler-Lagrange 式は
- $d/dt(ma^2\dot{\theta}) = ma^2\Omega^2 \sin \theta \cos \theta - mga \sin \theta$
- 。従って

$$\boxed{\ddot{\theta} = \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{a} \sin \theta}.$$

- (3) 有効一次元エネルギー
- $E_{\text{eff}} = ma^2\dot{\theta}^2/2 + V_{\text{eff}}$
- に対し

$$\boxed{V_{\text{eff}} = -mga \cos \theta - \frac{1}{2}ma^2\Omega^2 \sin^2 \theta}.$$

$V'_{\text{eff}} = ma^2 \sin \theta (g/a - \Omega^2 \cos \theta)$ 。従って $\theta = 0, \pi$ 、そして $\Omega^2 \geq g/a$ では $\cos \theta = g/(a\Omega^2)$ (円環上で対称な 2 点)。

- (4)
- $V''_{\text{eff}}(0) = ma^2(g/a - \Omega^2)$
- 。よって

$$\boxed{\Omega^2 < g/a \Rightarrow \theta = 0 \text{ は安定}}, \quad \boxed{\omega_{\text{small}} = \sqrt{g/a - \Omega^2}}.$$

等号は線形の復元力が消える分岐点。

- (5)
- $\Omega^2 > g/a$
- で
- $\theta_* = \arccos[g/(a\Omega^2)]$
- と
- $-\theta_*$
- が安定。二階微分は平衡条件で簡約され

$$\boxed{\omega_*^2 = \Omega^2 \sin^2 \theta_* = \Omega^2 - \frac{g^2}{a^2 \Omega^2}}.$$

円環の頂点 $\theta = \pi$ はこの条件下でも不安定である。

確認のポイント：回転軸の速度 Ω は外部から固定される。保存するのは実験室での通常の機械的エネルギーとは限らない有効エネルギー。

36 第 4 回・問 4 積分作用素 (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

(1) $g(x) = \int_0^x y f(y) dy + x \int_x^1 f(y) dy$ より

$$g'(x) = \int_x^1 f(y) dy, \quad \boxed{g''(x) = -f(x)}, \quad \boxed{g(0) = 0, \quad g'(1) = 0}.$$

(2) $Kf = \lambda f$ なら $\lambda f'' = -f$ 、 $f(0) = 0, f'(1) = 0$ 。 $\lambda > 0$ は正定値性から従う。 $k = 1/\sqrt{\lambda}$ とすると $f = A \sin kx$ 、 $\cos k = 0$ より

$$\boxed{k_n = (n + \frac{1}{2})\pi, \quad \lambda_n = \frac{1}{(n + 1/2)^2 \pi^2}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

(3) $\int_0^1 \sin^2 k_n x dx = 1/2$ なので

$$\boxed{e_n(x) = \sqrt{2} \sin[(n + \frac{1}{2})\pi x]}.$$

異なる固有値の固有関数は直交する。

(4) 連続核の跡は $\int_0^1 K(x, x) dx = \int_0^1 x dx = 1/2$ 。従って

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + 1/2)^2 \pi^2} = \frac{1}{2}}.$$

これは奇数逆二乗級数の恒等式 $\sum_{n \geq 0} 1/(2n + 1)^2 = \pi^2/8$ と一致する。(5) $f = x + \alpha Kf$ を二度微分すると $f'' = -\alpha f$ 。端点で $f(0) = 0, f'(1) = 1$ 、従って

$$\boxed{f(x) = \frac{\sin(\sqrt{\alpha} x)}{\sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha}}}.$$

 $\alpha \rightarrow 0$ で $f \rightarrow x$ 。 $\cos \sqrt{\alpha} = 0$ 、すなわち $\alpha = 1/\lambda_n$ では対応する固有モードとの共鳴で、右辺 x に非零の射影があるため解は存在しない。確認のポイント： K は $-\partial_x^2$ の混合境界条件付き逆作用素。核 $\min(x, y)$ の微分で符号を確かめる。

第 5 回 詳解：格子模型・フォノン・結合回路・波動

37 第 5 回・問 1 SSH 模型 (+) (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

(1) $H(k)^2 = |q(k)|^2 I$ 、 $q(k) = t_1 + t_2 e^{-ika}$ だから

$$E_{\pm}(k) = \pm \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \cos(ka)}.$$

(2) $\cos ka \geq -1$ より $\min_k |q(k)| = |t_1 - t_2|$ 。二つのバンドの直結ギャップは

$$E_{\text{gap}} = 2|t_1 - t_2|.$$

$t_1 = t_2$ で Brillouin ゾーン端 $k = \pi/a$ において閉じる。

(3) $\Gamma = \sigma_z = \text{diag}(1, -1)$ とすれば、非対角行列のため

$$\Gamma H(k) \Gamma = -H(k), \quad \text{すなわち } \{\Gamma, H\} = 0.$$

エネルギー E と $-E$ の対が保障される。

(4) k を $-\pi/a$ から π/a まで動かすと $q(k) = t_1 + t_2 e^{-ika}$ は複素平面で中心 t_1 、半径 t_2 の円を時計回りに一周する。原点を囲むかで

$$\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \partial_k \ln q(k) dk = \begin{cases} -1, & t_2 > t_1, \\ 0, & t_1 > t_2. \end{cases}$$

この向きの符号は Bloch 基底の規約に依存するが、非自明／自明の区別は同じである。
 $t_1 = t_2$ は閉ギャップで巻き数が定義できない。

(5) 半無限鎖 $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ に左端を設け、零エネルギーの状態として $B_n = 0$ を試みる。 B_n の Schrödinger 式は $t_1 A_n + t_2 A_{n+1} = 0$ 、ゆえに

$$A_{n+1} = -\frac{t_1}{t_2} A_n, \quad A_n = A_1 (-t_1/t_2)^{n-1}.$$

$t_1 < t_2$ なら正規化可能で、 $|A_n| \sim e^{-(n-1)a/\xi}$ より

$$\xi = \frac{a}{\ln(t_2/t_1)}.$$

有限鎖の左右の端状態は一般に指数関数的に混成し、厳密な零エネルギーからわずかにずれる。

確認のポイント：+ α ：この問題は幾何学的位相・トポロジカルバンドの基礎例。必須の標準解法を優先してから取り組む。

38 第 5 回・問 2 Debye 比熱 (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

- (1) 全モード数が $3N$ なので $\int_0^{\omega_D} C\omega^2 d\omega = C\omega_D^3/3 = 3N$ 。よって

$$g(\omega) = \frac{9N}{\omega_D^3} \omega^2 \quad (0 \leq \omega \leq \omega_D).$$

- (2) 各量子調和振動子の零点エネルギー $\hbar\omega/2$ を積分し

$$E_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\omega_D} \hbar\omega g(\omega) d\omega = \frac{9}{8} N \hbar\omega_D.$$

これは熱容量には寄与しない。

- (3) Bose 占有数 $n_B(\omega) = (e^{\beta\hbar\omega} - 1)^{-1}$ を使い

$$U_{\text{th}} = \int_0^{\omega_D} \hbar\omega g(\omega) n_B(\omega) d\omega.$$

$x = \hbar\omega/(k_B T)$ と置いて

$$U_{\text{th}} = 9Nk_B T \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

- (4) $T \ll \Theta_D$ なら上限を無限大に延長でき、積分は $\pi^4/15$ 。 $U_{\text{th}} \simeq (3\pi^4/5) Nk_B T^4/\Theta_D^3$ だから

$$C_V \simeq \frac{12\pi^4}{5} Nk_B \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3.$$

これは三次元音響分散による Debye の T^3 則。

- (5) 高温では $\hbar\omega/(e^{\beta\hbar\omega} - 1) \simeq k_B T$ なので $U_{\text{th}} \simeq 3Nk_B T$ 。従って

$$C_V \rightarrow 3Nk_B \quad (T \gg \Theta_D).$$

調和モードの古典的等分配則 (Dulong–Petit 則) に一致する。

確認のポイント： 状態密度 $g(\omega)$ を積分した全モード数は $3N$ 。零点エネルギーは内部エネルギーに入るが比熱は変えない。

39 第 5 回・問 3 結合 RL 回路 (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

(1) KVL と結合インダクタンスの起電力から

$$\boxed{L\dot{I}_1 + M\dot{I}_2 + RI_1 = \mathcal{V}}, \quad \boxed{M\dot{I}_1 + L\dot{I}_2 + RI_2 = 0}.$$

(2) 両式の和・差を取ると $I_+ = I_1 + I_2, I_- = I_1 - I_2$ について

$$\boxed{(L + M)\dot{I}_+ + RI_+ = \mathcal{V}}, \quad \boxed{(L - M)\dot{I}_- + RI_- = \mathcal{V}}.$$

$L > M > 0$ なので二つの緩和時間は正。

(3) $I_{\pm}(0) = 0$ より

$$I_{\pm}(t) = \frac{\mathcal{V}}{R} \left(1 - e^{-t/\tau_{\pm}} \right), \quad \tau_{\pm} = \frac{L \pm M}{R}.$$

従って

$$\boxed{I_1 = \frac{\mathcal{V}}{2R}(2 - e^{-t/\tau_+} - e^{-t/\tau_-})}, \quad \boxed{I_2 = \frac{\mathcal{V}}{2R}(e^{-t/\tau_-} - e^{-t/\tau_+})}.$$

$\tau_+ > \tau_-$ だから $I_2(t) < 0$ ($t > 0, \mathcal{V} > 0$)。電流は磁束変化を打ち消す向き。

(4) 蓄積磁気エネルギーは

$$U = \frac{1}{2}L(I_1^2 + I_2^2) + MI_1I_2 = \boxed{\frac{1}{4}[(L + M)I_+^2 + (L - M)I_-^2]}.$$

$L > M > 0$ により $U \geq 0$ で、電流が 0 でない限り正である。

(5) 方程式に I_1, I_2 をそれぞれ掛けて加えれば

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = \mathcal{V}I_1 - R(I_1^2 + I_2^2)}.$$

外部電源の供給電力が磁場エネルギーと抵抗損失へ分配される。定常値は

$$\boxed{I_1(\infty) = \mathcal{V}/R, \quad I_2(\infty) = 0}.$$

確認のポイント：相互誘導 M の符号は回路電流の正方向に依存する。問題文の符号規約のもとでは短時間の二次電流は負。

40 第 5 回・問 4 半無限弦の反射 (詳解)

計算過程・適用条件・極限の検査を付した独立解答

(1) d'Alembert 解は

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

 F は左向き ($-x$)、 G は右向き ($+x$) に速さ c で伝搬する。(2) 固定端で $0 = u(0, t) = F(ct) + G(-ct)$ 、従って $G(s) = -F(-s)$ 。よって

$$u(x, t) = F(x + ct) - F(ct - x).$$

これは奇延長による像の方法に対応する。

(3) $u_{\text{inc}} = Ae^{-i(kx + \omega t)}$ と $u_{\text{ref}} = rAe^{i(kx - \omega t)}$ と置く。 $x = 0$ で $1 + r = 0$ だから

$$r = -1, \quad u = -2iA \sin(kx)e^{-i\omega t}.$$

節は $x = n\pi/k$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)。反射で変位の位相は π ずれる。(4) 自由端条件は $\partial_x u(0, t) = 0$ 。上の入射・反射の複素波を代入すると $-ik + ikr = 0$ より

$$r = +1.$$

端では変位に節ではなく腹が現れる ($u \propto \cos kx$)。(5) 方程式を ρu_t 倍し $x \geq 0$ で積分する。

$$\frac{dE}{dt} = \rho c^2 [u_t u_x]_0^\infty.$$

遠方で波が十分減衰し、固定端条件を時間微分して $u_t(0, t) = 0$ だから

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

有限エネルギー解と時間に依存しない固定端が仮定される。外部から端点を駆動すれば境界仕事が生じ、一般には保存しない。

確認のポイント：波の伝搬方向により $e^{\pm ikx}$ の割り当てが変わる。固定端 $r = -1$ 、自由端 $r = +1$ は変位振幅の反射係数。

出題傾向の読み方と第 2 集の狙い

出題設計の根拠

近年の公開過去問と 2026 年度の公式出題意図を参照し、「公式の暗記より、基本方程式の選択・導出・計算・極限検査を試す」という方針で作問した。公式情報源は<https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/about/147/>、入試の試験構成は<https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/wp-content/uploads/2026/05/78c404396b12643389f0bb43de97ce12.pdf> を参照。

本書ではこれまでの過去問の出題頻度を**厳密な予測確率**へ換算していない。年度・分野ごとに試験形式が変わっているため、単純な回数集計には選択バイアスがある。近年の文脈を参考に選んだテーマであっても、実際の出題を示すものではない。

基本力を養う 20 大問の配置

1. **量子力学**：一次元の境界条件、角運動量の合成、時間依存する基底、 s 波散乱、格子の固有値。うち SSH 模型の巻き数だけを $+\alpha$ の位相的知識とした。
2. **統計力学**：外場中の分配関数、量子輻射、熱雑音と応答、占有数揺らぎ、格子振動の低温べき則。
3. **電磁気学・古典力学**：誘電体の境界値問題、誘導起電力とエネルギー保存、分散の受動性、回転座標系の安定性、結合回路の正常モード。
4. **数学**：ランク 1 行列の固有値、偏微分方程式の固有関数、留数と畳み込み、積分核の固有分解、波動方程式の境界条件。

第 1 集との使い分け

第 1 集は二準位駆動、Bose 凝縮、Ising、同軸 TEM、Fermi 気体、トンネル共鳴、Bell 状態などを扱う。第 2 集は**同じ基礎技法を異なる系に移植できるか**を検証する。まず定番の問題を確実に解いたうえで、5 回分を 240 分ずつ通して解くことを推奨する。

問題が解けないときに戻る基本原理

問題の兆候	まず確認する原理
固有値と分裂	対称性・基底・行列式・摂動次数
境界で符号が合わない	場とその法線・接線成分、導関数の跳び、単位系
低温のべき則	状態密度の指数と Bose/Fermi 占有
共鳴・発散	近似の破綻、固有モードの零点、応答の極
揺らぎと応答	確率分布、平衡性、Fourier 規約、可換性
長時間の挙動	最小固有値・最も遅い時定数

制作・利用上の注意：本書は taku が独立に制作した非公式教材であり、東京大学の承認・監修を受けていない。問題はすべて新作。解説も独自作成のもので、実試験の解答例・採点基準ではない。

<https://takuphys.com>