

難関院試過去問シリーズ

東大院試の物理

25年 [第1版]

taku 著

◆ 頻出問題から良問まで網羅した「東大院試理物問題事典」



from 2001 to 2026

takuphys.com

出典・二次利用に関する説明

東大院試の物理 25ヵ年 ／ 編集・解説：taku

1. 大学院入試問題の出典

本書の過去問部分は、東京大学大学院理学系研究科・物理学専攻の入学試験問題を出典としています。出題原文との相違が疑われる場合は、大学側が公開する原題PDFを優先してください。

2. 再編集・改変の範囲

年度別・分野別の再配置、解説の追加、紙面の再組版、注記等を行いました。数式や図が原題と異なる箇所があれば独自の編集です。

3. 独自解答と責任範囲

解答・補足説明・検算・誤植の指摘は独立に作成した非公式版であり、東京大学の公式模範解答、採点基準、大学の承認を意味しません。

4. 第三者の著作物

原題以外の第三者著作物（他者の解答、図、引用文章など）は、大学の二次利用条件だけで転載許可されるものではありません。公開前にそれぞれの権利関係を確認してください。

5. 対象年度

2001～2026年度のうち、2021年度を除く25年度を対象としています。古い年度については当時の設問番号を維持し、現在の試験様式への強制的な読み替えは行っていません。

東京大学物理学専攻・原題公開ページ

<https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/about/147/>

大学院入試問題等の二次利用条件

<https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/wp-content/uploads/2025/03/EntranceExam2ndUse.pdf>

収録範囲・分野別案内

25年度分の原題＋独自解答／PDF全体で608ページ

本書は4分野の問題と独立解答を合冊した学習資料です。

2021年度は収録対象から外しています。すべての設問について

完全な第三者査読を実施したものではありません。

分野	通しページ	規模
量子力学	4～133	130頁
統計力学・量子統計	134～268	135頁
電磁気学・古典力学 増補案内	269	1頁
電磁気学・古典力学	270～392	123頁
数学	393～608	216頁

電磁気学・古典力学は25年度・計26大問を収録。

2004年度には第3問と第4問の2大問を掲載しています。

分冊時代の表紙や年度別目次に印刷された「3頁」等の数字は、
分冊内の相対ページ番号です。本PDFではしおりをご利用ください。

校訂上の重要な注記

2026年度の統計力学・第2問（本PDF 138頁）の原題には
 $g(r)=\min[f(h)+rah]$ とありますが、 f は凹関数です。
数学的に正しい変換は $\sup$ であり、解答141頁で注記しています。
原題の表現は変更していません。

公式原題および二次利用条件のクリック可能なURLは前ページに掲載しています。

東京大学大学院理学系研究科

物理学専攻院試問題・詳解集

量子力学

2026 年度 → 2001 年度 年度降順

25 年度分を収録（2021 年度の原題資料は未収録）

本書の使い方

各年度に「原題 → 解答・解説」を配置しています。次ページの年度別目次から、該当年度の原題に移動できます。PDF のしおりからも年度へ移動できます。

収録範囲

量子力学の問題は主に、量子調和振動子、ポテンシャル問題、時間発展・摂動論、スピンと角運動量、量子統計に現れる演算子法などに及びます。問題の分類は各巻の独立解答を基に編集しています。

原題と解答の位置付け

原題は提供された東大入試問題から収録した画像です。解答は独立作成の非公式解答であり、大学公式の模範解答ではありません。既刊の全設問について今回改めて完全な数学的査読を実施したわけではありません。

年度別目次

2026 → 2001

各行をクリックすると該当年度の原題へ移動できます。解答は各原題の直後に掲載。

年度	主要テーマ	開始頁
2026	周期デルタ関数とバンドギャップ	3
2025	時間依存摂動と二光子遷移	8
2024	スクイーズド状態	13
2023	2次元調和振動子	18
2022	最小不確定状態	21
2020	二準位測定・Bell型相関	29
2019	調和振動子と四次摂動	34
2018	断熱近似	37
2017	二粒子振動子と自由波束	41
2016	磁束中の電子とゼロモード	44
2015	円周上のデルタ関数ポテンシャル	49
2014	水素原子・Landau準位・正準変換	53
2013	量子調和振動子・コヒーレント状態	57
2012	スピンと磁気共鳴	61
2011	分離型ポテンシャル	64
2010	無限深井戸と中央デルタ障壁	67
2009	スピン 1/2 と量子相関	71
2008	2次元等方調和振動子	76
2007	角運動量の量子化	80
2006	無限深井戸と一次摂動論	83
2005	有限井戸と共鳴透過	87
2004	量子調和振動子	90
2003	井戸の拡張と断熱定理	94
2002	1次元調和振動子・コヒーレント状態	99
2001	有限井戸の束縛状態・浅い引力井戸	103

注記：2021年度は原題未提供のため収録していません。過去問の年度分類と出題傾向は、この問題集の編集上の整理です。解答は東京大学公式の模範解答ではありません。

量子力学 | 年度別問題

2026年度

出題テーマ / 編集上の分類

周期デルタ関数とバンドギャップ

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

金属中の電子をモデル化した1次元ハミルトニアン

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

を考える。ここで p は運動量演算子, m は質量, x は位置の演算子とする。右辺第2項にあらわれるポテンシャル V は a ($a > 0$) の周期性を持つ。すなわち,

$$V(x) = V(x - a)$$

である。系のサイズを Na とし, 波動関数に周期境界条件を課す。ここで N は正の整数である。以下の設問に答えよ。

1. 演算子 X, Y について

$$f(\lambda) = e^{\lambda Y} X e^{-\lambda Y}$$

を考える。 $f(\lambda)$ を λ について級数展開することで次式が成立することを示せ。

$$e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!} [Y, [Y, X]] + \frac{1}{3!} [Y, [Y, [Y, X]]] + \cdots + \frac{1}{n!} \overbrace{[Y, [Y, \cdots, [Y, X] \cdots]]}^{n \text{ 個}} + \cdots$$

ここで演算子の指数関数は

$$\exp[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

で定義するものとし, $[X, Y] = XY - YX$ である。

2. 並進操作を表す演算子を

$$T = \exp(-iap/\hbar)$$

とすると

$$TxT^{-1} = x - a, \quad TpT^{-1} = p$$

が成立することを示せ。ここで i は虚数単位, $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。

3. $TV(x)T^{-1}$ がどうなるかを考えて T と H が同時対角化できることを示せ。また, T の固有値が e^{-ik} , $k = \frac{2\pi j}{N}$ となることを示せ。ただし j は整数である。

以下,

$$V(x) = V_0 \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x - na)$$

の場合を考える。ここで $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数で $V_0 > 0$ とする。

4. 位置表示でシュレーディンガー方程式は

$$-\frac{d^2}{dy^2} \phi(y) + v \sum_{n=0}^{N-1} \delta(y - n) \phi(y) = \alpha^2 \phi(y) \quad (1)$$

となることを示せ。ただし $y = x/a$, $v = 2maV_0/\hbar^2$, $\alpha^2 = 2mEa^2/\hbar^2$ で E は固有エネルギー, ϕ は固有関数である。

5. $0 < y < 1$ では $V = 0$ であるから式 (1) の解は $\phi(y) = Ae^{i\alpha y} + Be^{-i\alpha y}$ とあらわせる。ここで A および B は適当な係数である。このことと問3の結果をあわせ, 特に $y = 0$ における $\phi(y)$ および $\frac{d\phi}{dy}$ の接続の条件から

$$\begin{aligned} A + B &= e^{-ik} \left(\boxed{\text{(a)}} \right) \\ A - B &= e^{-ik} \left(\boxed{\text{(b)}} \right) + v \left(\boxed{\text{(c)}} \right) \end{aligned}$$

という形の式が得られる。(a), (b), (c) にあてはまる式を A , B , α を使ってあらわせ。

6. 問5の結果を用いて

$$\cos k = \cos \alpha + \frac{v}{2\alpha} \sin \alpha \quad (2)$$

を示せ。

7. $v = 0$ のとき, l を整数として $\alpha = k + 2\pi l$, つまり $E = \hbar^2(k + 2\pi l)^2/2ma^2$ となる。ここで小さな v ($v \ll 1$) を導入し, E が $k = \pi$ でどのように変化するかを考えよう。 $\alpha = \pi(2l + 1)$ は式 (2) の解であるが, $\alpha = \pi(2l + 1) + \delta$ という解も存在する。ただし δ はゼロでない実数である。 δ を求め, v の導入によって E がどのように変化するかを議論せよ。ただし, δ が小さいとき

$$\begin{aligned} \cos(\pi(2l + 1) + \delta) &\simeq -1 + \frac{\delta^2}{2} \\ \sin(\pi(2l + 1) + \delta) &\simeq -\delta \end{aligned}$$

としてよい。

1 2026 年度 第1問：周期ポテンシャル

設問設定：質量 m の電子、 $H = p^2/(2m) + V(x)$ 、 $V(x+a) = V(x)$ 、周長 Na の周期境界条件。後半は $V(x) = V_0 \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x-na)$ とする。

設問 1：随伴変換の級数の解答

$f(\lambda) = e^{\lambda Y} X e^{-\lambda Y}$ とおく。積の微分則を使うと

$$f'(\lambda) = e^{\lambda Y} (YX - XY) e^{-\lambda Y} = e^{\lambda Y} [Y, X] e^{-\lambda Y}, \quad (1)$$

$$f^{(n)}(\lambda) = e^{\lambda Y} \underbrace{[Y, [Y, \dots, [Y, X]]]}_{n \text{ 重の交換子}} e^{-\lambda Y}. \quad (2)$$

$\lambda = 0$ で $f^{(n)}(0) = \text{ad}_Y^n X$ となるため Taylor 展開から

$$e^{\lambda Y} X e^{-\lambda Y} = X + \lambda[Y, X] + \frac{\lambda^2}{2!}[Y, [Y, X]] + \dots$$

演算子の級数を扱う場合は共通の定義域と収束を仮定する。形式的計算としても本問の有限交換子には十分である。

設問 2：並進演算子の解答

$T = e^{-iap/\hbar}$ 、 $[x, p] = i\hbar$ とする。 $Y = -iap/\hbar$ を代入すると

$$[Y, x] = -\frac{ia}{\hbar}[p, x] = -a, \quad [Y, [Y, x]] = 0.$$

よって

$$TxT^{-1} = x - a, \quad TpT^{-1} = p.$$

後者は $[Y, p] = 0$ から直ちに従う。波動関数に対する作用は $(T\psi)(x) = \psi(x-a)$ 。

検討ポイント：円周上の位置 x は大域的な単一値演算子としては微妙だが、上記の恒等式は局所座標での通常の形式計算として使える。 T 自体は周期境界条件の下で定義できる。

設問 3：Hamiltonian との可換性と固有値の解答

関数に対して $TV(x)T^{-1} = V(x-a) = V(x)$ 。運動エネルギーにも T は可換するから

$$[T, H] = 0.$$

系の長さは Na なので、周期境界条件より $T^N = \mathbf{1}$ 。 $T|\psi\rangle = t|\psi\rangle$ なら $t^N = 1$ 、すなわち

$$t = e^{-ik}, \quad k = \frac{2\pi j}{N}, \quad j \in \mathbb{Z} \pmod{N}.$$

$T\psi(y) = \psi(y-1) = e^{-ik}\psi(y)$ なので、以後 $\psi(y+1) = e^{ik}\psi(y)$ と書ける。

設問4：無次元 Schrödinger 方程式の解答

定常 Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dx^2} + V_0 \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x-na)\phi(x) = E\phi(x).$$

$y = x/a$ なら $d^2/dx^2 = a^{-2}d^2/dy^2$ 、さらに $\delta(x-na) = a^{-1}\delta(y-n)$ 。両辺に $2ma^2/\hbar^2$ を掛ければ

$$\boxed{-\phi''(y) + v \sum_{n=0}^{N-1} \delta(y-n)\phi(y) = \alpha^2\phi(y)}, \quad v = \frac{2maV_0}{\hbar^2}, \quad \alpha^2 = \frac{2mEa^2}{\hbar^2}.$$

したがって α と v は無次元である。

設問5：接続条件から空欄 (a)(b)(c) の解答

$0 < y < 1$ では自由波なので

$$\phi(y) = Ae^{i\alpha y} + Be^{-i\alpha y}.$$

Bloch 条件 $\phi(y+1) = e^{ik}\phi(y)$ より $\phi(0^-) = e^{-ik}\phi(1^-)$ 。デルタ点 $y=0$ で波動関数が連続するため

$$A + B = e^{-ik}(Ae^{i\alpha} + Be^{-i\alpha}).$$

従って空欄 (a) は

$$\boxed{(a) = Ae^{i\alpha} + Be^{-i\alpha}}.$$

式 (1) を $y=0$ の近傍で積分すると

$$\phi'(0^+) - \phi'(0^-) = v\phi(0).$$

$\phi'(0^-) = e^{-ik}\phi'(1^-)$ を代入して

$$i\alpha(A - B) - e^{-ik}i\alpha(Ae^{i\alpha} - Be^{-i\alpha}) = v(A + B).$$

従って

$$\boxed{(b) = Ae^{i\alpha} - Be^{-i\alpha}}, \quad \boxed{(c) = \frac{A+B}{i\alpha} = -\frac{i}{\alpha}(A+B)}.$$

符号はジャンプ条件 $\phi'(0^+) - \phi'(0^-) = +v\phi(0)$ によって決まる。

設問6：分散関係 (Kronig-Penney 型) の解答

設問5の2本を連立一次方程式として A, B に非自明解がある条件を取れば目的の式を得る。別法として転送行列を示す。

自由区間の端から端への伝播と、デルタ点での微分の跳びは

$$P(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha / \alpha \\ -\alpha \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad D(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}.$$

単位格子の転送行列 $M = D(v)P(\alpha)$ は $\det M = 1$ であり、Bloch 条件により固有値が $e^{\pm ik}$ 。したがって

$$2 \cos k = \operatorname{tr} M = 2 \cos \alpha + \frac{v}{\alpha} \sin \alpha,$$

$$\boxed{\cos k = \cos \alpha + \frac{v}{2\alpha} \sin \alpha.}$$

許容されるバンドは右辺の絶対値が 1 以下の領域である。

設問 7：弱い周期ポテンシャルとバンドギャップの解答

$v = 0$ なら $\alpha = k + 2\pi\ell$ (同じエネルギーを与える $\pm\alpha$ に留意)。Brillouin 境界 $k = \pi$ で

$$\alpha_0 = \pi(2\ell + 1), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

とする。 $v > 0$ が小さい場合 $\alpha = \alpha_0 + \delta$ を代入すると

$$-1 = -1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{v\delta}{2\alpha_0} + O(\delta^4, v\delta^2).$$

主要次数では $\delta(\delta - v/\alpha_0) = 0$ 。従って 2 本のバンド端は

$$\boxed{\delta_- = 0, \quad \delta_+ = \frac{v}{\alpha_0} + O(v^2).}$$

α_0 自体は式 (2) の厳密解であり、下側の端はずれない。 $E = \hbar^2 \alpha^2 / (2ma^2)$ を使うと

$$E_- = \frac{\hbar^2 \alpha_0^2}{2ma^2}, \quad E_+ = E_- + \frac{\hbar^2 v}{ma^2} + O(v^2).$$

よって

$$\boxed{\Delta E = E_+ - E_- = \frac{2V_0}{a} + O(V_0^2).}$$

デルタポテンシャルの Fourier 係数 $V_G = V_0/a$ に対応する一般的な弱ポテンシャルのギャップ $2|V_G|$ と整合する。 $v \ll \alpha_0^2$ が近似の条件である。**2026 年度の最重要事項**：式 (2) の $+v/(2\alpha)$ の符号、デルタ関数の微分ジャンプ、 k が無次元であること、ギャップが V_0 の一次で開くこと。

量子力学 | 年度別問題

2025年度

出題テーマ / 編集上の分類

時間依存摂動と二光子遷移

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

ハミルトニアンが

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\hat{x}) \quad (1)$$

で記述される一粒子の一次元量子系を考える。 m は質量, $U(\hat{x})$ は時間によらないポテンシャルである。 $\hat{x}, \hat{p}$ はそれぞれ位置と運動量の演算子で交換関係, $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, をみたす。ここで, $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。

1. $[\hat{x}, \hat{H}_0]$ を求めよ。

$\hat{H}_0$ のエネルギー固有状態 $|a\rangle$ は

$$\hat{H}_0|a\rangle = E_a|a\rangle \quad (a = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

$$\langle a|b\rangle = \delta_{ab}, \quad (3)$$

$$\sum_a |a\rangle\langle a| = 1 \quad (4)$$

をみたす。 δ_{ab} はクロネッカーのデルタである。また, 基底状態のエネルギーを E_0 とし, 励起状態のエネルギーを低い方から順に $E_1, E_2, \dots$ ($E_0 < E_1 < E_2 < \dots$) とした。ただし, エネルギーの縮退はないものとする。

2. 以下の関係式を示せ。

$$\langle a|\hat{p}|b\rangle = im\Omega_{ab}\langle a|\hat{x}|b\rangle \quad (5)$$

ただし, $\Omega_{ab} = \frac{E_a - E_b}{\hbar}$ である。

3. 以下の関係式を示せ。

$$\sum_c (\Omega_{ca} + \Omega_{cb}) \langle a|\hat{x}|c\rangle \langle c|\hat{x}|b\rangle = \frac{\hbar}{m} \delta_{ab} \quad (6)$$

角振動数 Ω で周期的に振動する摂動 $\hat{V}(t) = \hat{V}_0 \cos(\Omega t)$ を系に十分長い時間加える。基底状態 $|0\rangle$ から励起状態 $|a\rangle$ へと遷移する単位時間あたりの確率は, 一次摂動の範囲で

$$W_a = \begin{cases} \frac{\pi}{2\hbar^2} |\langle a|\hat{V}_0|0\rangle|^2 \rho & (\Omega = \Omega_{a0}) \\ 0 & (\Omega \neq \Omega_{a0}) \end{cases} \quad (7)$$

と与えられる。ただし, $\rho > 0$ は状態密度, $\Omega_{a0} = \frac{E_a - E_0}{\hbar}$ である。

4. $\hat{V}_0 = \frac{qA_0\hat{p}}{m}$ および, $\hat{V}_0 = q\Omega A_0\hat{x}$ という二つの場合について, W_a が一致することを示せ。ただし, A_0 は時間によらない定数, q は電荷である。

以下の設問では、一次摂動による遷移が禁制されているとする。基底状態 $|0\rangle$ から励起状態 $|a\rangle$ へと遷移する単位時間あたりの確率は、二次摂動の範囲で

$$W_a = \begin{cases} \frac{\pi}{8\hbar^4} \left| \sum_b \frac{\langle a|\hat{V}_0|b\rangle\langle b|\hat{V}_0|0\rangle}{\Omega - \Omega_{b0}} \right|^2 \rho & \left(\Omega = \frac{\Omega_{a0}}{2} \right) \\ 0 & \left(\Omega \neq \frac{\Omega_{a0}}{2} \right) \end{cases} \quad (8)$$

と与えられる。ただし、 $\rho > 0$ は状態密度である。

5. $\hat{V}_0 = \frac{qA_0\hat{p}}{m}$ および、 $\hat{V}_0 = q\Omega A_0\hat{x}$ という二つの場合について、 W_a が一致することを示せ。式 (5), (6) および以下の公式を用いてもよい。

$$\Omega_{ab}\Omega_{bc} = \frac{\Omega_{ba} + \Omega_{bc}}{2} \left(\frac{\Omega_{ac}}{2} - \Omega_{bc} \right) + \frac{\Omega_{ac}^2}{4} \quad (9)$$

以下の設問では、式 (8) に表れる級数の各項は実数で全て同じ符号を持つとする。一般に、式 (8) の b に関する和を全ての状態についてとることは容易でない。そこで、中間状態 b として一つの状態のみを考え、 W_a を近似的に評価しよう。このとき設問 5 の等価性は破綻し、 $\hat{V}_0 = \frac{qA_0\hat{p}}{m}$ および、 $\hat{V}_0 = q\Omega A_0\hat{x}$ の二つの場合で異なる結果が得られる。

6. $\hat{V}_0 = \frac{qA_0\hat{p}}{m}$ および、 $\hat{V}_0 = q\Omega A_0\hat{x}$ のどちらを用いた計算結果が、 W_a のより良い近似を与えるか、理由とともに簡潔に答えよ。ただし、エネルギー準位は図 1 のようになっており、 $\Omega_{a0} \gg \Omega_{ba} > 0$ をみたとす。

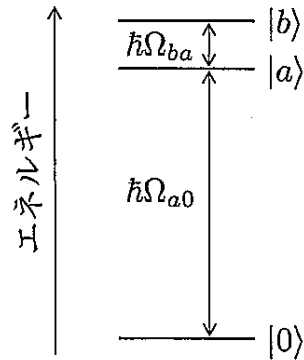


図 1: エネルギー準位

2 2025 年度 第1問：時間依存摂動と二光子遷移

設問設定： $H_0 = p^2/(2m) + U(x)$ 、 $H_0 |a\rangle = E_a |a\rangle$ 、 $\Omega_{ab} = (E_a - E_b)/\hbar$ 、縮退のない離散準位。
外場 $\hat{V}(t) = \hat{V}_0 \cos(\Omega t)$ による遷移を考える。

設問1： $[x, H_0]$ の計算の解答

$$[x, p] = i\hbar, [x, U(x)] = 0 \text{ より}$$

$$[x, p^2] = [x, p]p + p[x, p] = 2i\hbar p.$$

したがって

$$[x, H_0] = \frac{i\hbar}{m} p.$$

設問2：運動量と位置の行列要素の解答

$|a\rangle, |b\rangle$ で挟むと

$$\langle a | [x, H_0] | b \rangle = (E_b - E_a) \langle a | x | b \rangle = -\hbar \Omega_{ab} \langle a | x | b \rangle.$$

一方、設問1からこれは $(i\hbar/m) \langle a | p | b \rangle$ に等しい。従って

$$\langle a | p | b \rangle = im\Omega_{ab} \langle a | x | b \rangle.$$

$\Omega_{aa} = 0$ なので $\langle a | p | a \rangle = 0$ も従う。

設問3：和則（Thomas-Reiche-Kuhn 型）の解答

設問1をさらに x と交換すると

$$[x, [H_0, x]] = [x, -i\hbar p/m] = \frac{\hbar^2}{m} \mathbf{1}.$$

完全性 $\sum_c |c\rangle \langle c| = \mathbf{1}$ を使い、左辺を展開すると

$$\begin{aligned} \langle a | [x, [H_0, x]] | b \rangle &= \sum_c (2E_c - E_a - E_b) \langle a | x | c \rangle \langle c | x | b \rangle \\ &= \hbar \sum_c (\Omega_{ca} + \Omega_{cb}) \langle a | x | c \rangle \langle c | x | b \rangle. \end{aligned}$$

よって

$$\sum_c (\Omega_{ca} + \Omega_{cb}) \langle a | x | c \rangle \langle c | x | b \rangle = \frac{\hbar}{m} \delta_{ab}.$$

この恒等式はすべての中間状態を足し合わせたときに成立する。打ち切った部分和では一般に成り立たない。

設問 4：一次摂動における位置・運動量表示の等価性の解答

原題では

$$\hat{V}_p = qA_0 \frac{p}{m}, \quad \hat{V}_x = qA_0 x.$$

を比較する。共鳴条件 $\Omega = \Omega_{a0}$ で設問 2 を適用すると

$$\langle a | \hat{V}_p | 0 \rangle = iqA_0\Omega_{a0} \langle a | x | 0 \rangle, \quad \langle a | \hat{V}_x | 0 \rangle = qA_0\Omega \langle a | x | 0 \rangle.$$

2つの行列要素は位相 i を除いて同じなので、絶対値の 2 乗に比例する遷移確率は一致する：

$$\boxed{W_a^{(p)} = W_a^{(x)} \quad (\Omega = \Omega_{a0})}.$$

ここでは問題文が与えた一次摂動の遷移率を用いたので、別の相互作用項を付加する必要はない。

設問 5：二次摂動（完全中間状態和）での等価性の解答

二光子共鳴を $\Omega = \Omega_{a0}/2$ とする。略記

$$X_c = \langle a | x | c \rangle \langle c | x | 0 \rangle, \quad S_x = \sum_c \frac{X_c}{\Omega - \Omega_{c0}}, \quad S_p = \sum_c \frac{\Omega_{ac}\Omega_{c0}X_c}{\Omega - \Omega_{c0}}$$

を導入する。設問 2 から 2 個の運動量の積には $i^2 = -1$ が掛かるので、遷移振幅は $q^2 A_0^2 S_p$ と $q^2 \Omega^2 A_0^2 S_x$ の符号違いを除く比較へ還元できる。

原題の恒等式 (9) で $b \rightarrow c, c \rightarrow 0$ と読み替えると

$$\Omega_{ac}\Omega_{c0} = \frac{\Omega_{ca} + \Omega_{c0}}{2} \left(\frac{\Omega_{a0}}{2} - \Omega_{c0} \right) + \frac{\Omega_{a0}^2}{4}.$$

共鳴条件の下では右辺の括弧が $\Omega - \Omega_{c0}$ なので

$$S_p = \frac{1}{2} \sum_c (\Omega_{ca} + \Omega_{c0}) X_c + \Omega^2 S_x.$$

設問 3 の和則を $(a, b) = (a, 0)$ に用いれば、第 1 項は $\hbar\delta_{a0}/(2m) = 0$ (励起状態 $a \neq 0$)。故に

$$\boxed{S_p = \Omega^2 S_x}, \quad \boxed{W_a^{(p)} = W_a^{(x)}}.$$

検討ポイント：これは全中間状態和と和則が成立する場合の主張である。有限個の準位だけを残した近似では、和則の打ち消しが成立しない場合がある。

設問 6：中間状態を 1 個に打ち切るときの解答

中間状態を $|b\rangle$ のみにして、 $\Omega_{a0} \gg \Omega_{ba} > 0$ と仮定する。このとき

$$\Omega_{ab} = -\Omega_{ba}, \quad \Omega_{b0} = \Omega_{a0} + \Omega_{ba}, \quad \Omega = \frac{\Omega_{a0}}{2}.$$

単一項の振幅の絶対値の比は

$$\frac{|\mathcal{A}_p^{(b)}|}{|\mathcal{A}_x^{(b)}|} = \frac{|\Omega_{ab}\Omega_{b0}|}{\Omega^2} = 4 \frac{\Omega_{ba}}{\Omega_{a0}} \left(1 + \frac{\Omega_{ba}}{\Omega_{a0}} \right) \ll 1.$$

従って打ち切り後の遷移率は

$$\frac{W_a^{(p,b)}}{W_a^{(x,b)}} = 16 \left(\frac{\Omega_{ba}}{\Omega_{a0}} \right)^2 \left(1 + \frac{\Omega_{ba}}{\Omega_{a0}} \right)^2 \ll 1.$$

完全和なら両表示は等価なので、運動量表示で小さくなった分は、他の中間状態の寄与と打ち消しを考慮する必要がある。 $|b\rangle$ の寄与だけを主役にする**近似の自然さ**という意味では、位置表示 $\hat{V}_x = q\Omega A_0 x$ を選ぶのが妥当と考えられる。

ただし、**真の誤差をどちらが小さくするか**は、他の準位の行列要素と位相に依存する。準位間隔の条件のみから、厳密な誤差上界や普遍的な優劣は証明できない。この点を区別することが重要である。

量子力学 | 年度別問題

2024年度

出題テーマ / 編集上の分類

スクイーズド状態

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

一般化座標 q とそれに共役な運動量 p によってハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2}p^2 + V(q), \quad V(q) = -\frac{1}{2}q^2 \quad (1)$$

で与えられるとき、以下の設問に答えよ。

1. ハミルトンの運動方程式に基づいて、 p と q の和と差がどのように振る舞うかを述べよ。
ただし、 $p+q$ の初期値はゼロではないとする。

2. 前問の結果に基づき、作用関数

$$S(q) = \int p dq = \int^q p(q') dq' \quad (2)$$

が十分時間がたった後、 q のどのような関数に漸近するか述べよ。

以下ではこのハミルトニアンによって記述される系に対し、通常の正準量子化の手続きを取ることにする。すなわち、 p, q を演算子 $\hat{p}, \hat{q}$ と読み替え、交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ を課す。 $\hbar$ はプランク定数を 2π で割った量である。

3. 演算子 $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ をそれぞれ

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{q} + i\hat{p}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{q} - i\hat{p}) \quad (3)$$

で定義したとき、交換子 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ の値を求めよ。

4. ハミルトニアン $\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 - \frac{1}{2}\hat{q}^2$ を、 $\hat{a}^2$ と $(\hat{a}^\dagger)^2$ を用いて表せ。

いま、スクイーズ演算子 $\hat{S}(r, \phi)$ を、実数 r, ϕ の関数として

$$\hat{S}(r, \phi) = \exp \left[\frac{r}{2} \left(\hat{a}^2 e^{-2i\phi} - (\hat{a}^\dagger)^2 e^{2i\phi} \right) \right] \quad (4)$$

によって定義する。以下の公式が成り立つことが知られている。

$$\hat{S}^\dagger(r, \phi) \hat{a} \hat{S}(r, \phi) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{2i\phi} \sinh r \quad (5)$$

$$\hat{S}^\dagger(r, \phi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(r, \phi) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-2i\phi} \sinh r \quad (6)$$

$$\hat{S}^\dagger(r, \phi) \hat{S}(r, \phi) = 1 \quad (7)$$

また、演算子 $\hat{a}$ によって消される状態、すなわち $\hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす状態 $|0\rangle$ を真空と呼ぶことにし、

$$|(r, \phi)\rangle = \hat{S}(r, \phi)|0\rangle \quad (8)$$

をスクイーズド状態と呼ぶ。

5. 真空をハミルトニアン $\hat{H}$ によって時刻 0 から t まで発展させた状態 $|\psi(t)\rangle$ は, スクイーズド状態

$$|\psi(t)\rangle = \left| \left(t, -\frac{\pi}{4} \right) \right\rangle \quad (9)$$

に一致することを示せ。

6. スクイーズド状態 (8) に対し,

$$\hat{p}|(r, \phi)\rangle = \alpha(r, \phi)\hat{q}|(r, \phi)\rangle, \quad \alpha(r, \phi) = i \frac{\cosh r + e^{2i\phi} \sinh r}{\cosh r - e^{2i\phi} \sinh r} \quad (10)$$

という等式が成り立つことを示せ。

7. 前問の結果を用いて, 式 (9) で表されるスクイーズド状態の座標表示での波動関数 $\psi(q, t) = \langle q|\psi(t)\rangle$ を求めよ。規格化定数は計算しなくて良い。
8. 得られた波動関数と式 (2) を比較することにより, スクイーズド状態がどのような性質を持つか説明せよ。

1 2024 年度 第1問：逆調和振動子とスクイーズド状態

設定：一般化座標 q と共役運動量 p について $H = (p^2 - q^2)/2$ 。量子化後は $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ 。真空 $a|0\rangle = 0$ とし、スクイーズド状態は原題で与えられた $S(r, \phi)|0\rangle$ とする。

設問1：古典運動の和と差の解答

Hamilton 方程式は

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = q.$$

$u = p + q, v = p - q$ とすると $\dot{u} = u, \dot{v} = -v$ 。初期値を $u_0 = p(0) + q(0), v_0 = p(0) - q(0)$ と書けば

$$\boxed{p(t) + q(t) = u_0 e^t, \quad p(t) - q(t) = v_0 e^{-t}.}$$

つまり $p + q$ は指数関数的に増幅し、 $p - q$ は指数関数的に減衰する。原題の仮定 $u_0 \neq 0$ により、長時間では

$$q(t) = \frac{u_0 e^t - v_0 e^{-t}}{2}, \quad p(t) = \frac{u_0 e^t + v_0 e^{-t}}{2}, \quad p \sim q.$$

設問2：作用関数の長時間漸近形の解答

保存エネルギーを $E = (p^2 - q^2)/2 = \frac{1}{2}u_0 v_0$ とする。 q が大きくなる枝では $p/q \rightarrow 1$ 、故に

$$\frac{dS}{dq} = p(q) = q + \frac{E}{q} + O(|q|^{-3}).$$

積分して

$$\boxed{S(q) = \frac{1}{2}q^2 + E \log |q| + O(1) \quad (|q| \rightarrow \infty),}$$

したがって求める主要な漸近形は $\boxed{S(q) \sim q^2/2}$ である。 $E = 0$ なら定数を除き正確に $S = q^2/2$ となる。

検討ポイント：原題の「どのような関数に漸近」は主要項 $q^2/2$ を指すと読む。一般の非零エネルギーの軌道では $E \log |q|$ の劣次補正も残る。

設問3：生成・消滅演算子の交換子の解答

原題の定義

$$\hat{a} = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar}}$$

および $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ から

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \frac{[\hat{q} + i\hat{p}, \hat{q} - i\hat{p}]}{2\hbar} = \frac{-i[\hat{q}, \hat{p}] + i[\hat{p}, \hat{q}]}{2\hbar} \\ &= \frac{2\hbar}{2\hbar} = \boxed{1}. \end{aligned}$$

設問 4 : Hamiltonian の二次形式の解答

逆変換は

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger).$$

従って順序を変えずに展開すれば

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2}(\hat{p}^2 - \hat{q}^2) = -\frac{\hbar}{4}[(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 + (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2] \\ &= \boxed{-\frac{\hbar}{2}(\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2)}. \end{aligned}$$

数演算子 $a^\dagger a$ の項は相殺する。この $\hat{H}$ は通常の正の調和振動子とは異なり、下に有界ではない。

設問 5 : 時間発展とスクイーズド状態の解答

原題のスクイーズ演算子は

$$\hat{S}(r, \phi) = \exp\left[\frac{r}{2}\{\hat{a}^2 e^{-2i\phi} - (\hat{a}^\dagger)^2 e^{2i\phi}\}\right].$$

$\phi = -\pi/4$ なら $e^{-2i\phi} = i$, $e^{2i\phi} = -i$ 。ゆえに

$$\hat{S}(t, -\pi/4) = \exp\left[\frac{it}{2}(\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2)\right] = e^{-i\hat{H}t/\hbar}.$$

初期状態 $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ を発展させると

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |0\rangle = \hat{S}(t, -\pi/4) |0\rangle = |(t, -\pi/4)\rangle}.$$

ここで t は原題の無次元化された時間である。

設問 6 : スクイーズド状態での $\hat{p}$ と $\hat{q}$ の関係の解答

原題で与えられた変換式から、逆向きの随伴変換は

$$\hat{S}\hat{a}\hat{S}^\dagger = \hat{a} \cosh r + e^{2i\phi}\hat{a}^\dagger \sinh r.$$

$\hat{a}|0\rangle = 0$ に左から $\hat{S}$ を掛けると、 $|(r, \phi)\rangle = \hat{S}|0\rangle$ は

$$(\hat{a} \cosh r + e^{2i\phi}\hat{a}^\dagger \sinh r) |(r, \phi)\rangle = 0.$$

すなわち $\hat{a} |(r, \phi)\rangle = -e^{2i\phi} \tanh r \hat{a}^\dagger |(r, \phi)\rangle$ 。 $\hat{p}/(\hat{q})$ を消去すると

$$\boxed{\hat{p} |(r, \phi)\rangle = \alpha(r, \phi) \hat{q} |(r, \phi)\rangle, \quad \alpha(r, \phi) = i \frac{\cosh r + e^{2i\phi} \sinh r}{\cosh r - e^{2i\phi} \sinh r}.$$

分母は実数 r で零にならない ($\cosh r > |\sinh r|$)。

設問 7：座標表示の波動関数の解答

$\phi = -\pi/4, r = t$ に対して $e^{2i\phi} = -i$ 。よって

$$\alpha_t = i \frac{\cosh t - i \sinh t}{\cosh t + i \sinh t} = \tanh(2t) + i \operatorname{sech}(2t).$$

座標表示では $\hat{p} = -i\hbar\partial_q$ 。設問 6 から

$$-i\hbar\partial_q\psi(q, t) = \alpha_t q\psi(q, t) \implies \psi(q, t) = C(t) \exp\left(\frac{i\alpha_t}{2\hbar}q^2\right).$$

したがって原題で「規格化定数は計算しなくてもよい」とされている形は

$$\psi(q, t) = C(t) \exp\left[-\frac{\operatorname{sech}(2t)}{2\hbar}q^2 + \frac{i \tanh(2t)}{2\hbar}q^2\right].$$

参考として $|C(t)| = (\pi\hbar \cosh 2t)^{-1/4}$ と取れる。時間依存の全体位相はここで固定していない。

設問 8：波動関数と古典作用の比較の解答

長時間 $t \gg 1$ では

$$\tanh(2t) \rightarrow 1, \quad \operatorname{sech}(2t) \rightarrow 0,$$

ゆえに位相は $\exp[iq^2/(2\hbar)]$ に近づく。これは設問 2 の古典的な作用の主要項 $S(q) \sim q^2/2$ に対応し、WKB 形 $e^{iS(q)/\hbar}$ と整合する。一方、確率密度は

$$|\psi(q, t)|^2 = |C(t)|^2 \exp\left[-\frac{\operatorname{sech}(2t)}{\hbar}q^2\right], \quad (\Delta q)^2 = \frac{\hbar}{2} \cosh(2t).$$

従って波束は q 方向に指数関数的に広がり、位相勾配 $p_{\text{phase}} = \partial_q S(q) \simeq q$ に沿う相関が強まる。

検討ポイント：「スクイーズ」は必ずしも座標 q が局在化することを意味しない。位相空間では、古典的不安定方向 $p \simeq q$ に伸び、これと直交する組合せが狭くなる。一般のエネルギーをもつ個別の古典軌道の対数補正まで、この単一 Gaussian 波束の位相が再現するという主張ではない。

量子力学 | 年度別問題

2023 年度

出題テーマ / 編集上の分類

2次元調和振動子

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

ハミルトニアンが

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{1}{2m} \hat{P}_k^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{X}_k^2 \right)$$

で与えられる1粒子の2次元調和振動子を量子力学的に考える。 m は質量、 ω は角振動数である。また $\hat{X}_k, \hat{P}_k$ はそれぞれ座標と運動量の演算子であり、以下の交換関係をみたす。

$$[\hat{X}_k, \hat{X}_\ell] = [\hat{P}_k, \hat{P}_\ell] = 0, \quad [\hat{X}_k, \hat{P}_\ell] = i\hbar \delta_{k\ell} = \begin{cases} i\hbar & (k = \ell) \\ 0 & (k \neq \ell) \end{cases}, \quad (k, \ell = 1, 2)$$

ただし $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ であり、 $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。記号 i は虚数単位($i^2 = -1$ をみたす複素数)とする。

1. 演算子 $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$ ($k = 1, 2$)を以下のように定義する。

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (m\omega \hat{X}_k + i\hat{P}_k), \quad \hat{a}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (m\omega \hat{X}_k - i\hat{P}_k)$$

このとき $[\hat{a}_k, \hat{a}_\ell^\dagger]$ ($k, \ell = 1, 2$)を求めよ。

2. $\hat{H}$ を $\hat{a}_k$ と $\hat{a}_k^\dagger$ を用いて表せ。また、 $[\hat{H}, \hat{a}_k], [\hat{H}, \hat{a}_k^\dagger]$ ($k = 1, 2$)を求めよ。
3. $\hat{H}$ の基底状態 $|0\rangle$ は $\hat{a}_k|0\rangle = 0$ ($k = 1, 2$)をみたす。基底状態のエネルギーを求めよ。
4. 設問3の基底状態のエネルギーを E_0 とし、励起状態のエネルギーを低い方から順に $E_1, E_2, \dots$ ($E_0 < E_1 < E_2 < \dots$)とすると、エネルギー E_n を持つ状態を $|0\rangle$ と $\hat{a}_k^\dagger$ を用いて表せ。またその縮退度を求めよ。ただし、状態の規格化は行わなくてもよい。

次に、角運動量演算子 $\hat{L}$ を $\hat{L} = \hat{X}_1 \hat{P}_2 - \hat{X}_2 \hat{P}_1$ で定義する。

5. $\hat{L}$ を $\hat{a}_k$ と $\hat{a}_k^\dagger$ を用いて表せ。また $[\hat{H}, \hat{L}]$ を求めよ。
6. 複素数 β, γ を用いて演算子 $\hat{A}_+^\dagger = \beta \hat{a}_1^\dagger + \gamma \hat{a}_2^\dagger, \hat{A}_-^\dagger = \beta \hat{a}_1^\dagger - \gamma \hat{a}_2^\dagger$ を定義する。このとき β, γ を適当に選ぶと、 $[\hat{L}, \hat{A}_\eta^\dagger] = c_\eta \hat{A}_\eta^\dagger$ ($\eta = +, -$)をみたすことができる。ただし、 c_η は実数であり、 $c_+ > c_-$ と定める。このような β, γ の具体例を1組求め、そのときの c_+, c_- を求めよ。
7. 状態 $|\alpha\rangle$ がエネルギーと角運動量の同時固有状態であり、以下の式をみたすとする。

$$\hat{H}|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle, \quad \hat{L}|\alpha\rangle = L_\alpha|\alpha\rangle$$

ただし E_α と L_α は $\hat{H}$ と $\hat{L}$ の固有値である。このとき、設問6で求めた $\hat{A}_\pm^\dagger$ を用いて状態

$$\hat{A}_+^\dagger|\alpha\rangle, \quad \hat{A}_-^\dagger|\alpha\rangle$$

を考えると、これらの状態もエネルギーと角運動量の同時固有状態になる。これらの状態のエネルギーと角運動量の固有値を E_α, L_α を用いて表せ。

2 2023 年度 第1問：2次元調和振動子と角運動量

設定：質量 m 、角振動数 $\omega > 0$ の2次元等方調和振動子

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\hat{P}_k^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{X}_k^2 \right), \quad [\hat{X}_k, \hat{P}_\ell] = i\hbar \delta_{k\ell}.$$

設問1：生成・消滅演算子の交換関係の解答

原題の定義

$$\hat{a}_k = \frac{m\omega\hat{X}_k + i\hat{P}_k}{\sqrt{2\hbar m\omega}}, \quad \hat{a}_\ell^\dagger = \frac{m\omega\hat{X}_\ell - i\hat{P}_\ell}{\sqrt{2\hbar m\omega}}$$

から

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_\ell^\dagger] = \frac{-im\omega[\hat{X}_k, \hat{P}_\ell] + im\omega[\hat{P}_k, \hat{X}_\ell]}{2\hbar m\omega} = \boxed{\delta_{k\ell}}.$$

その他 $[\hat{a}_k, \hat{a}_\ell] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_\ell^\dagger] = 0$ である。

設問2：Hamiltonian とその交換子の解答

逆変換

$$\hat{X}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger), \quad \hat{P}_k = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger)$$

から、 $[\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger] = 1$ を用いて

$$\hat{H} = \hbar\omega \sum_{k=1}^2 \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega (\hat{N}_1 + \hat{N}_2 + 1).$$

従って

$$[\hat{H}, \hat{a}_k] = -\hbar\omega \hat{a}_k, \quad [\hat{H}, \hat{a}_k^\dagger] = \hbar\omega \hat{a}_k^\dagger.$$

設問3：基底状態のエネルギーの解答

真空は $a_1|0\rangle = a_2|0\rangle = 0$ 。従って $N_1|0\rangle = N_2|0\rangle = 0$ であり

$$\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega|0\rangle, \quad E_0 = \hbar\omega.$$

設問4：励起状態と縮退度の解答

$n = n_1 + n_2$ 個の量子を生成する状態は

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}} |0\rangle, \quad n_1 + n_2 = n,$$

であり、全てエネルギー

$$E_n = \hbar\omega(n+1)$$

をもつ。非負整数組 (n_1, n_2) は $n+1$ 通りあるので

$$g_n = n + 1.$$

この縮退は ω が x, y の両方向で等しいことによる。

設問 5：角運動量の生成・消滅演算子表示の解答

$\hat{L} = \hat{X}_1 \hat{P}_2 - \hat{X}_2 \hat{P}_1$ に逆変換を代入し、異なるモード間の交換子が零であることを使うと

$$\hat{L} = i\hbar(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2).$$

これに $\hat{H} = \hbar\omega(N_1 + N_2 + 1)$ を用いれば

$$[\hat{H}, \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1] = 0 = [\hat{H}, \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2] \Rightarrow [\hat{H}, \hat{L}] = 0.$$

よってエネルギーと角運動量の同時固有状態を選べる。

設問 6：角運動量を対角化する円偏光型生成演算子の解答

基本交換子は

$$[\hat{L}, \hat{a}_1^\dagger] = i\hbar \hat{a}_2^\dagger, \quad [\hat{L}, \hat{a}_2^\dagger] = -i\hbar \hat{a}_1^\dagger.$$

原題の形式 $A_+^\dagger = \beta a_1^\dagger + \gamma a_2^\dagger$, $A_-^\dagger = \beta a_1^\dagger - \gamma a_2^\dagger$ に対し、例えば

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \gamma = \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad \hat{A}_\pm^\dagger = \frac{\hat{a}_1^\dagger \pm i\hat{a}_2^\dagger}{\sqrt{2}}$$

と選べる。上の交換子から

$$[\hat{L}, \hat{A}_\pm^\dagger] = c_\pm \hat{A}_\pm^\dagger, \quad c_+ = +\hbar, \quad c_- = -\hbar,$$

となり、 $c_+ > c_-$ を満たす。位相を変えた等価な規格化も可能である。

設問 7：生成後のエネルギーと角運動量の解答

$|\alpha\rangle$ が $\hat{H}|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle$, $\hat{L}|\alpha\rangle = L_\alpha|\alpha\rangle$ を満たすとする。設問 2 と 6 より

$$[\hat{H}, \hat{A}_\pm^\dagger] = \hbar\omega \hat{A}_\pm^\dagger, \quad [\hat{L}, \hat{A}_\pm^\dagger] = \pm\hbar \hat{A}_\pm^\dagger.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \hat{H}(\hat{A}_\pm^\dagger |\alpha\rangle) &= (E_\alpha + \hbar\omega) \hat{A}_\pm^\dagger |\alpha\rangle, \\ \hat{L}(\hat{A}_\pm^\dagger |\alpha\rangle) &= (L_\alpha \pm \hbar) \hat{A}_\pm^\dagger |\alpha\rangle. \end{aligned}$$

従って

$$\hat{A}_\pm^\dagger |\alpha\rangle : (E, L) = (E_\alpha + \hbar\omega, L_\alpha \pm \hbar).$$

生成されたベクトルが零でない場合に固有状態となる。通常の Fock 空間では生成演算子の作用は非零である。

量子力学 | 年度別問題

2022 年度

出題テーマ / 編集上の分類

最小不確定状態

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

量子力学において不確定性関係は重要な役割を果たす。与えられた量子状態に対する、位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ の標準偏差を

$$\Delta x \equiv \sqrt{\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle}, \quad \Delta \hat{x} \equiv \hat{x} - \langle \hat{x} \rangle$$
$$\Delta p \equiv \sqrt{\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle}, \quad \Delta \hat{p} \equiv \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle$$

と定義しよう。ここで、 $\langle \hat{O} \rangle$ は演算子 $\hat{O}$ の量子力学的期待値である。以下の設問に答えよ。なお、必要があれば次の積分公式を使ってもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} \quad (\alpha > 0)$$

また、 $\hbar$ はプランク定数を 2π で割った量とする。

1. 波動関数

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{\pi a^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left(-\frac{x^2}{2a^2} \right) \quad (a > 0)$$

に対して $\Delta x, \Delta p$ を計算し、その結果を物理的に解釈せよ。

2. 一般に、 Δx と Δp の間には不等式

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1)$$

が成立する。これを示すために、まず、任意の演算子 $\hat{O}$ とそのエルミート共役演算子 $\hat{O}^\dagger$ に対して

$$\langle \hat{O}^\dagger \hat{O} \rangle \geq 0$$

が成立することを示せ。

3. 次に、 $\hat{O} = t\Delta\hat{x} - i\Delta\hat{p}$ (t は任意の実数) とおくことで不等式 (1) を示せ。

4. 設問3の $\hat{O}$ の固有値が0を含むための t に関する条件を述べ、固有値0に対応する固有状態が不等式 (1) の等号を満足することを示せ。

5. 不等式 (1) の等号が成立する状態を最小不確定状態という。設問4の結果を用いて、最小不確定状態を記述する1に規格化された波動関数を求めよ。

2022 年度第 1 問 不確定性関係と最小不確定状態

原題の波動関数は

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right), \quad a > 0. \quad (1)$$

実数かつ偶関数であり、 $|\psi|^2 = (\sqrt{\pi}a)^{-1} \exp(-x^2/a^2)$ 。

設問 1 : Gaussian 状態の標準偏差の解答

(i) 位置の期待値と分散 対称性より $\langle x \rangle = 0$ 。問題で与えられた Gaussian 積分公式に $\alpha = 1/a^2$ を代入して

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}a} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/a^2} dx = \frac{a^2}{2}.$$

よって

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

(ii) 運動量の期待値と分散

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{x}{a^2}\psi, \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \left(\frac{x^2}{a^4} - \frac{1}{a^2}\right)\psi.$$

$\hat{p} = -i\hbar d/dx$ なので $\langle p \rangle = 0$ 、また

$$\langle p^2 \rangle = \int \psi^* \left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi dx = \hbar^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{\langle x^2 \rangle}{a^4} \right) = \frac{\hbar^2}{2a^2}.$$

したがって

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\sqrt{2}a}, \quad \Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}. \quad (3)$$

物理的解釈 a を小さくすると位置分布は狭くなり、運動量分布は広がる。積は a に依存せず $\hbar/2$ に固定される。この実 Gaussian は不確定性関係を飽和する。

設問2: $\langle \hat{O}^\dagger \hat{O} \rangle \geq 0$ の証明の解答

任意の規格化状態 $|\psi\rangle$ と、 $\hat{O}|\psi\rangle$ が存在する任意の演算子 $\hat{O}$ について、

$$\langle \hat{O}^\dagger \hat{O} \rangle = \langle \psi | \hat{O}^\dagger \hat{O} | \psi \rangle = \langle \hat{O}\psi | \hat{O}\psi \rangle = \|\hat{O}\psi\|^2 \geq 0.$$

$$\boxed{\langle \hat{O}^\dagger \hat{O} \rangle \geq 0.} \quad (4)$$

ここで不等号は Hilbert 空間のノルムの非負性だけから従う。等号が成立するための必要十分条件は $\hat{O}|\psi\rangle = 0$ である。

設問3: Heisenberg の不確定性関係の導出の解答

$X = \hat{x} - \langle x \rangle$, $P = \hat{p} - \langle p \rangle$ とおく。どちらも Hermite 演算子であり $[X, P] = [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たす。
原題の

$$\hat{O} = tX - iP, \quad t \in \mathbb{R}$$

に対して

$$\hat{O}^\dagger = tX + iP,$$

$$\begin{aligned} \hat{O}^\dagger \hat{O} &= (tX + iP)(tX - iP) \\ &= t^2 X^2 + P^2 - it[X, P] \\ &= t^2 X^2 + P^2 + t\hbar. \end{aligned}$$

よって設問2から、任意の実数 t に対し

$$Q(t) := (\Delta x)^2 t^2 + \hbar t + (\Delta p)^2 \geq 0. \quad (5)$$

$\Delta x > 0$ のもとで平方完成すると

$$Q(t) = (\Delta x)^2 \left(t + \frac{\hbar}{2(\Delta x)^2} \right)^2 + (\Delta p)^2 - \frac{\hbar^2}{4(\Delta x)^2}.$$

右辺の最小値も非負でなければならないため

$$\boxed{\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.} \quad (6)$$

なお、判別式 $\hbar^2 - 4(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \leq 0$ としても同じ結論を得る。

符号の確認

$\hat{O} = tX - iP$ であるから、交換子項の符号は $\boxed{+t\hbar}$ となる。符号を間違えても最終的不等式だけは変わらないため、途中の演算子積を確認することが重要。

設問4：零固有値を持つ条件と等号成立の解答

零固有値に対応する波動関数 $\psi(x)$ は、正規化が可能で、かつ

$$[t(x - x_0) - i(\hat{p} - p_0)]\psi = 0, \quad x_0 = \langle x \rangle, p_0 = \langle p \rangle$$

を満たす。ただし $\hat{p} = -i\hbar d/dx$ なので

$$\left[t(x - x_0) - \hbar \frac{d}{dx} + ip_0 \right] \psi(x) = 0, \quad \text{すなわち} \quad \frac{\psi'}{\psi} = \frac{t(x - x_0)}{\hbar} + \frac{ip_0}{\hbar}.$$

積分すると

$$\psi(x) = C \exp \left[\frac{t(x - x_0)^2}{2\hbar} + \frac{ip_0(x - x_0)}{\hbar} \right]. \quad (7)$$

$\mathbb{R}$ 上で二乗可積分となるのは $t < 0$ のとき、かつそのときに限る。 $t = 0$ では平面波、 $t > 0$ では指数的大増大となり、規格化できない。つまり

$$0 \text{ が } \hat{O} \text{ の } (L^2) \text{ 固有値 } \iff t < 0. \quad (8)$$

この波動関数では $\hat{O}\psi = 0$ であるから $\langle O^\dagger O \rangle = 0$ 。設問3の式で $Q(t) = 0$ を満たし、同時に $Q(s) \geq 0$ が任意の $s \in \mathbb{R}$ で成立するので、その t は二次式の最小点である。

$$t = -\frac{\hbar}{2(\Delta x)^2}, \quad (\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4(\Delta x)^2}.$$

したがって $\Delta x \Delta p = \hbar/2$ 。単に形式的な微分方程式の解を得るだけではなく、二乗可積分性を確認するのが要点である。

設問5：規格化された最小不確定状態の解答

ψ の絶対値を二乗して積分すると

$$1 = |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{t}{\hbar} (x - x_0)^2 \right] dx = |C|^2 \sqrt{\frac{\pi \hbar}{-t}}, \quad t < 0.$$

定数位相を零に選べば

$$\psi_{x_0, p_0, t}(x) = \left(\frac{-t}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp \left[\frac{t}{2\hbar} (x - x_0)^2 + \frac{ip_0}{\hbar} (x - x_0) \right], \quad t < 0. \quad (9)$$

$\langle x \rangle = x_0$, $\langle p \rangle = p_0$ が成立し、 $\Delta x^2 = -\hbar/(2t)$ 、 $\Delta p^2 = -\hbar t/2$ 。

付録 A：独立検算と別解

A.1 波動関数を運動量表示に変換する

Fourier 変換の規約を

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \psi(x) dx$$

とする。設問 1 の Gaussian の場合、完成平方を用いると

$$\tilde{\psi}(p) = \left(\frac{a^2}{\pi\hbar^2} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{a^2 p^2}{2\hbar^2} \right).$$

従って運動量分布の分散は $\hbar^2/(2a^2)$ であり、位置表示による計算と一致する。

A.2 一般の最小不確定状態を a で書く

$t = -\hbar/a^2$ と書けば式(9)は

$$\psi_{x_0, p_0, a}(x) = (\pi a^2)^{-1/4} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2a^2} + \frac{ip_0(x - x_0)}{\hbar} \right], \quad a > 0.$$

原題の設問 1 は $x_0 = p_0 = 0$ とした特別な場合である。

A.3 演算子の期待値に関する検算

この Gaussian について直接微分すると

$$(\hat{p} - p_0)\psi = i\hbar \frac{x - x_0}{a^2} \psi, \quad \left[-\frac{\hbar}{a^2}(\hat{x} - x_0) - i(\hat{p} - p_0) \right] \psi = 0.$$

従って設問 4 で導入した演算子の零固有状態になっている。

A.4 等号が意味すること

$\Delta x \Delta p = \hbar/2$ は位置と運動量の両方の分散が零であることを意味しない。一方の分散を小さくすると他方は増大し、その積だけが下限を達成する。 a は任意に選べる。

付録 B：解答の採点チェックリスト

1. 設問 1： $|\psi|^2$ と ψ を取り違えず、 $\langle x^2 \rangle = a^2/2$ を求める。運動量分散は $-\hbar^2\psi''$ を用いて導出する。
2. 設問 2：正値性は $\|O\psi\|^2 \geq 0$ 。 O 自身が Hermite である必要はない。
3. 設問 3： $O^\dagger O = t^2 X^2 + P^2 + t\hbar$ を正しく展開し、 t の任意性から不等式を得る。
4. 設問 4： $t < 0$ の理由に二乗可積分性を挙げる。 $t \geq 0$ を単に「不適」と書くだけでは理由が不足する。
5. 設問 5：定数の絶対値を積分で定め、 $\langle x \rangle = x_0, \langle p \rangle = p_0$ を確認する。

学習上の接続

この問題の演算子 O は、調和振動子の消滅演算子に比例する形をしている。実際、 $t = -\hbar/a^2$ とおけば、位置・運動量の線形結合が Gaussian 真空を消す。量子調和振動子、コヒーレント状態、スクイーズド状態の理解につながる。

重要公式まとめ

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad t = -\frac{\hbar}{2(\Delta x)^2} < 0, \quad \Delta x^2 = -\frac{\hbar}{2t}, \quad \Delta p^2 = -\frac{\hbar t}{2}.$$

原題との関係：本書が扱うのは 2022 年度専門科目第 1 問のみ。問題本文は原本の画像を収録し、解答部分は独立に執筆。教員による確認済みの公式解答ではない。

3 重要公式・検算チェックリスト

3.1 2026 年度：周期ポテンシャル

1. $[p, x] = -i\hbar$ より $TxT^{-1} = x - a$ が正しい符号か。
2. Bloch 条件は $T\psi = e^{-ik}\psi$ 、すなわち $\psi(y+1) = e^{ik}\psi(y)$ と整合するか。
3. デルタポテンシャルでは波動関数は連続、微分は $+v\phi(0)$ だけ跳ぶ。
4. 転送行列は $\det M = 1$ で $\text{tr}M = 2\cos k$ 。
5. ギャップの最低次数は $\Delta E = 2V_0/a$ (V_0 はエネルギー $\times$ 長さの次元)。

3.2 2025 年度：時間依存摂動

1. $[x, H_0] = i\hbar p/m$ の符号を確認する。
2. 和則は完全性を用いる。 $a \neq 0$ なら非対角行列要素が消える。
3. 一次と二次の共鳴周波数 Ω_{a0} と $\Omega_{a0}/2$ を混同しない。
4. 中間状態 1 個の近似には完全和の和則をそのまま適用できない。
5. 二次摂動式の分母が 0 に近い場合は、与えられた摂動公式自体の適用可能性を確認する。

独立数値検算の例

2026 年度の分散関係で $v = 0.05$, $k = \pi$, $\alpha_0 = \pi$ を代入すると、 α_0 以外の解は数値的に $\delta = 0.01583534\dots$ 。一次近似 $v/\alpha_0 = 0.01591549\dots$ と整合する。対応するエネルギーの無次元差は $\alpha_+^2 - \alpha_-^2 = 0.09974715\dots$ 、一次予測は $2v = 0.10$ である。

2025 年度の完全和の検算では、 $\hbar = m = 1$, $H_0 = (p^2 + x^2)/2 + 0.06x^4$ の調和振動子基底を 45 状態で打ち切り、 $a = 2$ の二光子遷移を計算した。 $S_p = -14.91027576141427\dots$ と $\Omega^2 S_x = -14.91027576141425\dots$ が数値丸めの範囲で一致した。これは恒等式の**独立数値確認**であり、一般の証明は設問 5 に記載した和則である。

資料の位置づけ

原題：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻・2026 年度（令和 8 年度）および 2025 年度（令和 7 年度）入学試験「専門科目」第 1 問。原題ページは提供された PDF から直接引用した画像である。

解答：独立作成の非公式解説。理論上の適用範囲、問題の近似の制約、物理的解釈を明示した。

3 重要公式・比較・検算

	2024 年度：逆調和振動子	2023 年度：等方調和振動子
Hamiltonian	$H = (p^2 - q^2)/2$	$H = (p_1^2 + p_2^2)/(2m) + m\omega^2(q_1^2 + q_2^2)/2$
古典的性質	$p + q \propto e^t, p - q \propto e^{-t}$	有界な周期運動
量子状態	スクイーズド真空	$ n_1, n_2\rangle$ 、円偏光型生成演算子
固有値構造	正の調和振動子の離散的エネルギー準位とは異なる	$E_n = \hbar\omega(n+1), g_n = n+1$
主な道具	Bogoliubov 変換、Gaussian 波動関数	交換子、生成消滅演算子、角運動量

3.1 2024 年度の検算

初期 $t = 0$ では $\alpha_0 = i$ であり、 $\psi(q, 0) \propto \exp(-q^2/2\hbar)$ が元の真空波動関数と一致する。また

$$\text{Im } \alpha_t = \text{sech } 2t > 0, \quad \text{Re } \alpha_t = \tanh 2t,$$

なので波動関数は任意の有限 t で二乗可積分である。例として $t = 0.7$ なら

$$\tanh(1.4) \simeq 0.88535, \quad \text{sech}(1.4) \simeq 0.46492, \quad (\Delta q)^2/\hbar = \frac{\cosh 1.4}{2} \simeq 1.07545.$$

$\hat{q}(t)$ と $\hat{p}(t)$ の Heisenberg 方程式からも $q(t) = q(0) \cosh t + p(0) \sinh t$ 。真空の初期分散 $\langle q^2 \rangle = \langle p^2 \rangle = \hbar/2$, $\langle qp + pq \rangle = 0$ を用いると $\langle q(t)^2 \rangle = (\hbar/2) \cosh 2t$ となり、設問 7 の結果を独立に再現する。

3.2 2023 年度の検算

真空 $|0\rangle$ に対して

$$\hat{A}_+^\dagger |0\rangle = \frac{|1, 0\rangle + i|0, 1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \hat{A}_-^\dagger |0\rangle = \frac{|1, 0\rangle - i|0, 1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

両者のエネルギーは $2\hbar\omega$ 、角運動量はそれぞれ $+\hbar$ 、 $-\hbar$ 。この $n = 1$ の 2 つの状態で縮退度 $g_1 = 2$ が再現される。さらに $n = 2$ では角運動量 $-2\hbar, 0, +2\hbar$ の 3 状態が得られ $g_2 = 3$ と一致する。**原題の出典**：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 2024 年度／2023 年度修士課程入学

試験「専門科目」第 1 問。問題ページは提供された PDF から直接転載。

非公式解答：本巻の計算・証明は独立作成。採点基準、大学公表の模範解答との照合は行っていない。

量子力学 | 年度別問題

2020

年度

出題テーマ / 編集上の分類

二準位測定・Bell型相関

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

量子力学的二状態系を考えよう。この場合、観測量は 2×2 のエルミート行列で表される演算子に対応する。以下では次の行列表示をもつ観測量

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma(\theta) = (\cos \theta)\sigma_z + (\sin \theta)\sigma_x \quad (1)$$

を考え、状態ベクトルを

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

を用いて表す。

1. 状態 $|\uparrow\rangle$ において観測量 σ_z を測定した。測定結果が取りうる値 s_z , およびその期待値を求めよ。
2. 状態 $|\uparrow\rangle$ において観測量 σ_x を測定した。測定結果が取りうる値 s_x , およびその期待値を求めよ。
3. 状態 $|\uparrow\rangle$ において観測量 $\sigma(\theta)$ を測定した。測定結果が取りうる値 s_θ , およびその期待値を求めよ。

上記の二状態系 A, B からなる複合系を考える。その状態は四状態

$$|\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B, \quad |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B, \quad |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B, \quad |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B \quad (3)$$

の線形結合で書ける。そのような複合系を準備したのち、二状態系 A, B をそれぞれ別の場所で測定する。模式図は以下を参照せよ：



この設定の下で、次の実験を考える。

実験：状態

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B \right) \quad (4)$$

の複合系を毎回新たに準備し、部分系 A において観測量 $\sigma_z^A, \sigma_x^A, \sigma^A(\theta)$ のいずれか、部分系 B において観測量 $\sigma_z^B, \sigma_x^B, \sigma^B(\varphi)$ のいずれかを測定する。

この実験を、何度も繰り返すことを考えよう。

(次頁につづく)

4. 毎回、部分系 A で σ_z^A , 部分系 B で σ_z^B を測定する。
取りうる測定結果の組 (s_z^A, s_z^B) を述べよ。また、積 $s_z^A s_z^B$ の期待値を求めよ。
5. 毎回、部分系 A で σ_x^A , 部分系 B で σ_x^B を測定する。
取りうる測定結果の組 (s_x^A, s_x^B) を述べよ。また、積 $s_x^A s_x^B$ の期待値を求めよ。
6. 毎回、部分系 A で $\sigma^A(\theta)$, 部分系 B で $\sigma^B(\theta)$ を測定する。
この場合、測定結果の組 (s_θ^A, s_θ^B) は $s_\theta^A = -s_\theta^B = \pm 1$ を満たすことを示せ。
7. 毎回、部分系 A で $\sigma^A(\theta)$, 部分系 B で $\sigma^B(\varphi)$ を測定する。
取りうる測定結果の組 $(s_\theta^A, s_\varphi^B)$ を述べよ。また、積 $s_\theta^A s_\varphi^B$ の期待値を求めよ。
8. 各回、部分系 A で測定する観測量 $\sigma^A(\theta)$ を $\sigma^A(0^\circ)$, $\sigma^A(120^\circ)$, $\sigma^A(240^\circ)$ からそれぞれ $1/3$ の確率で測定者が選択することにし、また、部分系 B でも、測定する観測量 $\sigma^B(\varphi)$ を $\sigma^B(0^\circ)$, $\sigma^B(120^\circ)$, $\sigma^B(240^\circ)$ からそれぞれ $1/3$ の確率で測定者が選択することにする。測定結果の組 (s^A, s^B) の取りうる値を述べよ。また、積 $s^A s^B$ の期待値を求め、それが 0 になることを示せ。

これまでは量子力学を用いて考察を行ったが、そのようにして得られた設問 8 の結論は、以下でのべる決定論的仮説と矛盾することを確認しよう。

設問 8 の設定において、量子力学的には、各回の実験では、部分系 A について $\sigma^A(0^\circ)$, $\sigma^A(120^\circ)$, $\sigma^A(240^\circ)$ のどれか一つ、部分系 B について $\sigma^B(0^\circ)$, $\sigma^B(120^\circ)$, $\sigma^B(240^\circ)$ のどれか一つしか測定できない。これに対し、決定論的に、次のように考えてみよう。

仮説：各回の実験ごとに、実際に対応する観測量を測定したかしなかったかにかかわらず、部分系 A で $\sigma^A(0^\circ)$, $\sigma^A(120^\circ)$, $\sigma^A(240^\circ)$ を測定したとすると得られるであろう測定結果 $(s_{0^\circ}^A, s_{120^\circ}^A, s_{240^\circ}^A)$ 、部分系 B で $\sigma^B(0^\circ)$, $\sigma^B(120^\circ)$, $\sigma^B(240^\circ)$ を測定した場合に得られるであろう測定結果 $(s_{0^\circ}^B, s_{120^\circ}^B, s_{240^\circ}^B)$ があらかじめ決まっているとす。設問 6 よりこれらは

$$s_{0^\circ}^A = -s_{0^\circ}^B, \quad s_{120^\circ}^A = -s_{120^\circ}^B, \quad s_{240^\circ}^A = -s_{240^\circ}^B \quad (5)$$

を満たすとする。

9. 上記の仮説のもと、設問 8 と同様、部分系 A で $\sigma^A(0^\circ)$, $\sigma^A(120^\circ)$, $\sigma^A(240^\circ)$ をそれぞれ $1/3$ の確率で測定し、部分系 B で $\sigma^B(0^\circ)$, $\sigma^B(120^\circ)$, $\sigma^B(240^\circ)$ をそれぞれ $1/3$ の確率で測定する。このとき、 $\sigma^A(\theta)$ を測定した際に得られる測定結果を $s^A = s_\theta^A$, $\sigma^B(\varphi)$ を測定した際に得られる測定結果を $s^B = s_\varphi^B$ と書く。
 - (i) $(s_{0^\circ}^A, s_{120^\circ}^A, s_{240^\circ}^A) = (+1, +1, +1)$ の場合、 $s^A s^B$ の期待値を求めよ。
 - (ii) $(s_{0^\circ}^A, s_{120^\circ}^A, s_{240^\circ}^A) = (+1, +1, -1)$ の場合、 $s^A s^B$ の期待値を求めよ。
 - (iii) 八通り $(s_{0^\circ}^A, s_{120^\circ}^A, s_{240^\circ}^A) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ が任意に起こる場合、 $s^A s^B$ の期待値は負であることを示せ。

設問 8 の量子力学による結果では $s^A s^B$ の期待値は 0 であり、上記の決定論的仮説のもとでは $s^A s^B$ の期待値は負となった。これより、量子力学は上記の決定論的仮説とは矛盾することがわかる。

(この問題は、N. David Mermin, Physics Today 38, 4, pp.38-47 (1985) を参考にした。)

1 2020 年度第 1 問：二準位系の測定と Bell 型相関

上掲の原題：R2phys.pdf の PDF 第 4・5 ページ。

1.1 準備：射影測定の確率と特異な二体系

基底を $|\uparrow\rangle = (1, 0)^T$, $|\downarrow\rangle = (0, 1)^T$ とし, $\sigma(\theta) = \cos\theta \sigma_z + \sin\theta \sigma_x$ を定義する。 $\sigma(\theta)^2 = I$ なので固有値は ± 1 。二値測定の射影演算子は

$$P_s(\theta) = \frac{I + s\sigma(\theta)}{2}, \quad s = \pm 1.$$

ρ のもとで $p(s) = \text{tr}(\rho P_s)$, $\langle s \rangle = \text{tr}(\rho \sigma(\theta))$ となる。

1.2 設問 1： σ_z を $|\uparrow\rangle$ で測定

$\sigma_z |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$ より測定値は $s_z = +1$ のみで,

$$p(+1) = 1, \quad p(-1) = 0, \quad \langle s_z \rangle = 1.$$

1.3 設問 2： σ_x を $|\uparrow\rangle$ で測定

$|\uparrow\rangle = (|+_x\rangle + |-_x\rangle)/\sqrt{2}$, $|\pm_x\rangle = (|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ 。したがって $s_x = \pm 1$ はそれぞれ確率 $1/2$ で現れ, $\langle s_x \rangle = 0$ 。

1.4 設問 3： $\sigma(\theta)$ を $|\uparrow\rangle$ で測定

固有値は $s_\theta = \pm 1$, 期待値は

$$\langle s_\theta \rangle = \langle \uparrow | \sigma(\theta) | \uparrow \rangle = \cos\theta.$$

射影確率も求めると $p(s_\theta) = \frac{1}{2}(1 + s_\theta \cos\theta)$ 。

1.5 二粒子系の共通準備

反対称状態を

$$|\Psi^-\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

と書く。密度行列は, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ を用いて

$$\rho_- = |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-| = \frac{1}{4} (I \otimes I - \sigma_x \otimes \sigma_x - \sigma_y \otimes \sigma_y - \sigma_z \otimes \sigma_z).$$

従って任意の単位ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ について

$$\langle (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}^A)(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}^B) \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (\text{A})$$

さらに片側の平均は 0 であるから, 二値測定の同時確率は

$$\boxed{\Pr(s, t \mid \theta, \varphi) = \frac{1}{4} [1 - st \cos(\theta - \varphi)], \quad s, t = \pm 1.} \quad (\text{B})$$

1.6 設問 4 : σ_z^A と σ_z^B

可能な組は $(+1, -1), (-1, +1)$ で、それぞれ確率 $1/2$ 。和が一致する組は確率 0 。

$$\langle s_z^A s_z^B \rangle = -1.$$

1.7 設問 5 : σ_x^A と σ_x^B

σ_x 基底でも反対称状態は同形になるため、可能な組は $(+1, -1), (-1, +1)$ のみ (各 $1/2$)。

$$\langle s_x^A s_x^B \rangle = -1.$$

1.8 設問 6 : 両側で同一方向 θ を測定

式 (B) に $\varphi = \theta$ を代入すると $\Pr(s, t) = \frac{1}{4}(1 - st)$ 。 $st = +1$ の確率は 0 , $st = -1$ は各組 $1/2$ である。したがって $s_\theta^A = -s_\theta^B = \pm 1$ が各試行で成立する。

1.9 設問 7 : 異なる方向 θ, φ

計測結果は $(+, +), (+, -), (-, +), (-, -)$ の 4 通り。式 (B) から同符号の各確率は $(1 - \cos(\theta - \varphi))/4$, 異符号の各確率は $(1 + \cos(\theta - \varphi))/4$ 。よって

$$\langle s_\theta^A s_\varphi^B \rangle = -\cos(\theta - \varphi).$$

1.10 設問 8 : 3 方向を両側で等確率に選ぶ

$\theta_j = 2\pi j/3$, $\varphi_k = 2\pi k/3$, $j, k = 0, 1, 2$ をそれぞれ独立に $1/3$ で選ぶ。取り得る組は $(s, t) \in \{\pm 1\}^2$ であり、その無条件確率は

$$\Pr(s, t) = \frac{1}{9} \sum_{j,k=0}^2 \frac{1 - st \cos(\theta_j - \varphi_k)}{4} = \frac{1}{4}.$$

ここで $\sum_{j=0}^2 e^{i\theta_j} = 0$ を使った。したがって

$$\langle s^A s^B \rangle_{\text{QM}} = -\frac{1}{9} \sum_{j,k} \cos(\theta_j - \varphi_k) = 0.$$

各方向を独立に選ぶことが不可欠で、同じ方向を必ず選べば結果は -1 に戻る。

1.11 設問 9 : 測定値が事前決定されるという仮説

事前に決まっている Alice 側の 3 値を $a_0, a_1, a_2 \in \{\pm 1\}$ とすると、反対向きの完全反相関の仮説から Bob 側は $b_j = -a_j$ 。測定方向を独立に選ぶため

$$\langle s^A s^B \rangle_{\text{det}} = \frac{1}{9} \sum_{j,k} a_j b_k = -\frac{1}{9} (a_0 + a_1 + a_2)^2. \quad (\text{C})$$

(i) $(a_0, a_1, a_2) = (+1, +1, +1)$ のとき $\boxed{-1}$ 。 (ii) $(a_0, a_1, a_2) = (+1, +1, -1)$ のとき $\boxed{-1/9}$ 。 (iii) 三つの ± 1 の和は奇整数なので ± 1 または ± 3 。従って

$$\boxed{\langle s^A s^B \rangle_{\text{det}} \in \{-1, -1/9\} < 0.}$$

量子力学の設問 8 の予測 0 との差は、毎試行で 3 方向すべての測定値が決まっているという仮定と、方向選択の独立性による。量子力学的な「同一方向の反相関」だけから (C) を推論してはいけない。

量子力学 | 年度別問題

2019年度

出題テーマ / 編集上の分類

調和振動子と四次摂動

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

ハミルトニアン

$$H_0 = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

を持つ1次元調和振動子の量子力学系を考える。ここで m と ω は振動子の質量と固有振動数、 x と p は座標と運動量の演算子である。プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とするとき、 x と p は交換関係 $[x, p] = i\hbar$ を満たす。このような1次元束縛ポテンシャルを持つ系のハミルトニアンが対角化可能で縮退を持たないことを既知として、以下の設問に答えよ。

1. 演算子 $a, a^\dagger, N$ を次のように定義する。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right), \quad N = a^\dagger a.$$

これらの交換子 $[a, a^\dagger], [N, a], [N, a^\dagger]$ を計算せよ。また、 H_0 と N の間には $H_0 = \hbar\omega(\alpha N + \beta)$ という関係が成り立つ。 α と β の値を書け。

2. 上記の演算子 $N = a^\dagger a$ の固有値が (i) 非負であること、(ii) 整数であること、を示せ。
3. エネルギー準位の番号をエネルギーの低い方から順に $n = 0, 1, 2, \dots$ とする。 $n = 0$ は基底状態に対応する。 n 番目の準位のエネルギーを求めよ。また、 n 番目の準位に対応する規格化された固有状態を $|n\rangle$ とするとき、 $n \geq 1$ に対する $|n\rangle$ を $a^\dagger$ と $|0\rangle$ を用いて表せ。

以下では H_0 にポテンシャル $V = \lambda x^4$ (λ は正の定数) を加えたハミルトニアン

$$H = H_0 + V = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \lambda x^4$$

を持つ系を考える。

4. V を摂動と考え、エネルギー固有値の摂動展開を求めたい。

(i) 準備として一般の V に適用できる表式を得ておこう。 n 番目の準位のエネルギーの摂動展開を $E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \dots$ とする。1次と2次の摂動 $E_n^{(1)}, E_n^{(2)}$ を、 H_0 の固有値 $E_k^{(0)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) および H_0 の規格化された固有状態からなる基底 $|k\rangle$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) に関する V の行列要素 V_{kl} ($k, l = 0, 1, 2, \dots$) を用いて表せ。ただし行列要素は $V|l\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} |k\rangle V_{kl}$ によって定義される。

(ii) $V = \lambda x^4$ の場合に行列要素 V_{k0} を計算し、基底状態のエネルギーを λ に関する摂動展開の2次まで求めよ。

5. 次に、 V が摂動とはみなすことができない場合を考えよう。高いエネルギーを持つ固有状態は準古典的に扱うことができる。準位番号 n が十分大きい極限において、エネルギー固有値 E_n が n の何乗に比例するか答えよ。

2 2019 年度第 1 問：調和振動子と x^4 摂動

上掲の原題：*H31phys.pdf* の PDF 第 4 ページ。

2.1 設問 1：交換関係とハミルトニアン of 標準形

原題の定義

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right)$$

および $[x, p] = i\hbar$ から

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger.$$

逆変換 $x = c(a + a^\dagger)$, $p = i\sqrt{m\hbar\omega/2}(a^\dagger - a)$, $c = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}$ を代入すると

$$H_0 = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right), \quad \alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

2.2 設問 2： N の固有値

$N = a^\dagger a$ だから $\langle \psi | N | \psi \rangle = \|a|\psi\rangle\|^2 \geq 0$ 。もし $N|\psi\rangle = n|\psi\rangle$ で $n > 0$ なら $a|\psi\rangle$ は固有値 $n-1$ の固有ベクトルである。 $[N, a] = -a$ を繰り返して、負の固有値に至ることができないため（離散スペクトルと非縮退は問題文の仮定）、最小固有値は 0 で $n = 0, 1, 2, \dots$ 。正規化された各状態は

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle.$$

2.3 設問 3：エネルギーと状態

直ちに

$$E_n^{(0)} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad |n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle.$$

2.4 設問 4(i)：一般の非縮退摂動公式

$H = H_0 + V$ に対し、 V を形式的に小さい量とする。状態とエネルギーを次数ごとに展開して $(H_0 + V)|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ の同じ次数を比較する。規格化を $\langle n | \psi_n \rangle = 1 + O(V^2)$ とすると

$$E_n^{(1)} = V_{nn}, \quad E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|V_{kn}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}.$$

ここで $V_{kn} = \langle k | V | n \rangle$ 。固有値が縮退する場合には縮退摂動論が必要であり、この公式はそのまま使えない。

2.5 設問 4(ii)： $V = \lambda x^4$ の基底状態

$c = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}$ とすれば $V = \lambda c^4 (a + a^\dagger)^4$ 。計算の核心は

$$(a + a^\dagger)^2 |0\rangle = |0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle,$$

$$(a + a^\dagger)^4 |0\rangle = 3|0\rangle + 6\sqrt{2}|2\rangle + 2\sqrt{6}|4\rangle.$$

したがって非零な V_{k0} は

$$V_{00} = 3\lambda c^4, \quad V_{20} = 6\sqrt{2}\lambda c^4, \quad V_{40} = 2\sqrt{6}\lambda c^4.$$

第一摂動は $E_0^{(1)} = 3\lambda c^4$, 第二摂動は

$$E_0^{(2)} = -\frac{72\lambda^2 c^8}{2\hbar\omega} - \frac{24\lambda^2 c^8}{4\hbar\omega} = -\frac{42\lambda^2 c^8}{\hbar\omega}.$$

従って求める二次までの答えは

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{3\lambda\hbar^2}{4m^2\omega^2} - \frac{21\lambda^2\hbar^3}{8m^4\omega^5} + O(\lambda^3).$$

2.6 設問 5: x^4 が支配する高励起極限

高エネルギーでは古典的な転回点 $x_* \sim (E/\lambda)^{1/4}$, 運動量 $p_* \sim (2mE)^{1/2}$ となる。Bohr-Sommerfeld 量子化 (この設問が仮定する準古典近似) で

$$\oint p \, dx \propto E^{3/4} \sim n\hbar,$$

従って

$$E_n \propto n^{4/3} \quad (n \rightarrow \infty, \lambda > 0 \text{ 固定}).$$

より正確には四次ポテンシャルの量子化条件は

$$2 \int_{-x_*}^{x_*} \sqrt{2m(E - \lambda x^4)} \, dx = 2\pi\hbar(n + \frac{1}{2}),$$

ここから先頭係数も導ける。 n の指数が $4/3$ であることが設問の主眼である。

検算・取り扱い上の注意

- 2020 年度: $\Pr(s, t | \theta, \varphi)$ はすべて非負で 4 組を合計すると 1。 $\theta = \varphi$ では反相関が確率 1。
- 2020 年度: 3 方向の独立ランダム選択で量子相関は 0, あらかじめ 3 値を割り当てた決定論的仮説では $-1, -1/9$ のいずれか。
- 2019 年度: λx^4 は偶関数なので $\langle k | V | 0 \rangle$ は奇数 k に対して 0。二次補正の負符号も一般摂動論と一致。
- 2019 年度: 大きな n の漸近指数は, $E \sim p^2/(2m) + \lambda x^4$ の次元解析から $4/3$ 。

出典と注記: 問題画像はユーザー提供の東京大学大学院物理学専攻修士課程入学試験問題から抜粋。解答・図式化・補足説明は独立に作成した非公式解説であり, 大学公表の解答ではない。

量子力学 | 年度別問題

2018 年度

出題テーマ / 編集上の分類

断熱近似

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

二つの状態 $|1\rangle$ と $|2\rangle$ からなる量子力学系を考える。この二つの状態は1に規格化されており ($\langle 1|1\rangle = \langle 2|2\rangle = 1$)、かつ直交する ($\langle 1|2\rangle = 0$) もとする。この系のハミルトニアンは

$$H = \begin{pmatrix} \langle 1|H|1\rangle & \langle 1|H|2\rangle \\ \langle 2|H|1\rangle & \langle 2|H|2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & V \\ V & E_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

で与えられるとする。 E_1, E_2, V は実数とする。以下の設問に答えよ。

1. 状態 $|2\rangle$ に対する演算子 $(H - E_2 \mathbf{1})$ および演算子 $(H - E_2 \mathbf{1})^2$ の期待値を求めよ。ただし $\mathbf{1}$ は 2×2 の単位行列である。
2. いま、 E_1, E_2, V は時間によらない一定値で、 $0 < V$ とする。この系の二つのエネルギー固有値 $E_{\pm}$ ($E_- < E_+$) を求めよ。また、それらに対応する固有状態を $|\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle$ とするとき、 $|\psi_{\pm}\rangle = |1\rangle\langle 1|\psi_{\pm}\rangle + |2\rangle\langle 2|\psi_{\pm}\rangle$ の係数の比 $\langle 2|\psi_+\rangle / \langle 1|\psi_+\rangle$ および $\langle 2|\psi_-\rangle / \langle 1|\psi_-\rangle$ を E_1, E_2, V を用いて表せ。
3. この2つのエネルギー固有状態、 $|\psi_+\rangle$ と $|\psi_-\rangle$ は直交することを示せ。

以上の設問ではハミルトニアン (1) の行列要素 E_1, E_2, V は一定値をとると考えたが、以下では設定を少し変える。まず、 E_1 が実数値のパラメータ λ に $E_1 = E_2 - \varepsilon\lambda$ の形で依存し、 ε, E_2, V は実定数とする。このとき、パラメータ λ に依存するハミルトニアン

$$H^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} E_2 - \varepsilon\lambda & V \\ V & E_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

を考えよう。以下の設問では、 $0 < V \ll \varepsilon$ の関係が満たされているものとする。

4. ハミルトニアン $H^{(\lambda)}$ の二つの固有値を $E_+(\lambda)$ と $E_-(\lambda)$ (ただし $E_-(\lambda) < E_+(\lambda)$) とする。パラメータ λ の値によらず $E_+(\lambda) - E_-(\lambda) \geq 2V$ の関係が満たされることを示せ。

設問4の固有値に対応した固有状態を $|\psi_+^{(\lambda)}\rangle, |\psi_-^{(\lambda)}\rangle$ とする。固有状態 $|\psi_+^{(\lambda)}\rangle$ は

$$|\psi_+^{(\lambda)}\rangle = \cos(\theta(\lambda)) |1\rangle + \sin(\theta(\lambda)) |2\rangle \quad (3)$$

と書くことができ、この $\theta(\lambda)$ を λ の関数として図示すると図1のようになる。 $|\lambda| \lesssim \mathcal{O}(V/\varepsilon)$ の範囲内でのみ状態 $|\psi_+^{(\lambda)}\rangle$ は $|1\rangle$ と $|2\rangle$ から大きく異なるが、それは $|\lambda| \lesssim \mathcal{O}(V/\varepsilon)$ の場合に $H^{(\lambda)}$ の非対角項 V が二つの対角項 $(E_2 - \varepsilon\lambda)$ と E_2 の差 $\varepsilon\lambda$ と同程度かそれ以上の大きさになるためである。

さて、以下の設問5と6では、パラメータ λ が時刻 t とともに $\lambda = t/T$ のように変化、すなわちハミルトニアンが $H(t) = H^{(\lambda=t/T)}$ の形で変化する系を考える (T は定数)。この系の時間変化がゆっくりである (T が大きい) 場合に、状態 $|\psi(t)\rangle$ の時間発展を調べよう。 $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ を基底に用いて

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle = (|1\rangle, |2\rangle) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

で表される状態 $|\psi(t)\rangle$ の時間発展は、次のシュレディンガー方程式によって与えられる。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 - \varepsilon \frac{t}{T} & V \\ V & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここで、 $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。 λ の値を $\lambda = t/T$ とした二つの状態 $\{|\psi_+^{(t/T)}\rangle, |\psi_-^{(t/T)}\rangle\}$ を基底として用い、状態 $|\psi(t)\rangle$ を表すことを考える。

$$|\psi(t)\rangle = c_+(t)|\psi_+^{(t/T)}\rangle + c_-(t)|\psi_-^{(t/T)}\rangle = \left(|\psi_+^{(t/T)}\rangle, |\psi_-^{(t/T)}\rangle \right) \begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

5. (i) このとき $c_{\pm}(t)$ の時間発展を記述する方程式を $\theta(t/T)$ などを用いる形で書き表せ。
(ii) さらに、係数 $c_{\pm}(t)$ を複素位相分だけ変えた量

$$\tilde{c}_{\pm}(t) = c_{\pm}(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-T}^t dt' E_{\pm}(t'/T)} \quad (7)$$

を導入する。 $c_{\pm}(t)$ の時間発展方程式を $\tilde{c}_{\pm}(t)$ の時間発展方程式に書き直せ。

6. 時刻 $t = -T$, すなわち $\lambda = -1$ において $|\psi(t)\rangle = |\psi_+^{(\lambda=-1)}\rangle$ であるとする。条件 $TV^2/\varepsilon \gg \hbar$ が満たされる (系の時間変化が十分にゆっくり) ならば、時刻 $t = +T$ に至っても $|\tilde{c}_+(t)| \simeq 1$, $|\tilde{c}_-(t)| \ll 1$ のままである。その理由を、 $\tilde{c}_-(t)$ を定性的に評価して説明せよ。ただし、 $\mathcal{O}(1)$ の区間 I の上で実関数 $g(x)$ が緩やかに $\mathcal{O}(1)$ 程度変化し、実関数 $\chi(x)$ によって $e^{i\chi(x)}$ が I 上で激しく振動する場合には、 $|\int_I dx g(x) e^{i\chi(x)}| \ll 1$ となることを用いてよい。

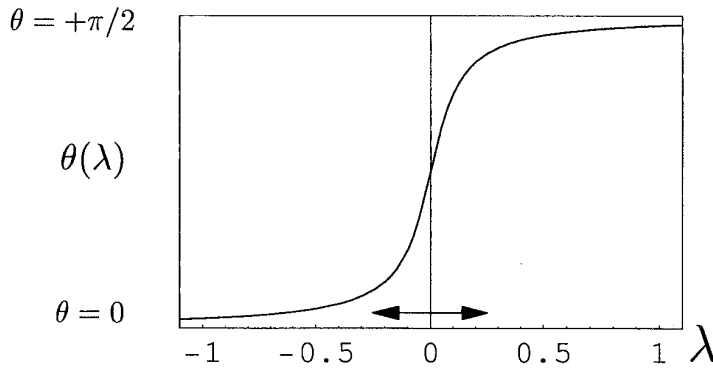


図 1: 式 (3) で導入した $\theta(\lambda)$ の λ 依存性を $2V/\varepsilon = 0.1$ の場合に示す。 $|\lambda| \gg (V/\varepsilon)$ では $\lambda < 0$ なら $\theta \simeq 0$, $\lambda > 0$ なら $\theta \simeq +\pi/2$ であるが、図中矢印 ($\longleftrightarrow$) で示した $|\lambda| \lesssim \mathcal{O}(V/\varepsilon)$ の範囲では θ の値が 0 と $+\pi/2$ の間の中間的な値をとる。

1 2018 年度第 1 問：二準位系の断熱時間発展

上掲の原題：*H30phys.pdf* の PDF 第 2・3 ページ。

1.1 設問 1： $|2\rangle$ での平均と分散

$H = \begin{pmatrix} E_1 & V \\ V & E_2 \end{pmatrix}$ と $|2\rangle = (0, 1)^\top$ を使うと,

$$(H - E_2 I) |2\rangle = V |1\rangle, \quad (H - E_2 I)^2 |2\rangle = V(E_1 - E_2) |1\rangle + V^2 |2\rangle.$$

ゆえに $\langle H - E_2 I \rangle_{|2\rangle} = 0, \quad \langle (H - E_2 I)^2 \rangle_{|2\rangle} = V^2$ 。

1.2 設問 2：固有値と固有ベクトル比

行列式 $\det(H - EI) = (E_1 - E)(E_2 - E) - V^2$ をゼロとすると

$$E_{\pm} = \frac{E_1 + E_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4V^2}.$$

$|\psi_{\pm}\rangle = c_{1,\pm} |1\rangle + c_{2,\pm} |2\rangle$ とおけば, $Vc_{1,\pm} + (E_2 - E_{\pm})c_{2,\pm} = 0$ から

$$\frac{c_{2,\pm}}{c_{1,\pm}} = \frac{E_{\pm} - E_1}{V} = \frac{E_2 - E_1 \pm \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4V^2}}{2V}.$$

これは $V > 0$ の場合であり, 固有ベクトル全体に共通の位相は任意である。

1.3 設問 3：異なる固有状態の直交性

Hermite 行列 H について $H|\psi\rangle_+ = E_+|\psi\rangle_+$, $H|\psi\rangle_- = E_-|\psi\rangle_-$ 。よって

$$(E_+ - E_-) \langle \psi_- | \psi_+ \rangle = \langle \psi_- | H | \psi_+ \rangle - \langle H \psi_- | \psi_+ \rangle = 0.$$

$V > 0$ では $E_+ \neq E_-$ なので $\langle \psi_- | \psi_+ \rangle = 0$ 。

1.4 設問 4：パラメータ依存ギャップ

$E_1 = E_2 - \varepsilon\lambda$ に代えると

$$\Delta(\lambda) := E_+ - E_- = \sqrt{\varepsilon^2 \lambda^2 + 4V^2} \geq 2V.$$

交差しかける $\lambda = 0$ でもギャップが $2V$ 残る (回避交差)。

1.5 設問 5(i)：瞬間固有基底の運動方程式

問題の約束に従って

$$|\psi_+^\lambda\rangle = \cos \theta(\lambda) |1\rangle + \sin \theta(\lambda) |2\rangle, \quad |\psi_-^\lambda\rangle = -\sin \theta(\lambda) |1\rangle + \cos \theta(\lambda) |2\rangle$$

と選ぶ（連続な位相の選択）。 $\cos 2\theta = -\varepsilon\lambda/\Delta$, $\sin 2\theta = 2V/\Delta$ なので

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\varepsilon V}{\varepsilon^2\lambda^2 + 4V^2}.$$

$\lambda = t/T$, $|\psi\rangle = c_+ |\psi_+\rangle + c_- |\psi_-\rangle$ とし, $\partial_t |\psi_+\rangle = \dot{\theta} |\psi_-\rangle$, $\partial_t |\psi_-\rangle = -\dot{\theta} |\psi_+\rangle$ を Schrödinger 方程式へ代入する。各基底への射影から

$$\begin{cases} i\hbar\dot{c}_+ = E_+c_+ + i\hbar\dot{\theta}c_-, \\ i\hbar\dot{c}_- = E_-c_- - i\hbar\dot{\theta}c_+. \end{cases}$$

ここで $E_{\pm} = E_{\pm}(t/T)$ である。

1.6 設問 5(ii) : 動力的位相の除去

設問の定義 $\tilde{c}_{\pm} = c_{\pm} \exp[i\hbar \int_{-T}^t E_{\pm}(t'/T) dt']$ を使い, $\Phi(t) = \hbar^{-1} \int_{-T}^t \Delta(t'/T) dt'$ とおくと

$$\begin{cases} \dot{\tilde{c}}_+ = \dot{\theta} e^{i\Phi(t)} \tilde{c}_-, \\ \dot{\tilde{c}}_- = -\dot{\theta} e^{-i\Phi(t)} \tilde{c}_+. \end{cases}$$

$\dot{\theta} = T^{-1} d\theta/d\lambda$ であり, $e^{\pm i\Phi}$ がエネルギー差による急速な振動を担う。

1.7 設問 6 : 断熱極限

初期時刻で $\tilde{c}_+(-T) = 1, \tilde{c}_-(-T) = 0$ とすると, 非断熱成分の第一近似は

$$\tilde{c}_-(t) \simeq - \int_{-T}^t \dot{\theta}(t') e^{-i\Phi(t')} dt'.$$

$\dot{\theta} = \varepsilon V/[T(\varepsilon^2\lambda^2 + 4V^2)]$ の最大値は $\varepsilon/(4TV)$ 。位相の角周波数は $\dot{\Phi} = \Delta/\hbar \geq 2V/\hbar$ であり, 非断熱結合と位相振動の比は

$$\max_t \frac{\hbar|\dot{\theta}|}{\Delta} \leq \frac{\hbar\varepsilon}{8TV^2}.$$

従って問題の条件 $TV^2/\varepsilon \gg \hbar$ はこの比を十分小さくし, 振動積分の相殺によって

$$|\tilde{c}_-| \ll 1, \quad |\tilde{c}_+| \simeq 1 \quad (-T \leq t \leq T)$$

となる。ただしこの論証は固有値のギャップと θ の滑らかさを用いる近似評価であって, 非断熱遷移が数学的に厳密にゼロであるとは主張しない。

量子力学 | 年度別問題

2017 年度

出題テーマ / 編集上の分類

二粒子振動子と自由波束

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

1次元放物型ポテンシャル中の質量 m の互いに区別できる2粒子を考える。これらの粒子の位置を x_1, x_2 とし、粒子間には距離の2乗に比例した相互作用が働くものとする。このとき、全系を記述するハミルトニアンは次のように与えられる。

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{m\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{m\omega^2\alpha}{4}(x_1 - x_2)^2$$

ここで、 $\omega (> 0)$ はポテンシャルの閉じ込めの強さを表す定数、 α は粒子間の相互作用の強さを表す定数であり、 $\hbar$ はプランク定数を 2π で割った量である。以下の設問に答えよ。なお、必要があれば、1次元調和振動子の基底状態の規格化された波動関数が適当な定数 $c (> 0)$ を用いて

$$\left(\frac{c}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{c}{2}x^2}$$

の形に書けること、また、積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

を用いてもよい。

1. ハミルトニアン H を運動エネルギーの部分 K とそれ以外の部分 V に分け ($H = K + V$)、 K と V をそれぞれ2粒子の重心座標 $x = (x_1 + x_2)/2$ と相対座標 $y = x_1 - x_2$ およびそれらに関する微分を用いて表せ。
2. 設問1の V に関する結果を用いると、系が安定に存在するための必要十分条件は、 α_0 である定数として $\alpha > \alpha_0$ であることが分かる。 α_0 の値を求めよ。
3. $\alpha > \alpha_0$ の場合に、系の基底状態のエネルギーを求めよ。また、規格化された波動関数を x と y の関数として求めよ。

以下では、波動関数の時間依存性を考える。時刻 $t < 0$ で系は $\alpha = 0$ の基底状態にあったとする。時刻 $t = 0$ で α の値を突然 $\alpha = \alpha_0$ に変え、その後 $\alpha = \alpha_0$ に保つとする。

4. 時刻 $t = 0$ の系の波動関数 $\Psi(x, y; t = 0)$ を相対座標 y に関するフーリエ変換を用いて

$$\Psi(x, y; t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} f(x, k) e^{iky}$$

と表す。 $f(x, k)$ を求めよ。

5. 設問4の結果を用いて、時刻 $t (> 0)$ での系の波動関数 $\Psi(x, y; t)$ を求めよ。

2 2017 年度第 1 問：相互作用する 2 粒子の調和振動子

上掲の原題：*H29phys.pdf* の PDF 第 2 ページ。

2.1 設問 1：重心座標と相対座標への分離

原題の $x = (x_1 + x_2)/2$, $y = x_1 - x_2$ を用いると

$$x_1 = x + \frac{y}{2}, \quad x_2 = x - \frac{y}{2}, \quad \partial_{x_1} = \frac{1}{2}\partial_x + \partial_y, \quad \partial_{x_2} = \frac{1}{2}\partial_x - \partial_y.$$

従って $\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 = \frac{1}{2}\partial_x^2 + 2\partial_y^2$, $x_1^2 + x_2^2 = 2x^2 + y^2/2$ 。よって

$$H = \underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{4m}\partial_x^2 + m\omega^2 x^2 \right]}_K + \underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{m}\partial_y^2 + \frac{m\omega^2(1+\alpha)}{4}y^2 \right]}_V.$$

重心の質量は $M = 2m$, 相対運動の換算質量は $\mu = m/2$ であり, 周波数はそれぞれ ω , $\Omega = \omega\sqrt{1+\alpha}$ 。

2.2 設問 2：安定性

相対座標の二次ポテンシャルが下に有界となる条件は $1+\alpha > 0$ 。 $\alpha < -1$ なら逆調和振動子になり基底状態が存在しない。 $\alpha = -1$ は自由粒子となり, 正規化可能な束縛基底状態が存在しない。従って

$$\alpha_0 = -1, \quad \text{束縛基底状態が存在するのは } \alpha > -1.$$

2.3 設問 3：基底状態のエネルギーと規格化波動関数

独立な二つの調和振動子の零点エネルギーを足して

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} [1 + \sqrt{1+\alpha}].$$

$\gamma_x = M\omega/\hbar = 2m\omega/\hbar$, $\gamma_y = \mu\Omega/\hbar = m\omega\sqrt{1+\alpha}/(2\hbar)$ と置くと

$$\Psi_0(x, y) = \left(\frac{\gamma_x \gamma_y}{\pi^2} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{\gamma_x x^2 + \gamma_y y^2}{2} \right).$$

$dx_1 dx_2 = dx dy$ (Jacobian の絶対値は 1) なので, 積 Gaussian の規格化はそのまま 2 粒子波動関数の規格化となる。

2.4 設問 4：相対座標 Fourier 変換

初期 $t = 0$ で $\alpha = 0$ 。従って $\gamma = m\omega/(2\hbar)$ とすれば $\gamma_y = \gamma$, $\gamma_x = 4\gamma$ 。重心因子 $g(x) = (\gamma_x/\pi)^{1/4} \exp(-\gamma_x x^2/2)$, 相対因子 $h(y) = (\gamma/\pi)^{1/4} \exp(-\gamma y^2/2)$ と書く。問題の逆 Fourier 規約 $\Psi(x, y, 0) = \int \frac{dk}{2\pi} f(x, k) e^{iky}$ では

$$f(x, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, y, 0) e^{-iky} dy = g(x) \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} e^{-k^2/(2\gamma)}.$$

従って

$$f(x, k) = \left(\frac{\gamma_x}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\gamma_x x^2/2} \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} e^{-k^2/(2\gamma)}.$$

2.5 設問 5 : $t > 0$ の自由相対運動

切替後は $\alpha = -1$ なので、相対運動は質量 $\mu = m/2$ の自由粒子である。 k モードの運動エネルギーは $\hbar^2 k^2 / (2\mu) = \hbar^2 k^2 / m$ 。重心の基底状態は零点エネルギー $\hbar\omega/2$ による位相のみを得る。従って問題文の Fourier 表示を使う直接の解は

$$\Psi(x, y, t) = e^{-i\omega t/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} f(x, k) e^{iky - i\hbar k^2 t/m}.$$

Gaussian 積分を評価すると、同値な閉形式

$$\Psi(x, y, t) = g(x) e^{-i\omega t/2} \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{1/4} \frac{\exp\left[-\frac{\gamma y^2}{2(1+i\omega t)}\right]}{\sqrt{1+i\omega t}}.$$

これは $t = 0$ に元の Gaussian へ戻る。実際 $\hbar\gamma/\mu = \omega$ 。相対座標の確率密度は

$$|h(y, t)|^2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}} \exp\left[-\frac{\gamma y^2}{1+\omega^2 t^2}\right],$$

分散は $\Delta y(t)^2 = (1+\omega^2 t^2)/(2\gamma)$ と増加する。なお粒子は「互いに区別できる」と問題に明記されているので、対称化・反対称化は要求されない。

検算と学習上の要点

- 2018 年度： $V \rightarrow 0$ では二準位は非混合、 $\lambda = 0$ のギャップは厳密に $2V$ 。 $\tilde{c}$ の結合項の係数は無次元の $\hbar\dot{\theta}/\Delta$ で比較する。
- 2017 年度：分離後の相対座標は換算質量 $m/2$ 。誤って質量 m とすると、自由進化位相が 2 倍ずれる。
- 2017 年度： $t = 0$ への帰着、 x, y の積分測度、Fourier 変換の 2π 因子を独立に確認すること。

出典と注記：問題画像はユーザー提供の東京大学大学院物理学専攻修士課程入学試験問題から抜粋。解答・補足説明は独立に作成した非公式解説であり、大学公表の解答ではない。

量子力学 | 年度別問題

2016 年度

出題テーマ / 編集上の分類

磁束中の電子とゼロモード

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

xy 平面内を動く電子の運動を量子力学的に考える。 z 方向には磁場があり、その磁束密度 $B_z(x, y)$ は、原点からの距離を $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ として

$$B_z(x, y) = \begin{cases} b > 0, & (r < R), \\ 0, & (r \geq R) \end{cases} \quad (1)$$

と与えられるものとする。以下の手順に従って、エネルギーがゼロの束縛状態の個数を求める。

電子の波動関数はスピンの上向き、下向きに応じて $\psi_\uparrow(x, y)$ と $\psi_\downarrow(x, y)$ の二成分をもつので、まとめて縦ベクトルとして

$$\Psi(x, y) = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(x, y) \\ \psi_\downarrow(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{略記すれば} \quad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} |\psi_\uparrow\rangle \\ |\psi_\downarrow\rangle \end{pmatrix} \quad (2)$$

と書け、ハミルトニアン H は

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} \mathbf{1}_{2 \times 2} + \frac{\hbar e B_z(x, y)}{2m} \sigma_z \quad (3)$$

と書けるものとする。ただし p_x と p_y は

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + eA_x(x, y), \quad p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + eA_y(x, y) \quad (4)$$

であり、 $\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割ったもの、 m は電子の質量、 $-e < 0$ は電子の電荷、 $A_x(x, y)$, $A_y(x, y)$ はベクトルポテンシャルで、磁束密度 $B_z(x, y)$ との関係は

$$B_z(x, y) = \frac{\partial A_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, y)}{\partial y} \quad (5)$$

で与えられる。また、行列は

$$\mathbf{1}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

である。

1. スピン角運動量演算子は

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_x, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \sigma_y, \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z \quad (7)$$

で与えられる。交換関係 $[S_x, S_y]$ および $[H, S_z]$ を計算せよ。

2. 演算子 D を $D = p_x \sigma_x + p_y \sigma_y$ と定義する。この D はエルミート演算子であって $D = D^\dagger$ を満たす。この D について、次の関係式

$$D \sigma_z = -\sigma_z D, \quad (8)$$

$$H = \frac{1}{2m} D^2 \quad (9)$$

がそれぞれ成り立つことを示せ。

3. 束縛状態 $|\Psi_n\rangle$ が H の固有値 E_n の固有状態であるとし、波動関数 $|\Phi_n\rangle$ を $|\Phi_n\rangle = D|\Psi_n\rangle$ で定める。このとき、式 (9) を用いて、

$$\langle\Phi_n|\Phi_n\rangle = 2mE_n \langle\Psi_n|\Psi_n\rangle \quad (10)$$

となることを示せ。

4. エネルギー $E_n \neq 0$ の固有束縛状態 $|\Psi_n\rangle$ を考える。このとき、 $E_n > 0$ であることを示せ。また、 $|\Psi_n\rangle$ がエネルギー $E_n > 0$, σ_z の固有値 1 の同時固有状態ならば、 $|\Phi_n\rangle = D|\Psi_n\rangle$ が同じエネルギー E_n で、 σ_z の固有値 -1 の同時固有状態であることを、式 (8) と (9) を用いて示せ。
5. エネルギー $E = 0$ の固有束縛状態 $|\Psi\rangle$ を考える。まず、 $D|\Psi\rangle = 0$ を示せ。次に、ある関数 $\rho(x, y)$ を用いて、ベクトルポテンシャルを

$$A_x(x, y) = -\frac{\partial\rho(x, y)}{\partial y}, \quad A_y(x, y) = +\frac{\partial\rho(x, y)}{\partial x} \quad (11)$$

と表せるものとする。さらに $f_{\uparrow}(x, y)$ と $f_{\downarrow}(x, y)$ を

$$\psi_{\uparrow}(x, y) = f_{\uparrow}(x, y) \exp\left[\frac{e}{\hbar}\rho(x, y)\right], \quad \psi_{\downarrow}(x, y) = f_{\downarrow}(x, y) \exp\left[-\frac{e}{\hbar}\rho(x, y)\right] \quad (12)$$

によって定義する。 $|\Psi\rangle$ がエネルギー $E = 0$ の固有状態であるとき、 $f_{\uparrow}(x, y)$ と $f_{\downarrow}(x, y)$ に対する方程式を求めよ。さらに、それを用いて、 $f_{\uparrow}(x, y)$ は $w = x + iy$ の正則関数、 $f_{\downarrow}(x, y)$ は $\bar{w} = x - iy$ の正則関数であることを説明せよ。

6. 引き続きエネルギー $E = 0$ の固有束縛状態 $|\Psi\rangle$ を考える。式 (1) の磁束密度を再現する $\rho(x, y)$ は

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{br^2}{4}, & (r < R), \\ \frac{bR^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \log \frac{r}{R} \right), & (r \geq R) \end{cases} \quad (13)$$

で与えられる。 $\rho(x, y)$ の $r \rightarrow \infty$ での振舞いと、束縛状態の波動関数は規格化可能であることを注意して、スピンの上向きでエネルギーがゼロの束縛状態は存在しないことを示せ。また、スピンの下向きでエネルギーがゼロの束縛状態の波動関数には、一次独立なものがいくつあるか答えよ。ただし、 $f_{\uparrow}(x, y)$ および $f_{\downarrow}(x, y)$ はそれぞれ w および $\bar{w}$ の有限次多項式であると仮定してよい。

(この問題は Y. Aharonov and A. Casher, Phys. Rev. A **19** (1979) 2461 を参考にした。)

1 2016 年度 第 1 問：磁束中の電子とゼロエネルギー状態

原題：H28phys.pdf の PDF 第 2-3 ページ。原題の電荷表記は電子の電荷 $-e < 0$ 、従って $e > 0$ とする。

1.1 記号と前提

与えられた演算子と磁場は

$$p_j = -i\hbar\partial_j + eA_j, \quad B_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x, \quad D = p_x\sigma_x + p_y\sigma_y, \quad H = \frac{D^2}{2m}.$$

原題で $B_z = b > 0$ は半径 R の円盤内に限られる。非零エネルギーについて σ_z 固有状態の対を構成し、零モード数を調べる。

1.2 設問 1：交換関係

Pauli 行列の積 $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$ 、 $\sigma_y\sigma_x = -i\sigma_z$ から

$$[S_x, S_y] = \frac{\hbar^2}{4} [\sigma_x, \sigma_y] = \frac{i\hbar^2}{2} \sigma_z = \boxed{i\hbar S_z}.$$

また $\sigma_z D = -D\sigma_z$ (次項) なので $[D^2, \sigma_z] = 0$ 、従って

$$\boxed{[H, S_z] = 0}.$$

すなわち H と σ_z を同時対角化できる。

1.3 設問 2： D の反交換性と $H = D^2/(2m)$

$\sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z$ 、 $\sigma_z\sigma_y = -\sigma_y\sigma_z$ であるから

$$\boxed{D\sigma_z = -\sigma_z D}.$$

運動量の交換子は

$$[p_x, p_y] = -i\hbar e(\partial_x A_y - \partial_y A_x) = -i\hbar e B_z.$$

これを用い、 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = I_2$ を代入すれば

$$\begin{aligned} D^2 &= p_x^2 + p_y^2 + p_x p_y \sigma_x \sigma_y + p_y p_x \sigma_y \sigma_x \\ &= p_x^2 + p_y^2 + i[p_x, p_y] \sigma_z = p_x^2 + p_y^2 + \hbar e B_z \sigma_z. \end{aligned}$$

従って、原題 (3) の Pauli ハミルトニアンと一致して $\boxed{H = D^2/(2m)}$ 。

1.4 設問 3：ノルム恒等式

束縛固有状態 $H|\Psi_n\rangle = E_n|\Psi_n\rangle$ に対し $|\Phi_n\rangle = D|\Psi_n\rangle$ 。 $D = D^\dagger$ と $D^2 = 2mH$ より

$$\langle\Phi_n|\Phi_n\rangle = \langle\Psi_n|D^2|\Psi_n\rangle = \boxed{2mE_n\langle\Psi_n|\Psi_n\rangle}.$$

1.5 設問 4：非零準位の正性とスピン反転対

$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \|D\Psi\|^2 / (2m) \geq 0$. $E_n \neq 0$ なら $E_n > 0$ であり、前項より $|\Phi_n\rangle \neq 0$ 。また $HD = DH$ であるから

$$H|\Phi_n\rangle = HD|\Psi_n\rangle = E_n|\Phi_n\rangle.$$

$\sigma_z|\Psi_n\rangle = +|\Psi_n\rangle$ なら、反交換関係により

$$\sigma_z|\Phi_n\rangle = -D\sigma_z|\Psi_n\rangle = -|\Phi_n\rangle.$$

従って、 $E > 0$ のスピン上向き状態は D によって同じ E の下向き状態と対応する。逆方向も同じ議論が成立するため、 $D/\sqrt{2mE}$ は両スピン部分空間の逆写像を与える。

1.6 設問 5：ゼロモードと正則関数

$E = 0$ なら前述のノルム恒等式から

$$\boxed{D\Psi = 0}.$$

原題 (11) のゲージ $A_x = -\partial_y\rho$, $A_y = \partial_x\rho$ を用いる。

$$D = \begin{pmatrix} 0 & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & 0 \end{pmatrix}.$$

従って

$$(p_x + ip_y)\psi_\uparrow = 0, \quad (p_x - ip_y)\psi_\downarrow = 0.$$

原題 (12) の $\psi_\uparrow = e^{e\rho/\hbar}f_\uparrow$, $\psi_\downarrow = e^{-e\rho/\hbar}f_\downarrow$ を代入すると、 ρ に関する項が相殺し

$$\boxed{(\partial_x + i\partial_y)f_\uparrow = 0}, \quad \boxed{(\partial_x - i\partial_y)f_\downarrow = 0}.$$

$w = x + iy$, $\bar{w} = x - iy$ と書けば、 $\partial_{\bar{w}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, $\partial_w = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ 。よって $f_\uparrow$ は w の正則関数、 $f_\downarrow$ は $\bar{w}$ の正則関数である。

1.7 設問 6：束縛ゼロモードの個数

与えられた ρ は

$$\rho(r) = \begin{cases} br^2/4, & r < R, \\ \frac{bR^2}{2}\left(\frac{1}{2} + \log \frac{r}{R}\right), & r \geq R. \end{cases}$$

$r = R$ で ρ と ρ' は連続であり、 $\Delta\rho = B_z$ を満たす。総磁束と無次元磁束を

$$\Phi = \int_{\mathbb{R}^2} B_z d^2x = \pi b R^2, \quad \eta = \frac{e\Phi}{2\pi\hbar} = \frac{ebR^2}{2\hbar} > 0$$

とおく。無限遠では

$$e^{e\rho/\hbar} \asymp r^\eta, \quad e^{-e\rho/\hbar} \asymp r^{-\eta}.$$

$f_\uparrow(w)$ が次数 $j \geq 0$ の非零多項式なら上向き波動関数は $r^{j+\eta}$ のように発散し、二乗可積分でない。従って

$$\boxed{N_\uparrow(E=0) = 0}.$$

下向きでは $f_\downarrow(\bar{w}) = \bar{w}^j$ とすると $\psi_\downarrow \asymp r^{j-\eta}$ 。平面上のノルムの無限遠部分は $\int^\infty r^{2(j-\eta)+1} dr$ となるので、収束条件は

$$2(j-\eta)+1 < -1 \iff \boxed{j < \eta-1}.$$

$j = 0, 1, 2, \dots$ についてこの条件を満たす数が求める一次独立な状態数であり、

$$N_{\downarrow}(E = 0) = \max\{0, [\eta] - 1\}, \quad \eta = \frac{ebR^2}{2\hbar}.$$

η が整数のとき $j = \eta - 1$ はノルムが $\int^{\infty} \mathbf{d}r/r$ と対数発散するため、含めてはいけない。例えば $\eta = 2$ では $j = 0$ の **1 個**のみである。

検算 $0 < \eta \leq 1$ では 0 個、 $1 < \eta \leq 2$ では 1 個、 $2 < \eta \leq 3$ では 2 個、という階段状の振る舞いになる。

量子力学 | 年度別問題

2015 年度

出題テーマ / 編集上の分類

円周上のデルタ関数ポテンシャル

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

以下のハミルトニアンで記述される一次元量子系を考える。

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

ここで $2\pi\hbar (= h)$ はプランク定数, m は考えている粒子の質量, $V(x)$ は時間によらないポテンシャルエネルギーである。系は長さ $2\pi L$ の一次元円周上で定義されているものとし, x と $x+2\pi L$ を同一点とみなす。波動関数 $\psi(x)$ およびポテンシャル $V(x)$ は周期的境界条件 $\psi(x+2\pi L) = \psi(x)$, $V(x+2\pi L) = V(x)$ を満たすものとする。

1. $V(x) = 0$ の場合にシュレディンガー方程式 $H\psi(x) = E\psi(x)$ を解け。エネルギー E はどのような値に量子化されるか, またエネルギー固有値に縮退があるのかどうか述べよ。

以下ではポテンシャルがデルタ関数, つまり円周を $x \in [-\pi L, \pi L]$ とあらわした時

$$V(x) = \frac{\hbar^2 v}{2m} \delta(x)$$

と与えられる場合を考える。 v は定数である。

2. 波動関数 $\psi(x)$ の微分 $\psi'(x) = \frac{d\psi}{dx}$ は $x = 0$ で次のような不連続性を持つことを, シュレディンガー方程式を用いて説明せよ。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)) = v\psi(0)$$

3. $v < 0$ の場合, 負エネルギー状態が一つだけ存在することを示す。まず, $x = 0$ を除く円周 $x \in (0, 2\pi L)$ で波動関数を $\psi(x) = e^{\kappa x} + Ae^{-\kappa x}$ (A は定数, $\kappa > 0$) の形に仮定する。それがエネルギー固有値 $E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$ に対応するシュレディンガー方程式の解であることを確認せよ。次に $x = 0$ における接続条件を調べ, A の表式, 及び v と κ の関係を定めよ。最後にグラフを利用して任意の $v < 0$ に対して κ が一つだけ定まることを示せ。
4. $v > 0, E > 0$ の場合の解を調べる。 E を正のパラメータ k を用いて $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ と書く。設問3と同様の解析を行って境界条件を満たすシュレディンガー方程式の解の形を定め, k と v の間の関係を求めよ。なお, ポテンシャルエネルギーの影響を受けない解もあることに留意せよ。
5. 設問4で $k \gg v$ の場合, $v = 0$ の場合と比較したときのエネルギー固有値の補正を, v について一次まで求めよ。

2 2015 年度 第 1 問：円周上のデルタ関数ポテンシャル

原題：H27phys.pdf の PDF 第 2 ページ。円周長 $2\pi L$ 、 $V(x) = \hbar^2 v \delta(x)/(2m)$ 。 v の次元は長さの逆数。

2.1 設問 1：自由粒子と量子化

$V = 0$ で周期境界条件 $\psi(x+2\pi L) = \psi(x)$ を適用する。平面波 $\psi(x) = Ce^{ikx}$ に対して $e^{2\pi i k L} = 1$ だから

$$k_n = \frac{n}{L}, \quad \psi_n(x) = \frac{e^{inx/L}}{\sqrt{2\pi L}}, \quad E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2 n^2}{2mL^2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$n = 0$ の基底状態は非縮退、 $n \neq 0$ は n と $-n$ が同じエネルギーを持つので二重縮退する。

2.2 設問 2：導関数の跳び条件

定常 Schrödinger 方程式を $2m/\hbar^2$ 倍し、 $x = 0$ の近傍を積分する：

$$-\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi''(x) dx + v \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) \psi(x) dx = \frac{2mE}{\hbar^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(x) dx.$$

$\varepsilon \downarrow 0$ では右辺が 0 に、デルタ関数項が $v\psi(0)$ に収束する。よって

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = v\psi(0).$$

リングでは $0^- = 2\pi L^-$ である。波動関数自身は連続である。

2.3 設問 3： $v < 0$ の負エネルギー束縛状態はちょうど 1 個

$E = -\hbar^2 \kappa^2/(2m)$ 、 $\kappa > 0$ とし、 $0 < x < 2\pi L$ で原題どおり

$$\psi(x) = e^{\kappa x} + Ae^{-\kappa x}$$

を考える。自由部分では $\psi'' = \kappa^2 \psi$ であるから、与えられた負エネルギーの Schrödinger 方程式を満たす。周期的な連続性 $\psi(0) = \psi(2\pi L)$ から

$$1 + A = e^{2\pi \kappa L} + Ae^{-2\pi \kappa L} \implies A = e^{2\pi \kappa L}.$$

従って $\psi(x) \propto \cosh\{\kappa(x - \pi L)\}$ である。跳び条件を適用すると

$$\kappa(1 - A) - \kappa(e^{2\pi \kappa L} - Ae^{-2\pi \kappa L}) = v(1 + A),$$

すなわち

$$v = -2\kappa \tanh(\pi L \kappa).$$

右辺は $\kappa \downarrow 0$ で 0、 $\kappa \uparrow \infty$ で $-\infty$ となり、微分 $-2 \tanh(\pi L \kappa) - 2\pi L \kappa \operatorname{sech}^2(\pi L \kappa) < 0$ なので単調に減少する。従って任意の $v < 0$ に対し $\kappa > 0$ はただ 1 つ存在する。波動関数が $x = 0$ で 0 なら、自由領域の両端に Dirichlet 条件を課した負エネルギー解は自明解だけなので、上記以外の負エネルギー解はない。

2.4 設問 4: $v > 0$ の正エネルギー固有値

$E = \hbar^2 k^2 / (2m)$ 、 $k > 0$ とする。デルタ関数の位置を中心とした反射対称性によって、リングの中点 $x = \pi L$ に関する偶関数、奇関数に分けられる。

奇関数（デルタ関数の影響を受けない）

$$\psi_{n,\text{odd}}(x) \propto \sin\left(\frac{nx}{L}\right), \quad k = \frac{n}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

は $\psi(0) = 0$ なので、すべての v で跳び条件を満たす。

偶関数（デルタ関数で固有値が移動する）

$$\psi_{\text{even}}(x) \propto \cos\{k(x - \pi L)\}.$$

このとき $\psi'(0^+) = k \sin(\pi Lk)$ 、 $\psi'(0^-) = -k \sin(\pi Lk)$ である。従って

$$2k \sin(\pi Lk) = v \cos(\pi Lk), \quad 2k \tan(\pi Lk) = v.$$

$v > 0$ の解では $\cos(\pi Lk) \neq 0$ なので上式に割り算してよい。奇関数の系列は自由粒子の準位を維持し、偶関数の系列だけが反発的デルタ関数で上に移動する。

2.5 設問 5: $k \gg |v|$ の一次のエネルギー補正

自由粒子の二重縮退準位 $n \geq 1$ に対し、奇関数系列は変化しない。偶関数系列では $k = n/L + \Delta k$ とおき、 $|\pi L \Delta k| \ll 1$ を用いる。

$$v = 2k \tan(\pi Lk) = 2\left(\frac{n}{L} + \Delta k\right) \tan(\pi n + \pi L \Delta k) = 2\pi n \Delta k + O((\Delta k)^2).$$

従って

$$\Delta k = \frac{v}{2\pi n} + O(v^2) \quad (L, n \text{ 固定、} v \text{ 小の展開}).$$

エネルギー $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$ の一次補正は

$$\Delta E_{n,\text{even}} = \frac{\hbar^2 v}{2\pi m L} + O(v^2), \quad \Delta E_{n,\text{odd}} = 0, \quad n \geq 1.$$

これは縮退摂動論でも確認できる：偶関数 $\cos(nx/L)/\sqrt{\pi L}$ は $x = 0$ で非零なので $\langle V \rangle = \hbar^2 v / (2\pi m L)$ 、奇関数は $\psi(0) = 0$ のため 0。注意： $n = 0$ は自由粒子の段階で非縮退で、一次補正は $\hbar^2 v / (4\pi m L)$ となる。設問の高励起準位とは区別する。

検算と参照上の注意

- 2016 年度： D^2 の磁場項の符号は電子電荷 $-e$ の指定を入れて $+e\hbar B_z \sigma_z$ 。符号を誤るとゼロモードのスピンが反転してしまう。
- 2016 年度： η が整数であれば臨界多項式次数の状態は対数的に非正規化。単純な $[\eta]$ とする式は整数磁束で誤り。

3. 2015 年度： $v = 0$ では非零 n の縮退が二重、 $v \neq 0$ ではデルタ関数を避ける奇関数の系列のみが不変。
4. 2015 年度：一次摂動の量は $n \geq 1$ の縮退準位と $n = 0$ の基底準位で係数が異なる。

出典：原題画像はユーザー提供の東京大学大学院理学系研究科・物理学専攻の修士課程入学試験問題(平成 28・27 年度)。解答・補足は独立に作成した非公式解説であり大学の公式解答ではない。

量子力学 | 年度別問題

2014 年度

出題テーマ / 編集上の分類

水素原子・Landau準位・正準変換

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

外部電磁場中での質量 m 、電荷 q の荷電粒子の量子力学的運動を考える。そのハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi$$

で与えられる。ここでは、粒子のスピン自由度は考えない。 ϕ , $\mathbf{A}$ は、それぞれ電磁場のスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを表し、ここでは時間によらないとする。量子化条件は、座標と運動量の正準交換関係、 $[x, p_x] = xp_x - p_x x = i\hbar$, $[y, p_y] = [z, p_z] = i\hbar$ で与えられる。ここで、 $\hbar = h/2\pi$ で、 h はプランク定数を表す。以下の問いに答えよ。

まず、原点に置かれた $-q$ の電荷の作る静電ポテンシャルの中の運動を考える。その座標表示のハミルトニアンは、

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

で与えられる。ここで、 $r = |\mathbf{r}|$ は原点からの距離、 ϵ_0 は真空の誘電率を表す。

1. この基底状態は球対称性を持つ s 波状態となり、その波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ は動径座標 r のみの関数となる。長さの次元を持つ定数 r_0 と、エネルギーの次元を持つ定数 E_0 を適当に選んで、 $r = r_0\rho$, $E = -E_0\varepsilon$ とおくと、基底状態のシュレーディンガー方程式は、無次元変数 ρ と無次元エネルギー ε を使って、

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{2}{\rho} \right] \psi = \varepsilon \psi \quad (1)$$

と書くことができる。このとき、 r_0 と E_0 を、 m , q , ϵ_0 , $\hbar$ を用いて表せ。必要であれば、任意の r のみの関数 $f(r)$ にたいし、 $\nabla^2 f(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) f(r)$ となることを用いよ。

2. (1) 式の節なし解 $\psi(\mathbf{r}) = ce^{-\rho} = ce^{-r/r_0}$ は基底状態の波動関数を与える。ここで、定数 c は波動関数の規格化因子を表す。基底状態のエネルギー E と粒子の動径座標の拡がりの大きさ $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ を、それぞれ、 E_0 と r_0 を用いて表せ。ここで、 $\langle r^2 \rangle$ は r^2 の期待値を表す。

次に、 z 軸の負の方向を向いた強さ B の一様な静磁場中での荷電粒子の運動を考える。このとき、ポテンシャルを $A(\mathbf{r}) = (By/2, -Bx/2, 0)$, $\phi(\mathbf{r}) = 0$, ととると、ハミルトニアンは、

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x - \frac{qBy}{2} \right)^2 + \left(p_y + \frac{qBx}{2} \right)^2 + p_z^2 \right] \quad (2)$$

で与えられる。

3. $p_1 = p_x - \frac{qBy}{2}$, $p_2 = p_y + \frac{qBx}{2}$, p_z の間の交換関係を求めよ。
4. 適当な定数 k を選んで、新しい正準座標 (X, P) を $X = kp_2$ と $P = p_1$ ととることにより、 (x, y) 方向の運動が1次元の調和振動子と等価になることを示し、その固有振動数 ω を求めよ。また、古典的描像では ω が何を表すか述べよ。
5. $P' = p_x + \frac{qBy}{2}$ は正準座標 (X, P) のそれぞれと可換になることを示せ。また、 P' と正準共役な関係にあるエルミート演算子 X' を、正準座標 (X, P) と可換になるように、 x と p_y の線形結合で構成せよ。

6. ハミルトニアン (2) は正準座標 (X, P) と p_z で書かれており, もう一組の正準座標 (X', P') には依存しない。今, (X, P) 座標にのみ注目したとき, X を対角化する表示で基底状態の波動関数はどう表されるか。さらに変数 X' を考慮に入れる場合, それが特定の実数値 $X' = a$ を持つときには, この基底状態の波動関数を元の座標 x で書き表すことができる。そのとき, a はどういう意味を持つか述べよ。

2014 年度 第 1 問 独立解答

水素原子の無次元化／一様磁場と Landau 準位／磁気的縮退

設問 1 [解答] クーロンポテンシャルの係数を $C = q^2/(4\pi\epsilon_0)$ とおく。s 波について

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \psi(r) - \frac{C}{r} \psi(r) = E \psi(r).$$

$r = r_0 \rho$, $E = -E_0 \varepsilon$ を代入し、 $2mr_0^2/\hbar^2$ 倍すると

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{2mCr_0}{\hbar^2} \frac{1}{\rho} \right] \psi = \frac{2mr_0^2 E_0}{\hbar^2} \varepsilon \psi.$$

したがって、出題の式 (1) にする選び方は

$$r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{mq^2}, \quad E_0 = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} = \frac{mq^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}.$$

[確認・補足] r_0 は Bohr 半径に対応し、 $E_0 > 0$ は束縛エネルギーの大きさである。

設問 2 [解答] $\psi(r) = ce^{-r/r_0}$ を (1) 式へ代入すると

$$\left[1 - \frac{2}{\rho} + \frac{2}{\rho} \right] e^{-\rho} = \varepsilon e^{-\rho}, \quad \varepsilon = 1.$$

ゆえに基底状態エネルギーは $E = -E_0$ 。等方的分布 $|\psi|^2 \propto e^{-2r/r_0}$ について、

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty r^4 e^{-2r/r_0} dr}{\int_0^\infty r^2 e^{-2r/r_0} dr} = \frac{4!/(2/r_0)^5}{2!/(2/r_0)^3} = 3r_0^2, \quad \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{3} r_0.$$

[確認・補足] 正規化係数は比を取るため消える。

設問 3 [解答] $p_1 = p_x - qBy/2$, $p_2 = p_y + qBx/2$ とおく。正準交換関係より

$$\begin{aligned} [p_1, p_2] &= [p_x, qBx/2] + [-qBy/2, p_y] \\ &= -i\hbar qB/2 - i\hbar qB/2 = -i\hbar qB, \\ [p_1, p_z] &= [p_2, p_z] = 0. \end{aligned}$$

負の z 方向の磁場を表す符号と矛盾しない。

設問 4 [解答] $qB \neq 0$ として $X = kp_2$, $P = p_1$ とおく。

$$[X, P] = k[p_2, p_1] = ik\hbar qB, \quad k = \frac{1}{qB}.$$

qB は負でもよく、この定義は符号を含む。よって

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{(qB)^2 X^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2 X^2}{2} + \frac{p_z^2}{2m}, \quad \omega_c = \frac{|qB|}{m}.$$

[確認・補足] 古典的には ω_c はサイクロトロン運動の角振動数である。量子準位は $E_{n,p_z} = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) + p_z^2/(2m)$ 。

設問 5 [解答] 与えられた $P' = p_x + qBy/2$ について、

$$[P', P] = 0, \quad [P', p_2] = [p_x, qBx/2] + [qBy/2, p_y] = 0.$$

したがって P' は (X, P) の双方と可換である。 x と p_y の線形結合 $X' = ax + bp_y$ について

$$[X', P] = i\hbar(a + bqB/2), \quad [X', P'] = i\hbar(a - bqB/2).$$

$[X', P] = 0, [X', P'] = i\hbar$ を満たすのは $a = 1/2, b = -1/(qB)$ 。すなわち

$$X' = \frac{x}{2} - \frac{p_y}{qB}, \quad [X', P'] = i\hbar, \quad [X', X] = [X', P] = [P', X] = [P', P] = 0.$$

[確認・補足] X' はサイクロトロン運動の中心座標 (guiding center) の一成分であり、励起エネルギーに現れない縮退自由度を表す。

設問 6 [解答] (X, P) 表現の基底状態は通常の調和振動子の Gaussian で、

$$\psi_0(X) = \left(\frac{m\omega_c}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega_c X^2}{2\hbar}\right].$$

同時に X' の一般化固有値 $a \in \mathbb{R}$ を指定し、元の座標表示で $X'\psi_a = a\psi_a$ とすると

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{i\hbar}{qB}\partial_y\right)\psi_a = a\psi_a, \quad \Rightarrow \quad \psi_a(x, y) = f(x) \exp\left[\frac{iqB}{\hbar}(x/2 - a)y\right].$$

この上で $X = (p_y + qBx/2)/(qB)$ は $x - a$ の乗算として、 P は $-i\hbar\partial_x$ として作用する。したがって

$$\psi_a(x, y) = C \exp\left[-\frac{|qB|}{2\hbar}(x - a)^2 + \frac{iqB}{\hbar}(x/2 - a)y\right].$$

C は y 方向の境界条件に従う規格化係数。無限平面上の X' 固有状態は一般化固有状態であり、通常の $L^2(\mathbb{R}^2)$ ノルムには正規化できない。

[確認・補足] 確率密度は $x = a$ を中心に幅 $\sqrt{\hbar/|qB|}$ を持つ。 a は軌道中心の x 座標 (guiding-center coordinate) に相当する。

検算メモ: $x = X + X', p_y = (qB/2)(X - X')$ が直接成立する。 $[X, P] = [X', P'] = i\hbar$ と他の交差交換子の消失を再代入して確認できる。

量子力学 | 年度別問題

2013 年度

出題テーマ / 編集上の分類

量子調和振動子・コヒーレント状態

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

ハミルトニアンが

$$\mathcal{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} \quad (1)$$

で与えられる角振動数 ω の一次元調和振動子の量子力学を考える。ただし、調和振動子の質点の質量を m 、位置演算子を $\hat{x}$ 、運動量演算子を $\hat{p}$ で表し、プランク定数 $h/2\pi$ を $\hbar$ とする。次の各設問に答えよ。

1. 以下の文章を読んで、 $\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ク}}$ に当てはまる数式を書け。

一次元調和振動子の消滅演算子 $\hat{a}$ は、

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \quad (2)$$

で与えられる。このとき、 $\hat{a}$ に共役な生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ は、 $\hat{x}$ と $\hat{p}$ を用いて $\hat{a}^\dagger = \boxed{\text{ア}}$ と表される。この $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ の交換関係は $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \boxed{\text{イ}}$ をみたす。 $\hat{x}$ と $\hat{p}$ を $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を用いて表すと、 $\hat{x} = \boxed{\text{ウ}}$ と $\hat{p} = \boxed{\text{エ}}$ となるので、ハミルトニアン $\mathcal{H}$ も $\hat{x}$ と $\hat{p}$ ではなく $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を用いて $\mathcal{H} = \boxed{\text{オ}}$ と書くことができる。これより、 $\mathcal{H}$ の規格化された基底状態 $|\phi_0\rangle$ に対応する $\mathcal{H}$ のエネルギー固有値 E_0 は、 $E_0 = \boxed{\text{カ}}$ で与えられる。 n 番目の規格化された励起状態を $|\phi_n\rangle$ 、対応するエネルギー固有値を E_n と表すと、 $|\phi_n\rangle$ と $|\phi_{n+1}\rangle$ は $|\phi_{n+1}\rangle = \boxed{\text{キ}} \hat{a}^\dagger |\phi_n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で与えられる関係式を満たし、 $E_n = \boxed{\text{ク}}$ となる。ただし、 $\boxed{\text{キ}}$ は正の実数となるように位相を選ぶものとする。

2. ハミルトニアン $\mathcal{H}$ による一次元調和振動子の時間発展を考える。時刻 $t = 0$ における規格化された初期状態 $|\psi(0)\rangle$ が、設問1で定義された $|\phi_n\rangle$ と複素係数 $c_n(0)$ を用いて

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) |\phi_n\rangle \quad (3)$$

で与えられているとき、時刻 t における状態 $|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) |\phi_n\rangle$ の複素係数 $c_n(t)$ を $c_n(0)$ を用いて表せ。

3. 設問1で定義された $|\phi_n\rangle$ における $\hat{x}$ の分散を $(\Delta x)^2 = \langle \phi_n | \hat{x}^2 | \phi_n \rangle - (\langle \phi_n | \hat{x} | \phi_n \rangle)^2$ 、 $\hat{p}$ の分散を $(\Delta p)^2 = \langle \phi_n | \hat{p}^2 | \phi_n \rangle - (\langle \phi_n | \hat{p} | \phi_n \rangle)^2$ とする。このとき、これらの平方根の積 $\Delta x \cdot \Delta p$ を求めよ。
4. 一次元調和振動子が、ある複素数パラメータ $\alpha = re^{i\theta}$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) を用いて表される次の重ね合わせ状態

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle = e^{-\frac{r^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(re^{i\theta})^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle \quad (4)$$

で与えられているとき、 $|\alpha\rangle$ が $\hat{a}$ の固有状態であることを確かめよ。また、 $|\alpha\rangle$ における $\hat{x}$ の期待値 $\langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle$ と $\hat{p}$ の期待値 $\langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle$ を求め、 r と θ の関数として表せ。

5. 一次元調和振動子の初期状態が、式(4)で定義された重ね合わせ状態 $|\alpha\rangle$ と実数 $r_0 \geq 0$ を用いて $|\psi(0)\rangle = |\alpha = r_0\rangle$ で与えられているとき、 $|\psi(t)\rangle$ を求めよ。また、 $\hat{x}$ と $\hat{p}$ を $\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}$ と $\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p}$ に従って変数変換し、 $|\psi(t)\rangle$ における $\hat{X}$ の期待値 $\langle\psi(t)|\hat{X}|\psi(t)\rangle$ と $\hat{P}$ の期待値 $\langle\psi(t)|\hat{P}|\psi(t)\rangle$ の時間発展の特徴を述べよ。

2013 年度 第 1 問 独立解答

調和振動子／生成消滅演算子／コヒーレント状態

設問 1 [解答] 問題で与えられた $\hat{a}$ の Hermite 共役は

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \quad (\mathcal{A}).$$

 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ より

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (\mathcal{I}), \quad \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (\mathcal{U}),$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (\mathcal{E}).$$

ここから、

$$\mathcal{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) \quad (\mathcal{O}), \quad E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (\mathcal{K}).$$

交換関係 $[\mathcal{H}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega\hat{a}^\dagger$ により

$$|\phi_{n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \hat{a}^\dagger |\phi_n\rangle \quad (\mathcal{K}), \quad E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \quad (\mathcal{K}).$$

[確認・補足] (キ) は設問の『正の実数』という位相規約に合わせている。

設問 2 [解答] 固有状態 $\mathcal{H}|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$ の定常時間発展は

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar} |\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) e^{-i\omega(n+1/2)t} |\phi_n\rangle.$$

したがって

$$c_n(t) = c_n(0) \exp[-i\omega(n + \frac{1}{2})t].$$

設問 3 [解答] 数状態について $\langle \hat{a} \rangle_n = \langle \hat{a}^\dagger \rangle_n = 0$ 、 $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_n = n$ 、 $\langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle_n = n + 1$ 。よって

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (2n + 1),$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{m\hbar\omega}{2} (2n + 1),$$

$$\Delta x \Delta p = \hbar(n + \frac{1}{2}).$$

 $n = 0$ のみ Heisenberg 不確定性関係の等号 $\Delta x \Delta p = \hbar/2$ が成立する（ここでは固有状態の範囲）。

設問 4 [解答] 問題のコヒーレント状態

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle, \quad \alpha = r e^{i\theta}$$

を $\hat{a}$ で作用すると、 $\hat{a}|\phi_n\rangle = \sqrt{n} |\phi_{n-1}\rangle$ より

$$\hat{a}|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}} |\phi_{n-1}\rangle = \boxed{\alpha|\alpha\rangle}.$$

したがって $\langle \hat{a} \rangle = \alpha$ 、 $\langle \hat{a}^\dagger \rangle = \alpha^*$ を使い

$$\langle \hat{x} \rangle_\alpha = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} r \cos \theta, \quad \langle \hat{p} \rangle_\alpha = \sqrt{2m\hbar\omega} r \sin \theta.$$

[確認・補足] $\hat{a}$ の定義の $+i\hat{p}$ と、 $\alpha = re^{i\theta}$ の規約を用いるため、 $\langle \hat{p} \rangle$ の符号は正である。

設問 5 [解答] 初期状態 $|\psi(0)\rangle = |r_0\rangle$ ($r_0 \geq 0$) に設問 2 を適用すると

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-r_0^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+1/2)t} |\phi_n\rangle \\ &= \boxed{e^{-i\omega t/2} |r_0 e^{-i\omega t}\rangle}. \end{aligned}$$

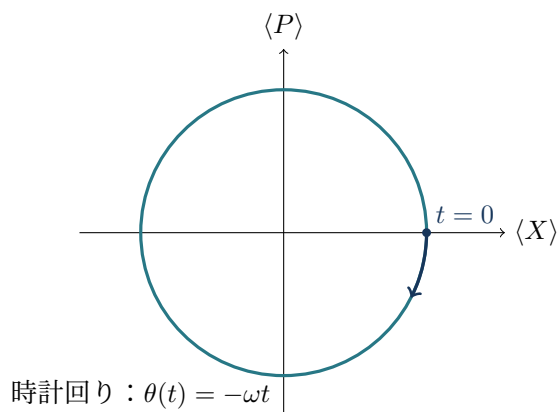
従って位相 $e^{-i\omega t/2}$ は期待値に影響しない。問題で定義された無次元変数

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x}, \quad \hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}}$$

について

$$\boxed{\langle \hat{X} \rangle_t = \sqrt{2} r_0 \cos(\omega t)}, \quad \boxed{\langle \hat{P} \rangle_t = -\sqrt{2} r_0 \sin(\omega t)}.$$

ゆえに $\langle X \rangle_t^2 + \langle P \rangle_t^2 = 2r_0^2$ 。 XP 平面では角振動数 ω で時計回りの円運動をする。これは古典的な調和振動子の位相空間軌道と一致する。



[確認・補足] コヒーレント状態の分散は $\Delta x^2 = \hbar/(2m\omega)$ 、 $\Delta p^2 = m\hbar\omega/2$ で時間に依存しない。波束の中心のみが古典軌道に従う。

検算メモ: $\langle X \rangle_t$ と $\langle P \rangle_t$ は $\langle \dot{X} \rangle = \omega \langle P \rangle$ および $\langle \dot{P} \rangle = -\omega \langle X \rangle$ を満たす。

量子力学 | 年度別問題

2012 年度

出題テーマ / 編集上の分類

スピンと磁気共鳴

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

磁場中での電子スピンの量子力学的運動について、以下の設問に答えよ。ここでは、ハミルトニアンとして磁場 $\mathbf{H}$ とスピン $\mathbf{S}$ の Zeeman 相互作用

$$\mathcal{H} = -\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{S} \quad (1)$$

を考える。ただし、 μ はある定数である。

1. スピン $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ の各成分は、軌道角運動量と同じ交換関係を満たす。位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と運動量 $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ の各成分間の交換関係 $[x, p_x] = i\hbar$ などを用いて、軌道角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ の成分 (L_x, L_y, L_z) の間の交換関係を求めよ。
ただし、 $\hbar = (\text{Planck 定数})/(2\pi)$ である。
2. 電子スピンの大きさは $1/2$ であるので、スピンの各成分を表わす演算子は 2×2 の行列で表現できる。ここで

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とするとき、 S_y を表す行列を求めよ。

ハミルトニアン (1) において、磁場 $\mathbf{H}$ の方向は x 軸に平行で $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$ の場合を考える。以下の設問 3~6 では $\hbar = 1$ とする。

3. ハミルトニアン (1) を行列表示し、その固有値 λ_j と固有ベクトル $|\lambda_j\rangle$, ($j = 1, 2$) を求めよ。(磁場の方向が x 軸に平行であることに注意)
4. ハミルトニアン (1) で表される系の時刻 t での状態ベクトルを $|\phi(t)\rangle$ とし、その時間発展を調べる。初期状態として、 $t = 0$ でスピンの z 方向を向いていたとする。つまり、この状態でのスピンの各成分の期待値は

$$\langle \phi(0) | S_x | \phi(0) \rangle = \langle \phi(0) | S_y | \phi(0) \rangle = 0, \quad \langle \phi(0) | S_z | \phi(0) \rangle = \frac{1}{2}$$

である。その後の状態ベクトル $|\phi(t)\rangle$ を t の関数として求めよ。また、時刻 t でのスピンの期待値 ($\langle \phi(t) | S_x | \phi(t) \rangle$, $\langle \phi(t) | S_y | \phi(t) \rangle$, $\langle \phi(t) | S_z | \phi(t) \rangle$) を求めよ。

次に、ハミルトニアン (1) において、磁場が回転磁場 $\mathbf{H} = (H_0 \cos \omega t, -H_0 \sin \omega t, H)$ で与えられる場合を考える。以下では、 $a \equiv \mu H$, $a_0 \equiv \mu H_0$ とおく。

5. ハミルトニアン (1) を

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{H}_1 = -aS_z, \quad \mathcal{H}_2 = -a_0(S_x \cos \omega t - S_y \sin \omega t)$$

と2つの部分に分けて考える。 $\mathcal{H}_1$ による運動を取り込んだ相互作用表示での状態ベクトル $|\psi(t)\rangle = e^{i\mathcal{H}_1 t} |\varphi(t)\rangle$ の時間発展を与える方程式を記せ。ただし、 $|\varphi(t)\rangle$ は、Schrödinger 表示での状態ベクトルである。

6. 特に、 $\omega = a$ の場合を考える。初期状態として $t = 0$ でスピンの z 方向を向いていた場合、その後のスピンの z 成分の期待値 $\langle \varphi(t) | S_z | \varphi(t) \rangle$ を求めよ。

2012 年度第 1 問 | 独立作成の詳解

スピンの交換関係 / Zeeman 分裂 / Rabi 振動と磁気共鳴

規約: $\mathcal{H} = -\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}$. 設問 3-6 では原題どおり $\hbar = 1$, $a = \mu H$, $a_0 = \mu H_0$ とする。 $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$.

設問 1 [解答] 軌道角運動量 $L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$ と正準交換関係 $[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$, $[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$ を用いる。例えば

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ &= [yp_z, zp_x] + [zp_y, xp_z] \quad (\text{ほかの項は } 0) \\ &= -i\hbar yp_x + i\hbar xp_y = i\hbar L_z. \end{aligned}$$

巡回置換で

$$[L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k.$$

[補足・検算] $[S_i, S_j]$ も同型だが、スピンは座標と運動量の外積によって定義する必要はない。

設問 2 [解答] $S_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_x$, $S_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z$ とし $[S_z, S_x] = i\hbar S_y$ を課す。 $[\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y$ より

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

設問 3 [解答] 磁場 $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$ に対し

$$\mathcal{H} = -a S_x = -\frac{a}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

x 方向に量子化された状態を $|+x\rangle = (1, 1)^T / \sqrt{2}$, $|-x\rangle = (1, -1)^T / \sqrt{2}$ とすれば

$$\mathcal{H}|+x\rangle = -\frac{a}{2}|+x\rangle, \quad \mathcal{H}|-x\rangle = \frac{a}{2}|-x\rangle.$$

a の符号が負ならエネルギーの高低は逆転する。

設問 4 [解答] 初期スピンの z 方向の正方向だから $|\varphi(0)\rangle = |\uparrow\rangle = (1, 0)^T$ 。

$$\begin{aligned} |\varphi(t)\rangle &= e^{-i\mathcal{H}t} |\uparrow\rangle = e^{iat\sigma_x/2} |\uparrow\rangle \\ &= \left[\cos \frac{at}{2} I + i\sigma_x \sin \frac{at}{2} \right] |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos(at/2) \\ i \sin(at/2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

σ_i の期待値を計算すると

$$\langle S_x \rangle_t = 0, \quad \langle S_y \rangle_t = \frac{1}{2} \sin(at), \quad \langle S_z \rangle_t = \frac{1}{2} \cos(at).$$

したがってスピンは yz 平面で角速度 a の歳差運動をする (a の符号で向きが変わる)。

設問 5 [解答] 原題に従い相互作用表示の状態を $|\psi(t)\rangle = e^{i\mathcal{H}_1 t} |\varphi(t)\rangle$ と定義する。Schrödinger 方程式 $i\partial_t |\varphi\rangle = (\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) |\varphi\rangle$ の微分から

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \mathcal{H}_I(t) |\psi(t)\rangle, \quad \mathcal{H}_I(t) = e^{i\mathcal{H}_1 t} \mathcal{H}_2(t) e^{-i\mathcal{H}_1 t}.$$

$\mathcal{H}_1 = -aS_z$ 、 $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$ 、 $e^{i\mathcal{H}_1 t} S_{\pm} e^{-i\mathcal{H}_1 t} = e^{\mp iat} S_{\pm}$ を用いると

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I(t) &= -\frac{a_0}{2} \left(e^{i(\omega-a)t} S_+ + e^{-i(\omega-a)t} S_- \right) \\ &= -a_0 \{ S_x \cos[(\omega-a)t] - S_y \sin[(\omega-a)t] \}. \end{aligned}$$

[補足・検算] $|\psi\rangle$ が相互作用表示、 $|\varphi\rangle$ が Schrödinger 表示。両者を逆に取り違えると共鳴条件の符号を誤る。

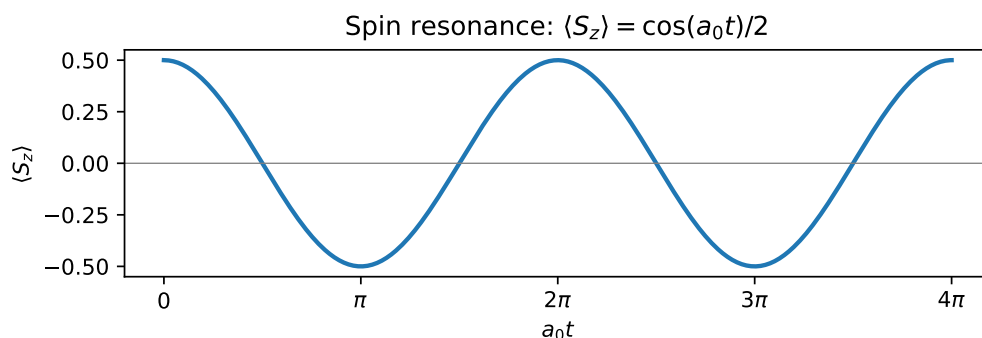
設問 6 [解答] 共鳴 $\omega = a$ では $\mathcal{H}_I = -a_0 S_x$ が一定になり、

$$|\psi(t)\rangle = e^{ia_0 t S_x} |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos(a_0 t/2) \\ i \sin(a_0 t/2) \end{pmatrix}.$$

S_z は $\mathcal{H}_1$ と可換なので両表示で期待値は等しい。よって

$$\langle \varphi(t) | S_z | \varphi(t) \rangle = \frac{1}{2} \cos(a_0 t).$$

スピンの反転確率は $P_{\downarrow}(t) = \sin^2(a_0 t/2)$ 。 $a_0 \neq 0$ のとき、時間 $\pi/|a_0|$ に完全反転する。



独立検算： $a = 1.2$, $a_0 = 0.8$, $t = 0.54$ の場合、直接 2×2 行列指数を計算すると $\langle S_z \rangle = 0.4540650953$ 、 $\cos(a_0 t)/2 = 0.4540650953$ に一致する。

量子力学 | 年度別問題

2011 年度

出題テーマ / 編集上の分類

分離型ポテンシャル

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

質量 m の粒子に対する三次元のシュレーディンガー方程式

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \hat{V}\right)|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

について、以下の設問に答えよ。この問題では、自然単位系を用いて $\hbar = 1$ とし、積分領域は三次元空間の全領域とする。

1. 状態 $|\psi\rangle$ および演算子 $\hat{O}$ について、それらの座標表示と運動量表示の間に、次の関係が成り立つことを示せ。ただし、 $\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$ を用いてよい。

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p} | \psi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \langle \mathbf{x} | \psi \rangle \\ \langle \mathbf{p} | \hat{O} | \mathbf{p}' \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d^3x d^3x' e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}'} \langle \mathbf{x} | \hat{O} | \mathbf{x}' \rangle\end{aligned}$$

座標表示でのポテンシャル $\hat{V}$ が、ある実関数 $g(\mathbf{x})$ を用いて、 $\langle \mathbf{x} | \hat{V} | \mathbf{x}' \rangle = -\frac{\lambda}{2m} g(\mathbf{x})g(\mathbf{x}')$ ($\lambda > 0$) と表されるとき、 $\hat{V}$ は分離型ポテンシャルと呼ばれる。以下では、分離型ポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式を、運動量表示で解くことを考える。

2. 運動量表示でのシュレーディンガー方程式

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \langle \mathbf{p} | \psi \rangle + \int d^3p' \langle \mathbf{p} | \hat{V} | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \psi \rangle = E \langle \mathbf{p} | \psi \rangle$$

においても、ポテンシャルが運動量の関数 $h(\mathbf{p})$ を用いて分離型

$$\langle \mathbf{p} | \hat{V} | \mathbf{p}' \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\lambda}{2m} h(\mathbf{p})h(-\mathbf{p}')$$

となることを示せ。

3. $E = -\frac{\nu^2}{2m}$ の束縛状態が存在するとき、運動量表示での束縛状態の波動関数が

$$\langle \mathbf{p} | \psi \rangle = C \frac{h(\mathbf{p})}{\mathbf{p}^2 + \nu^2} \quad (C \text{ は定数})$$

となることを示せ。

4. 関数 $g(\mathbf{x})$ が次の式で与えられるとする。

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\exp(-\mu|\mathbf{x}|)}{4\pi|\mathbf{x}|} \quad (\mu > 0)$$

このとき、設問2の $h(\mathbf{p})$ は

$$h(\mathbf{p}) = \frac{1}{\mathbf{p}^2 + \mu^2}$$

となることを計算の詳細も記して示せ。

5. 設問4で与えられた $h(\mathbf{p})$ の場合に、 $|\nu|$ を λ と μ を用いて表し、束縛状態が存在するために λ が満たすべき条件を求めよ。必要なら、次の公式を用いてもよい。

$$\int d^3p \frac{1}{(\mathbf{p}^2 + \nu^2)(\mathbf{p}^2 + \mu^2)^2} = \frac{\pi^2}{|\mu|(|\mu| + |\nu|)^2}$$

6. 設問4で与えられた $h(\mathbf{p})$ の場合に、座標表示での束縛状態の波動関数 $\langle \mathbf{x} | \psi \rangle$ を求めよ。ただし、規格化はしなくてもよい。また、その概略を図示せよ。

2011 年度第 1 問 | 独立作成の詳解

Fourier 変換/分離型ポテンシャル/ Yukawa 核/束縛状態の閾値

規約: 原題どおり $\hbar = 1$ 、三次元全空間で $\langle x|p\rangle = (2\pi)^{-3/2}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$. $\mu, \lambda > 0$. 核 g は実関数であり、設問 4 以降では $g(r) = e^{-\mu r}/(4\pi r)$ を用いる。結合定数 λ と束縛運動量 ν を混同しない。

設問 1 [解答] 完全性 $I = \int d^3x |x\rangle\langle x|$ を挿入すると

$$\langle p|\psi\rangle = (2\pi)^{-3/2} \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \langle x|\psi\rangle.$$

同様に $\hat{O}$ の両側へ完全性を挿入すると

$$\langle p|\hat{O}|p'\rangle = (2\pi)^{-3} \int d^3x d^3x' e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}'} \langle x|\hat{O}|x'\rangle.$$

これらは原題で指定された Fourier 規約に依存する。

設問 2 [解答] 座標表示の分離型ポテンシャル

$$\langle x|\hat{V}|x'\rangle = -\frac{\lambda}{2m}g(\mathbf{x})g(\mathbf{x}')$$

を設問 1 に代入する。 $h(\mathbf{p}) = \int e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}g(\mathbf{x})d^3x$ と定義すれば

$$\begin{aligned} \langle p|\hat{V}|p'\rangle &= -\frac{\lambda}{(2\pi)^3 2m} \left(\int e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}g(\mathbf{x})d^3x \right) \left(\int e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}'}g(\mathbf{x}')d^3x' \right) \\ &= \boxed{-\frac{\lambda}{(2\pi)^3 2m} h(\mathbf{p})h(-\mathbf{p}')}. \end{aligned}$$

g が実なら $h(-\mathbf{p}) = h(\mathbf{p})^*$ であり、ポテンシャル核の Hermite 性が従う。

設問 3 [解答] $E = -\nu^2/(2m)$ ($\nu > 0$) での運動量表示は

$$(p^2 + \nu^2)\psi(\mathbf{p}) = \frac{\lambda}{(2\pi)^3} h(\mathbf{p}) \int d^3p' h(-\mathbf{p}')\psi(\mathbf{p}').$$

右辺の積分は $\mathbf{p}$ に依存しない。非零の束縛状態ではその係数を C と置けるから

$$\psi(\mathbf{p}) = C \frac{h(\mathbf{p})}{p^2 + \nu^2}.$$

$C = 0$ なら $\nu > 0$ に対し波動関数は恒等的に 0 なので、非自明解には $C \neq 0$ が必要である。

設問 4 [解答] Yukawa 核 $g(r) = e^{-\mu r}/(4\pi r)$ は球対称である。極座標の角度積分 $\int d\Omega e^{-ipr \cos \theta} = 4\pi \sin(pr)/(pr)$ より

$$\begin{aligned} h(p) &= \int_0^\infty dr r^2 \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r} \cdot 4\pi \frac{\sin(pr)}{pr} \\ &= \frac{1}{p} \int_0^\infty dr e^{-\mu r} \sin(pr) = \boxed{\frac{1}{p^2 + \mu^2}}. \end{aligned}$$

最後は $\mu > 0$ の指数積分による。 $p = 0$ でも連続的に $h(0) = \mu^{-2}$ となる。

設問 5 [解答] 設問 3 の形を再び積分方程式へ代入すると、非零 C の必要十分条件は

$$1 = \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(p^2 + \nu^2)(p^2 + \mu^2)^2}.$$

原題の積分公式から ($\mu, \nu > 0$)

$$1 = \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \frac{\pi^2}{\mu(\mu+\nu)^2} = \frac{\lambda}{8\pi\mu(\mu+\nu)^2}.$$

ゆえに

$$\boxed{\nu = \sqrt{\frac{\lambda}{8\pi\mu}} - \mu, \quad E = -\frac{1}{2m} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{8\pi\mu}} - \mu \right)^2.}$$

$\nu > 0$ が要求されるので束縛状態の存在条件は

$$\boxed{\lambda > 8\pi\mu^3.}$$

等号 $\lambda = 8\pi\mu^3$ は $\nu = 0$ の閾値であり、 $\psi(r) \sim 1/r$ が無限遠で二乗可積分でない。従って等号は負エネルギーの正規化可能な束縛状態には含めない。

設問 6 [解答] 設問 3・4 より

$$\psi(\mathbf{p}) = \frac{C}{(p^2 + \nu^2)(p^2 + \mu^2)}.$$

部分分数分解と、 $\int d^3p e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}/(p^2 + s^2) = 2\pi^2 e^{-sr}/r$ を使えば

$$\psi(\mathbf{r}) \propto \frac{e^{-\nu r} - e^{-\mu r}}{(\mu^2 - \nu^2)r}, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

位相を実正に選び、規格化を含めると $\mu \neq \nu$ では

$$\boxed{\psi(r) = \sqrt{\frac{\mu\nu(\mu+\nu)}{2\pi}} \frac{e^{-\nu r} - e^{-\mu r}}{(\mu - \nu)r}.$$

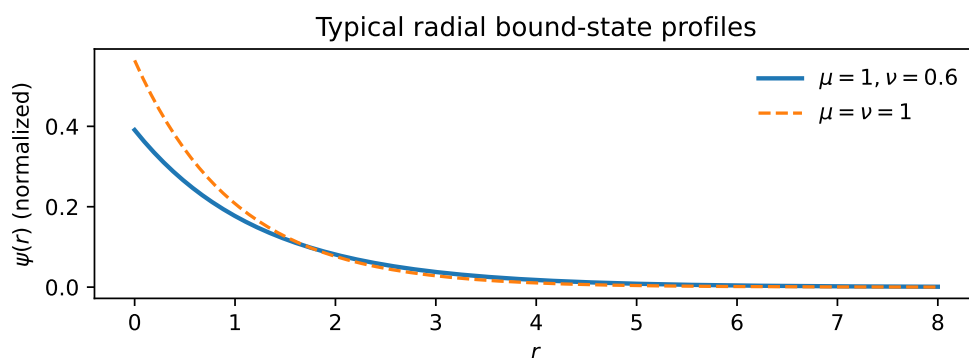
実際、 $\int |\psi|^2 d^3x = 4\pi A^2 \int_0^\infty (e^{-\nu r} - e^{-\mu r})^2 dr / (\mu - \nu)^2 = 1$ 。 $r \rightarrow 0$ では

$$\psi(0) = \sqrt{\frac{\mu\nu(\mu+\nu)}{2\pi}}$$

と有限である。 $\mu = \nu$ は上式の連続極限で

$$\boxed{\psi(r) = \frac{\mu^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu r} \quad (\mu = \nu).$$

$\nu > 0$ なら無限遠で指数的に減少し、正規化可能な球対称 s 波束縛状態となる。



概形：上図は $\mu = 1, \nu = 0.6$ と極限 $\mu = \nu = 1$ の例。どちらも原点で有限、無限遠で指数減衰する。図は物理定数の指定がないため、代表パラメータで描いた。

独立数値検算： $\mu = 1.1, \nu = 0.7$ に対して、核の 3 次元動径積分は 2.76924927078826、解析式 $\pi^2/[\mu(\mu+\nu)^2]$ と一致する。また上記の座標表示波動関数は数値積分で規格化 0.9999999999985 を与える。

量子力学 | 年度別問題

2010

年度

出題テーマ / 編集上の分類

無限深井戸と中央デルタ障壁

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

ポテンシャル

$$V_0(x) = \begin{cases} \infty & (x \leq -L) \\ 0 & (-L < x < L) \\ \infty & (x \geq L) \end{cases}$$

に閉じ込められている質量 m の粒子の1次元運動を考える。このとき、次の設問に答えよ。答えだけでなく、途中の考え方も述べよ。

1. この粒子のすべてのエネルギー固有値と、それらに対応する1に規格化された波動関数を求めよ。
2. 設問1で求めたエネルギー固有値の最小値がゼロでない値をとる物理的理由を説明せよ。

次に、 $V_0(x)$ にデルタ関数型のポテンシャルを加えたポテンシャル $V_0(x) + V_1\delta(x)$ 中の粒子に関して以下の設問に答えよ。ただし、 $V_1 > 0$ とする。

3. 基底状態のエネルギーを V_1 の1次まで求めよ。
4. 第1励起状態のエネルギーを求めよ。
5. 基底状態と第1励起状態の波動関数の概略をそれぞれ図示せよ。
6. V_1 をゼロから無限大まで増加させるとき、基底状態と第1励起状態のエネルギーが V_1 の関数としてどのように変化するかの概略を図示せよ。

2010 年度・第 1 問 完全解答

設定： $|x| < L$ における $V_0(x) = 0$ 、 $|x| \geq L$ では無限大とする。後半では $V_1\delta(x)$ ($V_1 > 0$) を加える。

1. 固有値と規格化固有関数

無限壁により $\psi(\pm L) = 0$ である。内部の定常 Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = E\psi(x).$$

$E > 0$ として $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ をおくと、 $x = -L$ を原点にずらして

$$\psi(x) = C \sin k(x + L) \quad (-L < x < L).$$

もう一方の境界条件 $\sin 2kL = 0$ より $k_n = n\pi/(2L)$ ($n = 1, 2, \dots$)。

$$E_n^{(0)} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8mL^2}, \quad \psi_n^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi(x+L)}{2L}\right) \quad (|x| < L).$$

外側は $\psi_n^{(0)} = 0$ 。固有関数の全体位相は任意である。

$\int_{-L}^L \sin^2[k_n(x+L)]dx = L$ を使って $C = L^{-1/2}$ と規格化した。偶数 n は奇関数、奇数 n は偶関数（全体符号は任意）。

2. 最小エネルギーが 0 にならない理由

$E = 0$ なら $\psi'' = 0$ で $\psi = ax + b$ 。 $\psi(\pm L) = 0$ を同時に課すと $a = b = 0$ となり、非自明な固有関数が存在しない。一般に

$$E\|\psi\|^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-L}^L |\psi'|^2 dx > 0$$

は境界で消える非零の波動関数に対して成り立つ。これは閉じ込めによる有限の運動量幅にも対応する。

3. 基底状態の 1 次エネルギー補正

$\psi_1^{(0)}(x) = L^{-1/2} \cos(\pi x/2L)$ と選ぶと、摂動論より

$$\Delta E_g^{(1)} = \langle \psi_1^{(0)} | V_1 \delta(x) | \psi_1^{(0)} \rangle = V_1 |\psi_1^{(0)}(0)|^2 = \frac{V_1}{L}.$$

4. 第 1 励起状態のエネルギー

元の第 1 励起状態は $\psi_2^{(0)}(x) = \sin(\pi x/L)/\sqrt{L}$ と選べる。奇関数であり $\psi_2^{(0)}(0) = 0$ なので、デルタ障壁の項はこれを全く変化させない。

$$E_{\text{first excited}}(V_1) = E_2^{(0)} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

これは 1 次摂動の結果にとどまらず、任意の $V_1 \geq 0$ で厳密である。

5. 波動関数の概形

基底状態は偶関数、非負、両端で 0 であり、 $V_1 > 0$ なら原点に尖った谷（微分の不連続）を持つ。第 1 励起状態は奇関数で原点に節を持ち、左右に反対符号の山がある。次ページに規格化波形の比較を示す。

6. 障壁強度依存性：厳密な方程式と極限

偶パリティで最も低い状態を

$$\psi_g(x) = A \sin[k(L - |x|)] \quad (|x| < L)$$

とおく。デルタポテンシャルを原点近傍で積分すると

$$\psi'_g(0^+) - \psi'_g(0^-) = \frac{2mV_1}{\hbar^2} \psi_g(0).$$

このとき $\psi'_g(0^+) = -Ak \cos(kL)$ 、 $\psi'_g(0^-) = Ak \cos(kL)$ なので

$$k \cot(kL) = -\frac{mV_1}{\hbar^2}.$$

$z = kL$, $\gamma = mV_1 L / \hbar^2$ を導入すると、基底解は $\pi/2 \leq z < \pi$ の一意な根 $z \cot z = -\gamma$ で与えられる。

$$E_g(V_1) = \frac{\hbar^2 z(\gamma)^2}{2mL^2}, \quad E_{\text{first excited}} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

$V_1 \rightarrow 0$ では $z \rightarrow \pi/2$ 、 $V_1 \rightarrow \infty$ では $z \rightarrow \pi^-$ 。よって E_g は $E_1^{(0)}$ から $E_2^{(0)}$ へ単調上昇し、任意の有限 V_1 で $E_g < E_2^{(0)}$ を満たす。

正規化係数は

$$A = \left(L - \frac{\sin(2kL)}{2k} \right)^{-1/2}.$$

また $\gamma \ll 1$ で $z = \pi/2 + 2\gamma/\pi + O(\gamma^2)$ 、したがって $E_g = E_1^{(0)} + V_1/L + O(V_1^2)$ 。 $\gamma \gg 1$ では $z = \pi - \pi/(\gamma + 1) + O(\gamma^{-3})$ 。

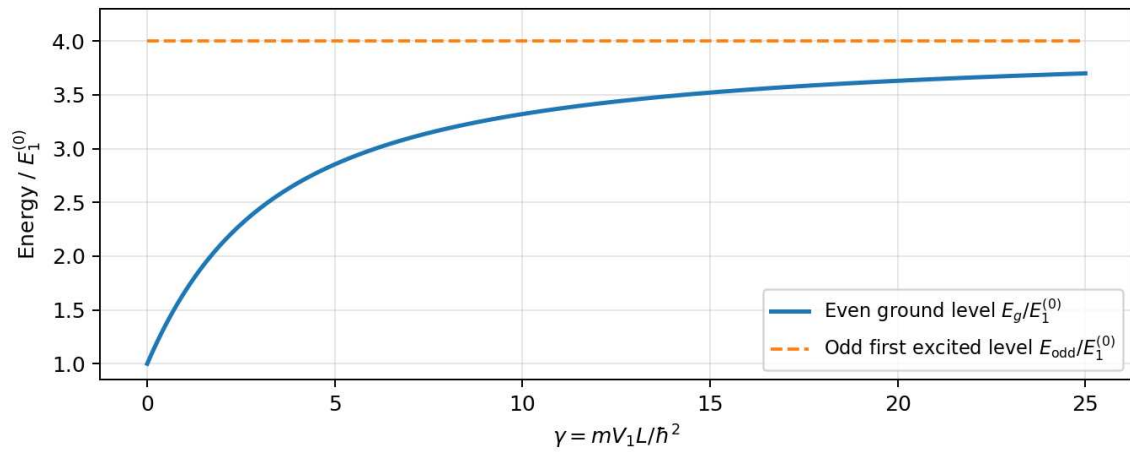


Figure 1: 無次元障壁強度 γ に対する基底準位と第 1 励起準位（分散方程式の数値根）。

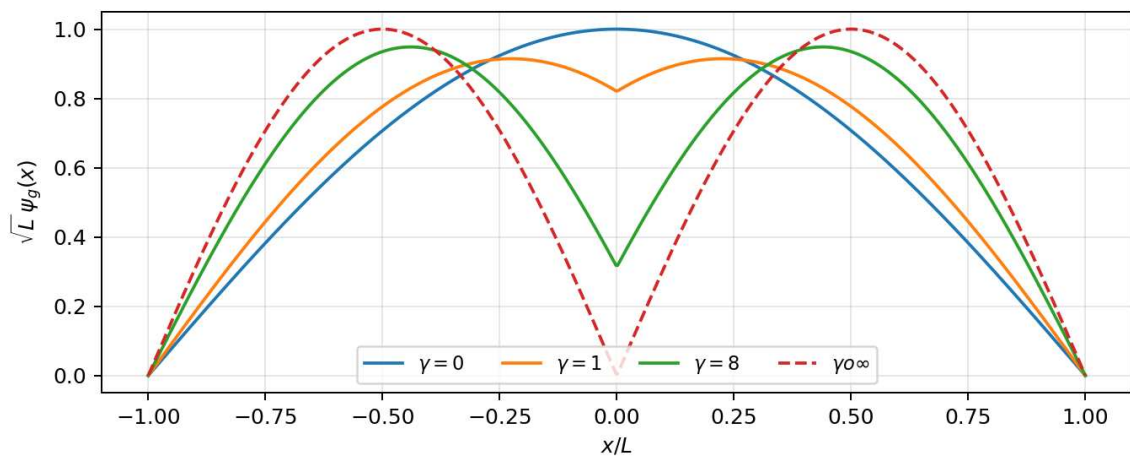


Figure 2: 基底状態の無次元波動関数。 $\gamma \rightarrow \infty$ では左右の半井戸に局在した偶関数へ近づく。

量子力学 | 年度別問題

2009年度

出題テーマ / 編集上の分類

スピン1/2と量子相関

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

スピン角運動量について考える。 x, y, z 方向のスピン角運動量演算子をそれぞれ s_x, s_y, s_z とすると、これらは交換関係 $[s_x, s_y] = i\hbar s_z, [s_y, s_z] = i\hbar s_x, [s_z, s_x] = i\hbar s_y$ を満たす。ただし $\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数) である。以下の設問に答えよ。

1. 一般に、自己共役演算子 P, Q が交換関係 $[P, Q] = iR$ を満たすとき、

(i) $P^\dagger = P, Q^\dagger = Q$ より、演算子 R も自己共役 ($R^\dagger = R$) であることを示せ。

($X^\dagger$ は X の共役演算子を表す。)

(ii) 任意の状態 $|\psi\rangle$ に対し、 $\Delta P \equiv P - \langle\psi|P|\psi\rangle, \Delta Q \equiv Q - \langle\psi|Q|\psi\rangle$ と置くと、 $[\Delta P, \Delta Q] = iR$ を示せ。

(iii) 任意の状態 $|\psi\rangle$ に対し、不確定性関係

$$\langle\psi|(\Delta P)^2|\psi\rangle\langle\psi|(\Delta Q)^2|\psi\rangle \geq \frac{1}{4}\langle\psi|R|\psi\rangle^2 \quad (1)$$

が成り立つことを示せ。

(ヒント：実数 x に対して $(\Delta P + ix\Delta Q)|\psi\rangle$ という状態を考えてみよ。)

次に、スピン $1/2$ の 1 粒子状態を考える。この場合のスピン自由度は 2 次元のベクトル空間で表される。 z 軸方向のスピン固有状態を $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ で表すと、それらは

$$s_z|\uparrow\rangle = +\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle, \quad s_z|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle, \quad \langle\uparrow|\uparrow\rangle = \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1, \quad \langle\uparrow|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|\uparrow\rangle = 0$$

を満たす。このとき、 $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とベクトル表示すると、スピン角運動量演算子はパウリ行列を用いて

$$\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z) = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表される。以下の設問に答えよ。

2. 一般に、 $\mathbf{n}$ 方向 ($\mathbf{n}$ は 3 次元空間での単位ベクトル) のスピン角運動量を表す演算子は $s(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{s}$ と与えられる。 $\mathbf{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$ 方向のスピン $s(\mathbf{n})$ に対する固有値と固有状態を求め、 $\xi|\uparrow\rangle + \eta|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ の形で表せ。

3. 設問 2 で求めた固有状態それぞれに対し、 z 方向のスピン角運動量の期待値を求めよ。

4. 状態 $|\psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し、非可換な P, Q の例を一つ挙げて、設問 1 (iii) の式 (1) が成り立っていることを確認せよ。

次に、スピン $1/2$ の粒子 A, B からなる 2 粒子状態を考える。粒子 A の $\mathbf{a}$ 方向のスピン角運動量を表す演算子を $s_A(\mathbf{a})$ とし、 z 軸方向のスピン角運動量の固有状態を $|\uparrow\rangle_A, |\downarrow\rangle_A$ で表すとする。すなわち $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ に対して

$$s_A(\mathbf{e}_z)|\uparrow\rangle_A = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle_A, \quad s_A(\mathbf{e}_z)|\downarrow\rangle_A = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle_A$$

である。同様に粒子 B の $\mathbf{b}$ 方向のスピン角運動量を表す演算子を $s_B(\mathbf{b})$ とし、 z 軸方向のスピン角運動量の固有状態を $|\uparrow\rangle_B, |\downarrow\rangle_B$ で表すとする。2 粒子状態を表す基底として、これらの 2 つの 1 粒子状態の直積

$$|u, v\rangle \equiv |u\rangle_A \otimes |v\rangle_B, \quad u, v = \uparrow \text{ または } \downarrow$$

を用いる。以下の設問に答えよ。ただし以下では、2 粒子状態に作用する演算子として $s_A(\mathbf{a}) \otimes I_B$, $I_A \otimes s_B(\mathbf{b})$ をそれぞれ単に $s_A(\mathbf{a})$, $s_B(\mathbf{b})$ と書くことにする。ここで、 I_A , I_B はそれぞれ粒子 A、粒子 B の 1 粒子状態に作用する恒等演算子である。

5. $\mathbf{a} = (\sin \theta_a, 0, \cos \theta_a)$, $\mathbf{b} = (\sin \theta_b, 0, \cos \theta_b)$ としたとき、 $s_A(\mathbf{a}) + s_B(\mathbf{b})$ の期待値を最大にする状態を $|\uparrow, \uparrow\rangle$, $|\uparrow, \downarrow\rangle$, $|\downarrow, \uparrow\rangle$, $|\downarrow, \downarrow\rangle$ の線形結合で表せ。
6. 状態 $|\psi\rangle$ に対して観測される 2 つのスピンの相関は $\langle \psi | s_A(\mathbf{a}) s_B(\mathbf{b}) | \psi \rangle$ で与えられる。

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle)$$

という重ね合わせの状態に対して $\mathbf{a} = (\sin \theta_a, 0, \cos \theta_a)$, $\mathbf{b} = (\sin \theta_b, 0, \cos \theta_b)$ としたときの相関 $\langle \psi | s_A(\mathbf{a}) s_B(\mathbf{b}) | \psi \rangle$ を求めよ。

2009 年度・第 1 問 完全解答

設定： P, Q は自己共役で $[P, Q] = iR$ 。続いて $\mathbf{s} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ のスピン 1/2 および二粒子系を扱う。

1. 演算子の自己共役性と不確定性関係

(i) R の自己共役性 $[P, Q]^\dagger = QP - PQ = -[P, Q]$ より

$$-iR^\dagger = -iR \Rightarrow \boxed{R^\dagger = R}.$$

厳密には、無限次元の非有界演算子では共通の定義域を仮定する。院試の形式的議論はこの前提の下で理解する。(ii) 平均を引いても交換子は同じ $\Delta P = P - \langle P \rangle I, \Delta Q = Q - \langle Q \rangle I$ であり、単位行列は全演算子と可換なので

$$\boxed{[\Delta P, \Delta Q] = [P, Q] = iR}.$$

(iii) Robertson 型の不確定性関係 任意の実数 t についてノルムの非負性を使う：

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|(\Delta P + it\Delta Q)|\psi\rangle\|^2 \\ &= \langle(\Delta P)^2\rangle + t^2\langle(\Delta Q)^2\rangle + it\langle[\Delta P, \Delta Q]\rangle \\ &= (\delta P)^2 + t^2(\delta Q)^2 - t\langle R \rangle. \end{aligned}$$

t に関する 2 次式が常に非負であるため、判別式は 0 以下となる。

$$\boxed{\langle(\Delta P)^2\rangle\langle(\Delta Q)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle R \rangle|^2.}$$

等号は、適当な実数 t で $(\Delta P + it\Delta Q)|\psi\rangle = 0$ となるとき成立し得る。

2. 方向 $\mathbf{n}$ のスピン固有値と固有状態

$\mathbf{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$ より

$$s(\mathbf{n}) = \frac{\hbar}{2}(\sin\theta\sigma_x + \cos\theta\sigma_z) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

これは二乗が $\hbar^2 I/4$ なので固有値は $\pm\hbar/2$ 。 $c = \cos(\theta/2)$, $s = \sin(\theta/2)$ とすると

$$\boxed{|+\mathbf{n}\rangle = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad |-\mathbf{n}\rangle = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}, \quad s(\mathbf{n})|\pm\mathbf{n}\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\mathbf{n}\rangle.}$$

角度 θ による位相・符号の違いは固有ベクトルの任意位相に吸収できる。

3. s_z の期待値

$\sigma_z = \text{diag}(1, -1)$ より上の状態で内積を計算して

$$\boxed{\langle+\mathbf{n}|s_z|+\mathbf{n}\rangle = \frac{\hbar}{2}\cos\theta, \quad \langle-\mathbf{n}|s_z|-\mathbf{n}\rangle = -\frac{\hbar}{2}\cos\theta.}$$

4. 不確定性関係が等号になる具体例

$|\psi\rangle = (\sqrt{3}/2, 1/2)^T$ (規格化済み) に対し $P = s_x, Q = s_y$ を選ぶ。 $[s_x, s_y] = i\hbar s_z$ なので $R = \hbar s_z$ 。

$$\begin{aligned}\langle s_x \rangle &= \frac{\sqrt{3}\hbar}{4}, & \langle s_y \rangle &= 0, & \langle s_z \rangle &= \frac{\hbar}{4}, \\ (\delta s_x)^2 &= \frac{\hbar^2}{4} - \frac{3\hbar^2}{16} = \frac{\hbar^2}{16}, & (\delta s_y)^2 &= \frac{\hbar^2}{4}.\end{aligned}$$

したがって

$$(\delta s_x)^2 (\delta s_y)^2 = \frac{\hbar^4}{64} = \frac{1}{4} |\langle \hbar s_z \rangle|^2.$$

不確定性関係は等号で成立する (一般には不等号)。

5. 二粒子の合計スピン期待値が最大の状態

$s_A(\mathbf{a})$ と $s_B(\mathbf{b})$ は別のテンソル因子に作用するので可換。各演算子の固有値は $\pm\hbar/2$ で、和の最大固有値は $\hbar$ である。よって両粒子が各方向の + 固有状態にある積状態が求める状態。

$$c_a = \cos \frac{\theta_a}{2}, \quad s_a = \sin \frac{\theta_a}{2}, \quad c_b = \cos \frac{\theta_b}{2}, \quad s_b = \sin \frac{\theta_b}{2}.$$

$$|\Psi_{\max}\rangle = c_a c_b |\uparrow\uparrow\rangle + c_a s_b |\uparrow\downarrow\rangle + s_a c_b |\downarrow\uparrow\rangle + s_a s_b |\downarrow\downarrow\rangle.$$

$$\langle \Psi_{\max} | s_A(\mathbf{a}) + s_B(\mathbf{b}) | \Psi_{\max} \rangle = \hbar.$$

6. 一重項状態の相関関数

与えられた状態は $|\Psi_{-}\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ 。この状態で

$$\langle \sigma_{Ai} \sigma_{Bj} \rangle = -\delta_{ij} \quad (i, j = x, y, z)$$

を確認する。例えば z 成分の積は両基底状態を -1 倍し、 x 成分の積は両者を交換するため、一重項上ではどちらも期待値 -1 。交差項は 0 となる。

$$\begin{aligned}\langle s_A(\mathbf{a}) s_B(\mathbf{b}) \rangle &= \frac{\hbar^2}{4} \sum_{i,j} a_i b_j \langle \sigma_{Ai} \sigma_{Bj} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ &= -\frac{\hbar^2}{4} (\sin \theta_a \sin \theta_b + \cos \theta_a \cos \theta_b).\end{aligned}$$

$$\langle \Psi_{-} | s_A(\mathbf{a}) s_B(\mathbf{b}) | \Psi_{-} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \cos(\theta_a - \theta_b).$$

同じ方向 ($\theta_a = \theta_b$) なら完全反相関 $-\hbar^2/4$ 、直交方向なら相関 0 である。これは単なる確率独立な二つのスピンではなく、量子もつれ状態の特徴である。

総合チェック・再計算のポイント

1. 2010 年：デルタ障壁の係数 V_1 はエネルギー $\times$ 長さの次元を持つ。 $V_1\delta(x)$ の単位がエネルギーであることを確認する。
2. 2010 年： $\gamma = 0$ なら $z = \pi/2$ で $E_g = E_1^{(0)}$ 、 $\gamma \rightarrow \infty$ なら $z \rightarrow \pi$ で $E_g \rightarrow E_2^{(0)}$ になる。
3. 2010 年： $\psi_{\text{odd}}(0) = 0$ のため奇パリティの準位は障壁の影響を全く受けない。有限 V_1 では $E_g < E_{\text{first excited}}$ 。
4. 2009 年：演算子の分散 $(\delta P)^2 = \langle (\Delta P)^2 \rangle$ と、演算子自体の ΔP を混同しない。
5. 2009 年： $s_i = \hbar\sigma_i/2$ の係数を落とさない。相関関数の単位は $\hbar^2$ である。
6. 2009 年： $\theta_a = \theta_b$ の一重項相関は $-\hbar^2/4$ 、 $\theta_a - \theta_b = \pi/2$ なら 0 であり、符号の検算になる。

資料について：本書は提供された東大理物の平成 22 年度・平成 21 年度入試冊子の第 1 問（量子力学）だけを対象にした独立解説である。計算の一部を数値検証したが、公式採点基準・模範解答との一致や第三者査読は保証しない。

量子力学 | 年度別問題

2008年度

出題テーマ / 編集上の分類

2次元等方調和振動子

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

ハミルトニアンが

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left(\frac{p_k^2}{m} + m\omega^2 x_k^2 \right)$$

で与えられる2次元調和振動子の量子力学を考える。ここで x_k は座標で p_k はその正準運動量、 m は質量、 $\hbar = h/2\pi$ (h はプランク定数)、 ω は角振動数である。正準交換関係は

$$[x_k, p_l] = i\hbar\delta_{kl}, \quad [x_k, x_l] = [p_k, p_l] = 0, \quad (k, l = 1, 2)$$

である。このとき以下の設問に答えよ。

1. 生成消滅演算子

$$a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} x_k - i \frac{1}{\sqrt{m\omega}} p_k \right), \quad a_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} x_k + i \frac{1}{\sqrt{m\omega}} p_k \right), \quad (k = 1, 2)$$

がみたす交換関係を、 x_k, p_k の交換関係から導け。また、ハミルトニアン $\mathcal{H}$ を生成消滅演算子を用いて表せ。

2. 基底状態 $|0\rangle$ は、消滅演算子を用いた条件

$$a_k|0\rangle = 0, \quad (k = 1, 2)$$

により定義される。この定義式を、座標 x_k を変数とする微分方程式に書き換え、対応する基底状態の波動関数 $\psi_0(r)$ を $r (= \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$ の関数として求めよ。ただし、規格化因子を定める必要はない。

3. ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の全ての固有状態を基底状態 $|0\rangle$ と生成演算子で書き表し、それらの固有値を求めよ。また、各固有値に対する縮退度を求めよ。

次に2次元の極座標 $r, \theta (= \tan^{-1}(x_2/x_1))$ を用いた解析を行う。以下の設問では簡単のため $\hbar = m = \omega = 1$ とおく。必要であれば、2次元のラプラシアン の極座標表示

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$$

を用いてよい。

4. 波動関数を $\psi = R(r)\Theta(\theta)$ と変数分離し、シュレディンガー方程式に代入する。 θ 方向の方程式を解くと、 $R(r)$ に関する微分方程式は

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(2E - r^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0$$

となることを導け。ここで E はハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有値を表す。また、 n は角度方向の量子数であるが、それがどのような値をとるべきか、理由とともに述べよ。

5. 設問 2 で求めた ψ_0 を用いて $R(r) = f(r)\psi_0(r)$ と書き換えると、 $f(r)$ に対する微分方程式は

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}(1 - 2r^2)\frac{df}{dr} + \left(2E - 2 - \frac{n^2}{r^2}\right)f = 0$$

となる。 $f(r)$ を

$$f(r) = r^\alpha \sum_{s=0}^{\infty} f_s r^s, \quad (f_0 = 1)$$

のようにべき級数展開するとき、 $f(r)$ が原点 $r = 0$ で発散しないという条件を用いて実数パラメータ α を決定せよ。

6. 設問 5 のべき級数が有限個の項からなるという条件から固有値 E を求め、設問 3 で求めた固有値 (ただし $\hbar = m = \omega = 1$ とおいたもの) と一致することを示せ。

2008 年度（平成 20 年度）第 1 問 詳解

2 次元等方調和振動子 —— 演算子法と極座標法

出典 提供された h20phys.pdf の第 1 問（冊子 1-2 ページ）。以下では設問に従い、前半は $m, \omega, \hbar$ を保持し、後半は $m = \omega = \hbar = 1$ とする。

設問 1：交換関係とハミルトニアン $[x_k, p_l] = i\hbar\delta_{kl}$ と $[x_k, x_l] = [p_k, p_l] = 0$ に対して

$$a_k = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_k + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p_k, \quad a_k^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_k - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p_k.$$

各項を展開すると、 x と p の交差項だけが残る

$$[a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl}, \quad [a_k, a_l] = [a_k^\dagger, a_l^\dagger] = 0.$$

逆変換 $x_k = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}(a_k + a_k^\dagger)$, $p_k = -i\sqrt{m\hbar\omega/2}(a_k - a_k^\dagger)$ を代入すると、

$$H = \hbar\omega \sum_{k=1}^2 \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right).$$

設問 2：基底状態の波動関数 位置表示の $p_k = -i\hbar\partial_{x_k}$ を使うと $a_k\psi_0 = 0$ は

$$\left(\partial_{x_k} + \frac{m\omega}{\hbar}x_k \right) \psi_0 = 0 \quad (k=1, 2).$$

両方向の方程式を積分して、 $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ より

$$\psi_0(r) = C \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right).$$

設問は規格化不要だが、 $\int_{\mathbb{R}^2} |\psi_0|^2 d^2x = 1$ なら $C = \sqrt{m\omega/(\pi\hbar)}$ と選べる。

設問 3：全固有状態、固有値、縮退度

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}(a_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_1!n_2!}}|0\rangle, \quad E_{n_1n_2} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1).$$

$N = n_1 + n_2 = 0, 1, \dots$ を固定すると $(n_1, n_2) = (0, N), \dots, (N, 0)$ が許されるため

$$E_N = \hbar\omega(N+1), \quad g_N = N+1.$$

独立な生成演算子を使うので、同じエネルギーでも異なる組は互いに直交する。

設問 4：極座標への変数分離 $m = \omega = \hbar = 1$ にすると Schrödinger 方程式は

$$-\frac{1}{2} \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \right) \psi + \frac{r^2}{2} \psi = E\psi.$$

$\psi = R(r)\Theta(\theta)$ と置くと $\Theta'' = -n^2\Theta$ 。波動関数の一価性 $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ から $n \in \mathbb{Z}$ であり、

$$\Theta(\theta) = e^{in\theta}, \quad R'' + \frac{1}{r}R' + \left(2E - r^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0.$$

設問 5：原点のべき級数と指数 α $R(r) = e^{-r^2/2} f(r)$ と置くと、指定の方程式

$$f'' + \left(\frac{1}{r} - 2r\right) f' + \left(2E - 2 - \frac{n^2}{r^2}\right) f = 0$$

となる。 $f = r^\alpha \sum_{s \geq 0} f_s r^s$ ($f_0 = 1$) を代入し、最も低い冪 $r^{\alpha-2}$ の係数を比較すると

$$\alpha^2 - n^2 = 0 \implies \alpha = \pm |n|.$$

$r = 0$ で波動関数が発散しないという指定から、 $n \neq 0$ では $\alpha = |n|$ を選ぶ。 $n = 0$ の場合は $\alpha = 0$ とし、もう一つの対数型独立解は原点で発散するので除く。

$$\boxed{\alpha = |n|}.$$

さらに $f_{-1} = f_{-2} = 0$ として $r^{\alpha+s-2}$ の係数を集めると

$$s(2\alpha + s)f_s + 2(E - \alpha - s + 1)f_{s-2} = 0.$$

したがって $f_1 = 0$ で全ての奇数係数が消え、偶数係数は

$$\boxed{f_{2j} = \frac{\alpha + 2j - 1 - E}{2j(\alpha + j)} f_{2j-2} \quad (j \geq 1)}.$$

設問 6：級数が有限で終わる条件 多項式で終わるためには、ある $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $f_{2q} \neq 0$ かつ $f_{2q+2} = 0$ が必要。上式の分子から

$$\boxed{E = 2q + |n| + 1 \quad (q = 0, 1, 2, \dots; n \in \mathbb{Z})}.$$

これは設問 3 の $E_N = N + 1$ に $N = 2q + |n|$ と置いたものと一致する。実際の解は陪 Laguerre 多項式を用いて

$$\psi_{qn}(r, \theta) = \mathcal{N}_{qn} e^{-r^2/2} r^{|n|} L_q^{|n|}(r^2) e^{in\theta}.$$

例えば $\mathcal{N}_{qn} = \sqrt{q! / [\pi(q + |n|)!]}$ とすれば $\int |\psi|^2 r dr d\theta = 1$ 。同じ N の許される角運動量は $n = -N, -N + 2, \dots, N$ であり、ちょうど $N + 1$ 個。

チェックポイント：(1) $N = 0$ の基底状態が両解法で一致すること、(2) $q = 0, |n| = 1$ で $E = 2$ 、(3) 一価条件が角運動量 $n\hbar$ の整数値を要求することを確認できる。

量子力学 | 年度別問題

2007年度

出題テーマ / 編集上の分類

角運動量の量子化

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

量子論における軌道角運動量 $\mathbf{l}$ は古典論と同様に座標 $\mathbf{r}$ と運動量 $\mathbf{p}$ のベクトル積で与えられる。すなわち $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ である。ここで、それぞれのベクトルの成分は $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, $\mathbf{l} = (l_x, l_y, l_z)$ である。以下の設問に答えよ。ただし、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h はプランク定数) を用いよ。

1. l_z と x, y, z との間の交換関係を求めよ。
2. l_z と p_x, p_y, p_z との間の交換関係を求めよ。
3. l_a と l_b との間の交換関係を求めよ。ただし、 $a, b = x, y, z$ である。

量子論では、軌道角運動量 $\mathbf{l}$ を拡張して設問3の交換関係を満たす演算子を角運動量 $\mathbf{J}$ と呼ぶ。以下では、角運動量 $\mathbf{J}$ のみが力学変数である力学系を考える。ここで、変数 A を $A = J_x - iJ_y$, 変数 B を $B = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ と定義する。次の設問に答えよ。

4. $A^\dagger A$ および $AA^\dagger$ を B と J_z を用いて書け。ただし、 $A^\dagger$ は A の複素共役演算子である。
5. B は演算子ではなくただの数であることを示せ。

J_z は固有値を持つと考えて、その固有値を Θ_z および固有状態を $|\Theta_z\rangle$ とする。次の設問に答えよ。

6. $A|\Theta_z\rangle \neq 0$ ならば $A|\Theta_z\rangle$ も J_z の固有状態であることを示せ。また、その固有値を求めよ。
7. $\langle \Theta_z | A^\dagger A | \Theta_z \rangle \geq 0$ と $\langle \Theta_z | AA^\dagger | \Theta_z \rangle \geq 0$ を用いて、 $-m \leq \Theta_z \leq m$ を証明せよ。ただし、 $m = \sqrt{B + \frac{1}{4}\hbar^2 - \frac{1}{2}\hbar}$ である。
8. 以上の結果を用いて、 m が $\hbar$ の整数倍であるかまたは半整数倍であることを示せ。

2007 年度（平成 19 年度）第 1 問 詳解

角運動量の交換関係と角運動量量子数の導出

出典 提供された H19phys.pdf の第 1 問（冊子 1 ページ）。以下では $[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ を用いる。

設問 1: ℓ_z と座標演算子の交換関係 $\ell_z = xp_y - yp_x$ と $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ より

$$[\ell_z, x] = i\hbar y, \quad [\ell_z, y] = -i\hbar x, \quad [\ell_z, z] = 0.$$

例えば $[xp_y - yp_x, x] = -y[p_x, x] = i\hbar y$ 。これは z 軸回転で位置がどのように変わるかを示す。

設問 2: ℓ_z と運動量の交換関係 同様に

$$[\ell_z, p_x] = i\hbar p_y, \quad [\ell_z, p_y] = -i\hbar p_x, \quad [\ell_z, p_z] = 0.$$

例えば $[xp_y - yp_x, p_x] = [x, p_x]p_y = i\hbar p_y$ である。

設問 3: 軌道角運動量の代数 $\ell_x = yp_z - zp_y$, $\ell_y = zp_x - xp_z$, $\ell_z = xp_y - yp_x$ を用いて交換子を展開し、独立な方向の $[r_i, p_j]$ だけを残すと

$$[\ell_a, \ell_b] = i\hbar \sum_c \varepsilon_{abc} \ell_c \quad (a, b = x, y, z).$$

例えば $[\ell_x, \ell_y] = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar\ell_z$ 。同様の巡回置換により残りも従う。以下、原題の通り $\mathbf{J}$ も同じ交換関係を満たすとする。

設問 4: $A^\dagger A, AA^\dagger$ の計算 $A = J_x - iJ_y$ ($= J_-$)、 $A^\dagger = J_x + iJ_y$ ($= J_+$)、 $B = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ と置く。 $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$ より

$$\begin{aligned} A^\dagger A &= (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 + i[J_y, J_x], \\ AA^\dagger &= (J_x - iJ_y)(J_x + iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 + i[J_x, J_y]. \end{aligned}$$

よって

$$A^\dagger A = B - J_z^2 + \hbar J_z, \quad AA^\dagger = B - J_z^2 - \hbar J_z.$$

設問 5: B が定数として扱える理由と仮定 代数から $[B, J_a] = 0$ がすべての a について成り立つ。たとえば

$$[J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, J_z] = 0$$

は J_x^2 と J_y^2 から生じる交差項が打ち消すことから分かる。 $\mathbf{J}$ の既約表現で考えるなら、Schur の補題から

$$B = b\mathbf{1} \quad (b \geq 0)$$

である。原題の「 $\mathbf{J}$ のみが力学変数」を一つの既約多重項に制限する仮定として解釈する必要がある。可約表現では B は各ブロックで定数だが、全空間で単一の数とは限らない。これは設問の暗黙の前提への数学的な注意である。

設問 6：昇降演算子による J_z 固有値の変化 $[J_z, J_x] = i\hbar J_y, [J_z, J_y] = -i\hbar J_x$ だから

$$[J_z, A] = [J_z, J_x - iJ_y] = -\hbar A.$$

$J_z|\Theta_z\rangle = \Theta_z|\Theta_z\rangle$ に対して

$$J_z A|\Theta_z\rangle = (AJ_z + [J_z, A])|\Theta_z\rangle = (\Theta_z - \hbar)A|\Theta_z\rangle.$$

したがって $A|\Theta_z\rangle \neq 0$ なら、それは固有値

$$\boxed{\Theta'_z = \Theta_z - \hbar}$$

を持つ。逆に $A^\dagger = J_+$ は固有値を $\hbar$ だけ上げる。

設問 7：固有値の上下限 任意の正規化状態について $A^\dagger A$ と $AA^\dagger$ は正作用素なので、 $B = b\mathbf{1}$ とし

$$\langle A^\dagger A \rangle = b - \Theta_z^2 + \hbar\Theta_z \geq 0, \quad \langle AA^\dagger \rangle = b - \Theta_z^2 - \hbar\Theta_z \geq 0.$$

$b \geq 0$ と置き

$$m = \sqrt{b + \frac{\hbar^2}{4}} - \frac{\hbar}{2}, \quad \Longleftrightarrow \quad b = m(m + \hbar)$$

とすると、二つの不等式はそれぞれ

$$(m + \Theta_z)(m - \Theta_z + \hbar) \geq 0, \quad (m - \Theta_z)(m + \Theta_z + \hbar) \geq 0$$

となる。両者の許容区間の共通部分は

$$\boxed{-m \leq \Theta_z \leq m}.$$

設問 8：整数・半整数の量子化 昇降演算子の作用によって、 J_z の固有値は $\hbar$ 刻みで増減する。しかし上記の不等式により有限な範囲 $[-m, m]$ を超えられない。最上位状態は $A^\dagger|m\rangle = 0$ であり、最下位状態は $A|-m\rangle = 0$ 。実際、 $\|A^\dagger|\Theta\rangle\|^2 = (m - \Theta)(m + \Theta + \hbar)$ なので上限側の停止点は $\Theta = m$ に限られる。同様に下限側は $\Theta = -m$ である。よって一つの ladder で上端と下端の差が $\hbar$ の整数倍であることから

$$m - (-m) = n\hbar \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

つまり

$$\boxed{\frac{m}{\hbar} = \frac{n}{2} \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\right\}}.$$

通常 $j = m/\hbar$ と置けば、 $B = \hbar^2 j(j+1)\mathbf{1}$ 、 J_z の固有値は $\hbar m_j$ ($m_j = -j, -j+1, \dots, j$) である。

補足：この証明は一般の角運動量 $\mathbf{J}$ の既約表現についてであり、純粋な軌道角運動量 $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ に限れば単価な空間波動関数から $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となる。半整数値はスピン等の内部自由度にも必要である。

量子力学 | 年度別問題

2006

年度

出題テーマ / 編集上の分類

無限深井戸と一次摂動論

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

1次元系で無限に高い2つの壁にはさまれた領域を考える。1次元の座標を x で表すこととし、壁の位置は $x = -a$ 、及び、 $x = a$ とする ($a > 0$)。そこに質量 m の粒子がある。二つの壁の間の領域でのポテンシャルエネルギーを $U(x)$ と表わす。以下の設問に答えよ。ただし、 $\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数) とする。

1. この粒子の従う、時間に依存しないシュレーディンガー方程式を示せ。ただし、基底状態から見て第 n 励起状態のエネルギー固有値を E_n とせよ。また、 $n = 0$ は基底状態を表わすとせよ。次に、このシュレーディンガー方程式を解く際の境界条件を述べよ。さらに、

$$U(x) = 0, \quad -a < x < a \quad (1)$$

の場合 (図1 参照) について、エネルギー固有値 E_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を、解を得る概略とともに示せ。固有波動関数 $\phi_n(x)$ を、 $n = 0, 1$ の場合について、具体的に示せ。

2. 設問1の各固有関数 $\phi_n(x)$ は、座標系の $x \rightarrow -x$ なる変換によってどのように変化するか述べよ。波動関数のそのような性質は、ハミルトニアンの中の不変性の帰結として起こるのか説明せよ。
3. ポテンシャル $U(x)$ をゼロからわずかにずらす事にする。まず、図2のように、

$$U(x) = 0, \quad -a < x \leq 0 \quad (2)$$

$$U(x) = -w, \quad 0 < x < a \quad (3)$$

とする。 w は正の実数であるが、絶対値は十分小さいものとする。この時の、 $n = 0$ の状態と $n = 1$ の状態のエネルギー固有値をそれぞれ1次の摂動論で求めよ。

4. 設問3の場合、設問1に比べてポテンシャルがわずかに変わっている。ここで、 $n = 0$ の状態の波動関数を $\psi_0(x)$ とすると、 $\psi_0(x)$ を設問1の $\phi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で展開した時の $\phi_0(x)$ と $\phi_1(x)$ の確率振幅を、 w に関して1次の項まで求めよ。
5. 設問1の波動関数 $\phi_0(x)$ に対して座標 x の期待値 $\langle x \rangle$ がどのようなになるか、簡単な説明とともに示せ。それは、設問2とはどのような関係にあるか述べよ。
6. 設問4の波動関数 $\psi_0(x)$ を $\phi_0(x)$ と $\phi_1(x)$ までで展開したものに対して、期待値 $\langle x \rangle$ を w の1次まで示せ。それはポテンシャルの変化と関連づけて、どのように解釈できるか述べよ。
7. 十分小さい正の実数 u に対して、次のポテンシャルを考える (図3)。

$$U(x) = -ux/a, \quad -a < x < a \quad (4)$$

この時の、 $n = 0$ の状態と $n = 1$ の状態のエネルギー固有値はそれぞれどのようなになるか、 u に関して1次までの効果を述べよ。

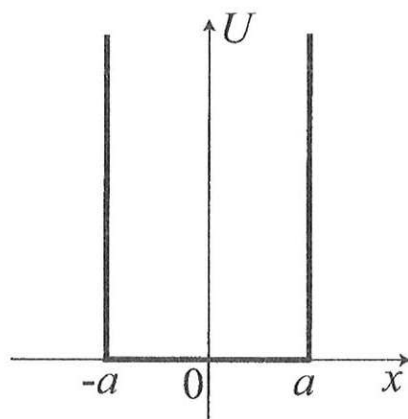


図 1: ポテンシャル (設問 1)

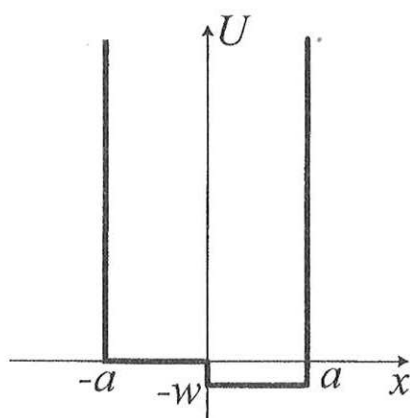


図 2: ポテンシャル (設問 3)

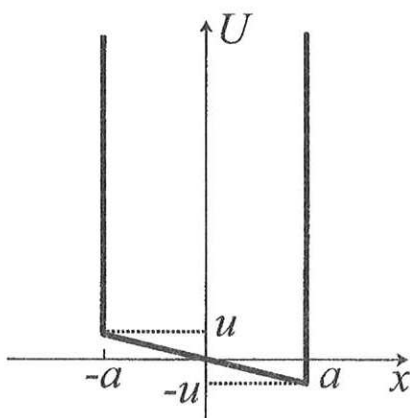


図 3: ポテンシャル (設問 7)

2006 年度第 1 問 独立詳解

無限深井戸の対称性と一次摂動論

設定：無限壁 $x = \pm a$ 、区間 $-a < x < a$ で $U(x)$ を持つ 1 粒子の 1 次元 Schrödinger 方程式。問題文の $n = 0$ が基底状態となる記法を用いる。

設問 1：基礎方程式、境界条件、固有状態 $\hat{p} = -i\hbar d/dx$ なので、定常状態 $\Psi_n(x, t) = \phi_n(x)e^{-iE_n t/\hbar}$ は

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi_n}{dx^2} + U(x)\phi_n = E_n \phi_n} \quad (-a < x < a)$$

を満たす。無限壁で波動関数は消え、 $\phi_n(-a) = \phi_n(a) = 0$ 。規格化は $\int_{-a}^a |\phi_n|^2 dx = 1$ 。 $U = 0$ なら $\phi'' + k_n^2 \phi = 0$ 、 $k_n = \sqrt{2mE_n}/\hbar$ 。区間長 $2a$ の Dirichlet 条件により

$$\boxed{k_n = \frac{(n+1)\pi}{2a}}, \quad \boxed{E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 (n+1)^2}{8ma^2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

位相は自由に選べる。基底・第 1 励起について次の実関数を採用する：

$$\boxed{\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{\pi x}{2a}}, \quad \boxed{\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{\pi x}{a}}.$$

両者とも $\int_{-a}^a |\phi_n|^2 dx = 1$ 。一般解は $a^{-1/2} \sin[(n+1)\pi(x+a)/(2a)]$ で、各状態の全体符号を適宜取り直せる。

設問 2：空間反転とパリティ 反転 $P\phi(x) = \phi(-x)$ は $P^2 = 1$ 。 $U(x) = U(-x)$ の場合、 $[H, P] = 0$ であり非縮退固有状態はパリティ固有状態に取れる。

$$\boxed{\phi_n(-x) = (-1)^n \phi_n(x)}.$$

$n = 0$ は偶関数、 $n = 1$ は奇関数。物理的にはハミルトニアン鏡映対称性が保存量として現れる。パリティ奇の x の期待値はそれぞれゼロ。

設問 3：右半区間への微小な階段摂動 $\delta U(x) = -w\Theta(x)$ 、 $w > 0$ とする（点 $x = 0$ の値は積分に影響しない）。非縮退一次摂動論では

$$E_n = E_n^{(0)} + \langle n | \delta U | n \rangle + O(w^2) = E_n^{(0)} - w \int_0^a |\phi_n(x)|^2 dx + O(w^2).$$

偶奇性から確率は左右半区間で同じ $1/2$ 。したがって

$$\boxed{E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} - \frac{w}{2} + O(w^2)}, \quad \boxed{E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} - \frac{w}{2} + O(w^2)}.$$

一次ではエネルギー差は変わらない。ただし二次以降の差まで消えることは意味しない。

設問 4：基底状態に混じる第 1 励起状態 $|\psi_0\rangle = |0\rangle + \sum_{n \neq 0} \frac{\langle n | \delta U | 0 \rangle}{E_0^{(0)} - E_n^{(0)}} |n\rangle + O(w^2)$ 。このうち ϕ_1 の係数を c_1 とする。位相は設問 1 の $\phi_1 = +\sin(\pi x/a)/\sqrt{a}$ に統一する。

$$\langle 1 | \Theta(x) | 0 \rangle = \frac{1}{a} \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{2a} dx = \frac{4}{3\pi}.$$

$\Delta = E_1^{(0)} - E_0^{(0)} = 3\pi^2 \hbar^2 / (8ma^2)$ なので

$$\boxed{c_1 = \frac{4w}{3\pi\Delta} = \frac{32ma^2 w}{9\pi^3 \hbar^2}}.$$

したがって 2 状態打ち切りを $\psi_0^{[2]} = \phi_0 + c_1 \phi_1$ と書ける。 ϕ_0 の規格化係数のずれは $O(w^2)$ である。厳密な一次波動関数には他の励起状態も $O(w)$ で混じるので、これを全状態の一次精度での展開と取り違えない。

設問 5：無摂動の位置期待値 ϕ_0 は偶で x は奇なので積 $x|\phi_0|^2$ は奇関数。

$$\langle x \rangle_0 = \int_{-a}^a x |\phi_0|^2 dx = 0.$$

これは対称井戸 $U(x) = U(-x)$ によって説明できる。

設問 6：2 状態打ち切りでの位置期待値 問題文が指定する $\psi_0^{[2]} = \phi_0 + c_1 \phi_1$ を用いると、対角項 $\langle 0|x|0 \rangle = \langle 1|x|1 \rangle = 0$ より

$$\langle x \rangle_{\{0,1\}} = 2c_1 \langle 0|x|1 \rangle + O(w^2), \quad \langle 0|x|1 \rangle = \frac{1}{a} \int_{-a}^a x \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi x}{a} dx = \frac{32a}{9\pi^2}.$$

従って問題で指示された打ち切り結果は

$$\langle x \rangle_{\{0,1\}} = \frac{256aw}{27\pi^3\Delta} + O(w^2) = \frac{2048ma^3w}{81\pi^5\hbar^2} + O(w^2).$$

$w > 0$ では右側のポテンシャルが低下するため、粒子の分布は右へ偏り $\langle x \rangle > 0$ 。これは 2 準位近似の結果であり、全状態を含めた一次摂動の厳密係数ではない。

設問 7：線形で奇な微小ポテンシャル $\delta U(x) = -ux/a$ は反転で符号が変わる。 ϕ_n はパリティ固有状態なので

$$\Delta E_n^{(1)} = -\frac{u}{a} \int_{-a}^a x |\phi_n(x)|^2 dx = 0 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

従って基底と第 1 励起の固有エネルギーは

$$E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} + O(u^2), \quad E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} + O(u^2).$$

一次では準位シフトが現れないが、固有状態は反対パリティの状態が混ざるため一次で変化し得る。

検算・注意事項： $\int_0^a \phi_0 \phi_1 dx = 4/(3\pi)$ と $\langle 0|x|1 \rangle = 32a/(9\pi^2)$ は記号積分で検算済み。 ϕ_1 の全体符号を逆に選ぶと c_1 と行列要素の符号が同時に反転し、 $\langle x \rangle$ は不変。

量子力学 | 年度別問題

2005年度

出題テーマ / 編集上の分類

有限井戸と共鳴透過

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

幅 a , 深さ $-V_0$ (< 0) の一次元井戸型ポテンシャル $V(x)$ を考える (図1)。質量 m の粒子が, $x = -\infty$ から波数 k の平面波 e^{ikx} で入射すると, その一部は反射し, 一部は透過する。このとき, $x < -a/2$ と $x > a/2$ における波動関数を, それぞれ $\psi = e^{ikx} + Re^{-ikx}$, $\psi = Te^{ikx}$ とし, また $-a/2 \leq x \leq a/2$ における波動関数を $\psi = \alpha e^{ipx} + \beta e^{-ipx}$ として, 以下の設問に答えよ。ただし, $\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数) とする。

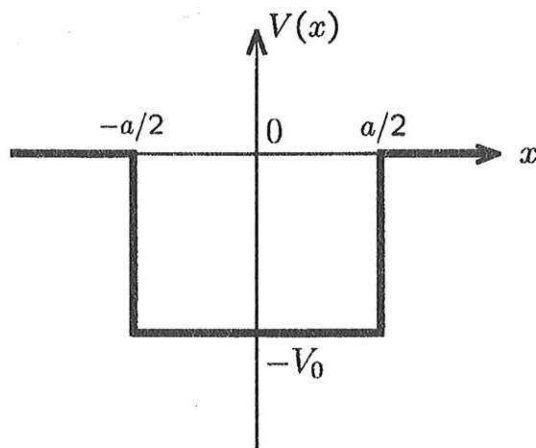


図1

1. 入射波, 反射波, 透過波に対するフラックス (確率密度の流れ) を, $\hbar, m, k, R, T$ を用いて表せ。また T と R の関係式を与えよ。
2. $T = |T|e^{i\theta}$ と書くとき, 位相 θ が現れる物理的理由を簡潔に述べよ。
3. p を $\hbar, m, k, V_0$ を用いて表せ。
4. T を以下の式のように表すとき, A と B を k と p を用いて表せ。

$$T = \frac{e^{-ika}}{A \cos(pa) - iB \sin(pa)}$$

5. 入射した波が反射を全く受けない (完全透過する) ための k が満たすべき条件を求めよ。また, 完全透過がおこる物理的理由を簡潔に述べよ。
6. $|T|^2$ を k の関数として図示せよ。

2005 年度第 1 問 独立詳解

有限井戸型ポテンシャルの散乱・共鳴透過

設定: $V(x) = -V_0$ ($|x| \leq a/2$)、 $V(x) = 0$ (外側)、 $V_0 > 0$ 。左からエネルギー $E = \hbar^2 k^2 / (2m) > 0$ の単位振幅平面波が入射する。

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx}, & x < -a/2, \\ \alpha e^{ipx} + \beta e^{-ipx}, & -a/2 \leq x \leq a/2, \\ Te^{ikx}, & x > a/2. \end{cases}$$

設問 1: 確率流と反射・透過の保存 Schrödinger 波動関数の確率流は $j = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \partial_x \psi)$ 。平面波 Ae^{ikx} の流束は $\hbar k |A|^2 / m$ 、左向きの Be^{-ikx} は $-\hbar k |B|^2 / m$ である。

$$\boxed{j_{\text{in}} = \frac{\hbar k}{m}}, \quad \boxed{j_{\text{ref}} = -\frac{\hbar k}{m} |R|^2}, \quad \boxed{j_{\text{tr}} = \frac{\hbar k}{m} |T|^2}.$$

定常で損失のない実ポテンシャルだから流束は保存し、

$$\boxed{1 - |R|^2 = |T|^2} \iff \boxed{|R|^2 + |T|^2 = 1}.$$

設問 2: 透過振幅の位相の意味 $T = |T|e^{i\theta(k)}$ の位相 $\theta(k)$ は入射波に対する散乱位相である。異なる k の平面波を重ねて局在波束を作ると、この位相の周波数依存性が透過波束の干渉・時間遅れに寄与する。 $V_0 = 0$ の場合 $T = 1$ となる基準を採っている。

補足: 位相そのものは波動関数の基準点や散乱振幅の定義に依存する。観測可能な遅延は適切な参照との位相差のエネルギー微分から求まる。

設問 3: 井戸内部の波数 内部の運動エネルギーは $E + V_0$ 。よって

$$\frac{\hbar^2 p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0, \quad \boxed{p = \sqrt{k^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2}}} > k.$$

設問 4: 接続条件と透過振幅 $x = \pm a/2$ で ψ と $\partial_x \psi$ は連続。特に右端では

$$\alpha e^{ipa/2} + \beta e^{-ipa/2} = Te^{ika/2}, \quad p(\alpha e^{ipa/2} - \beta e^{-ipa/2}) = kTe^{ika/2}.$$

これを解き、左端の 2 条件へ代入する。反射振幅を消去すると

$$\boxed{T = \frac{e^{-ika}}{\cos(pa) - i \frac{p^2 + k^2}{2kp} \sin(pa)}}.$$

問題文の $T = e^{-ika} / [A \cos(pa) - iB \sin(pa)]$ に対応して

$$\boxed{A = 1}, \quad \boxed{B = \frac{k^2 + p^2}{2kp}}.$$

$V_0 \rightarrow 0$ なら $p \rightarrow k$ で分母は e^{-ika} となり $T \rightarrow 1$ 、という自由粒子極限でも確認できる。

設問 5: 完全透過と共鳴条件 絶対値の二乗を取ると

$$\frac{1}{|T|^2} = \cos^2(pa) + \frac{(p^2 + k^2)^2}{4p^2 k^2} \sin^2(pa) = 1 + \frac{(p^2 - k^2)^2}{4p^2 k^2} \sin^2(pa).$$

$V_0 > 0$ 、 $k > 0$ では係数が正なので、

$$\boxed{|T|^2 = 1 \iff pa = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)}.$$

従って許される入射波数は

$$k_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \frac{2mV_0}{\hbar^2}}, \quad (n\pi/a)^2 > 2mV_0/\hbar^2.$$

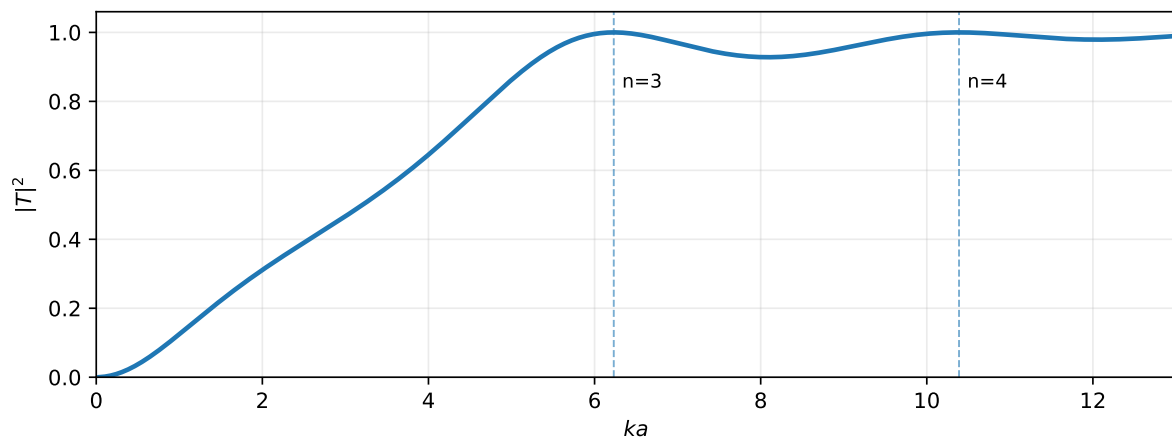
井戸の 2 つの界面で反射された波が多重干渉し、反射波の合成振幅が零になる共鳴現象である。

設問 6：透過確率の形と数値例 問 4 の結果から

$$|T(k)|^2 = \left[1 + \frac{(p^2 - k^2)^2}{4p^2 k^2} \sin^2(pa) \right]^{-1}, \quad p = \sqrt{k^2 + 2mV_0/\hbar^2}.$$

ポテンシャルの強さを無次元量 $u = 2mV_0 a^2/\hbar^2$ とすると

$$|T|^2 = \left[1 + \frac{u^2}{4(ka)^2((ka)^2 + u)} \sin^2 \sqrt{(ka)^2 + u} \right]^{-1}.$$



$u = 50$ の例。破線は $pa = n\pi$ による完全透過点であり、図は問題の特定の V_0 を与えたものではない。

$ka \rightarrow \infty$ で $|T|^2 \rightarrow 1$ 。中間領域では $0 < |T|^2 \leq 1$ の振動的な共鳴構造が現れる。 $k \rightarrow 0$ では、 $\sin \sqrt{u} \neq 0$ なら $|T|^2 \rightarrow 0$ 。特別な閾値共鳴 $\sqrt{u} = n\pi$ ではこの極限を別途取る必要がある。

検算・注意事項： $p = k$ と $pa = n\pi$ の両極限で式を検証した。有限井戸はエネルギーが負の束縛状態も持ち得るが、本問は $E > 0$ の散乱問題を扱う。

量子力学 | 年度別問題

2004年度

出題テーマ / 編集上の分類

量子調和振動子

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第1問

質量 m 、振動数 ω をもつ一次元調和振動子のハミルトニアン演算子 H は

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

で与えられる。ここで、 x と p はそれぞれ位置座標演算子と運動量演算子である。この系を解析するために、ハイゼンベルグ表示を用いる。また、演算子

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x(0) + i\frac{p(0)}{m\omega}), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x(0) - i\frac{p(0)}{m\omega})$$

を導入する。ここで、 $x(0)$ と $p(0)$ は時刻 $t = 0$ での演算子である。以下の問いに答えよ。

1. 演算子 $N = a^\dagger a$ と $a^\dagger$ との交換関係および N と a との交換関係を求めよ。
2. 演算子 N の固有状態を $|n\rangle$ とし、その固有値を n とすると、

$$N|n\rangle = n|n\rangle$$

が成り立つ。ここで、 $a^\dagger|n\rangle = C|n+1\rangle$ および $a|n\rangle = D|n-1\rangle$ であることを示し、係数 C と D を求めよ。ただし、係数 C と D は正の数とし、状態 $|n\rangle$ は $\langle n|n\rangle = 1$ と規格化されているとする。

3. 上の結果を用いて n がゼロ又は正の整数であることを証明せよ。

さて、ハイゼンベルグ表示では演算子 $x(t)$ および演算子 $p(t)$ は時刻 t に依存する。それらの演算子の時間変化はハイゼンベルグ方程式で与えられる。以下の問いに答えよ。

4. $x(t)$ および $p(t)$ についてのハイゼンベルグ方程式を書け。
5. 上記の方程式を解いて $x(t)$ と $p(t)$ を求め、それらが古典解と類似の時間変動を示することを示せ。
6. 期待値 $\langle n|x(t)|n\rangle$ および $\langle n|p(t)|n\rangle$ を求めよ。
7. 期待値 $\langle \lambda|x(t)|\lambda\rangle$ および $\langle \lambda|p(t)|\lambda\rangle$ が調和振動子の古典解と類似の時間変動を示すような状態 $|\lambda\rangle$ は、基底状態 $|G\rangle$ に演算子 a および $a^\dagger$ を作用して作ることができる。つまり、この状態 $|\lambda\rangle$ は $|\lambda\rangle = F(a, a^\dagger)|G\rangle$ と書ける。関数 $F(a, a^\dagger)$ の具体例を示せ。ただし、基底状態は $a|G\rangle = 0$ を満たすものとする。また、状態 $|\lambda\rangle$ の規格化条件は無視してよい。

2004 年度（平成 16 年度）第 1 問

1 次元調和振動子・Heisenberg 描像・コヒーレント状態

2003 年 8 月 26 日実施／出典：H16phys.pdf 第 1 問（原題の直後に配置）

全体的見通し：正準交換関係 $[x, p] = i\hbar$ から $[a, a^\dagger] = 1$ を導き、 $N = a^\dagger a$ の固有状態を作る。後半では Heisenberg 方程式を解き、数状態とコヒーレント状態の期待値を比較する。

■記法 $a = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(x_0 + ip_0/(m\omega))$, $a^\dagger = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(x_0 - ip_0/(m\omega))$, $x_0 = x(0)$, $p_0 = p(0)$. 以下、 $m, \omega, \hbar > 0$ とする。

設問 1 交換関係

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left[x_0 + \frac{ip_0}{m\omega}, x_0 - \frac{ip_0}{m\omega} \right] \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left(-\frac{i}{m\omega} [x_0, p_0] + \frac{i}{m\omega} [p_0, x_0] \right) = 1. \end{aligned}$$

恒等式 $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ より

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger.$$

$N = a^\dagger a$ は自己共役な非負演算子で、任意の規格化状態で $\langle N \rangle = \|a\psi\|^2 \geq 0$.

設問 2 数状態への昇降作用

$N|n\rangle = n|n\rangle$ とする。交換関係から

$$N(a^\dagger|n\rangle) = (n+1)a^\dagger|n\rangle, \quad N(a|n\rangle) = (n-1)a|n\rangle.$$

すなわち非零なら隣接固有状態に比例する。ノルムを計算すると

$$\|a^\dagger|n\rangle\|^2 = \langle n|aa^\dagger|n\rangle = n+1, \quad \|a|n\rangle\|^2 = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = n.$$

係数は正と指定されているので

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.$$

設問 3 固有値が非負整数になる理由

$n \geq 0$. もし整数でない固有値 $n > 0$ があれば、 $k = \lfloor n \rfloor + 1$ 回降下した状態 $a^k|n\rangle$ は

$$\|a^k|n\rangle\|^2 = n(n-1)\cdots(n-k+1) > 0$$

(k の取り方により各因子は正)。しかしその状態の N 固有値は $n - k < 0$ となり $N \geq 0$ と矛盾する。ゆえに

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

特に $a|0\rangle = 0$ であり、 $H = \hbar\omega(N + 1/2)$ が従う。

設問 4 Heisenberg 方程式

$\dot{O} = (i/\hbar)[H, O]$ だから

$$\dot{x}(t) = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{p(t)^2}{2m}, x(t) \right] = \frac{p(t)}{m}, \quad \dot{p}(t) = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{m\omega^2 x(t)^2}{2}, p(t) \right] = -m\omega^2 x(t).$$

設問 5 運動方程式の解と古典運動

初期条件 (x_0, p_0) を満たす線形方程式の一意解は

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t, \\ p(t) &= p_0 \cos \omega t - m\omega x_0 \sin \omega t. \end{aligned}$$

演算子方程式としての解は、古典調和振動子の位相空間軌道をそのまま再現する（ただし x_0, p_0 は非可換）。同値な表示は $a(t) = a e^{-i\omega t}$ 。

設問 6 数状態での期待値

$x(t) = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}(a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t})$ 。異なる数状態が直交するため $\langle n|a|n\rangle = \langle n|a^\dagger|n\rangle = 0$ 。よって

$$\langle n|x(t)|n\rangle = 0, \quad \langle n|p(t)|n\rangle = 0.$$

これは数状態の平均位置・平均運動量は静止していることを表す。

設問 7 コヒーレント状態の構成

基底状態を $|G\rangle = |0\rangle$, $a|G\rangle = 0$ とし、

$$|\lambda\rangle = e^{\lambda a^\dagger} |G\rangle \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

と置く。Baker-Campbell-Hausdorff の最初の交換関係だけで

$$a e^{\lambda a^\dagger} = e^{\lambda a^\dagger} (a + \lambda)$$

が成立するため $a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ 。したがって原題の正規化を無視した関数は

$$F(a, a^\dagger) = e^{\lambda a^\dagger}.$$

規格化した状態は $|\lambda\rangle_{\text{norm}} = e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda a^\dagger} |0\rangle$ 。

この状態で $\langle a \rangle = \lambda$, $\langle a^\dagger \rangle = \lambda^*$ なので

$$\begin{aligned}\langle x(t) \rangle_\lambda &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \operatorname{Re}(\lambda e^{-i\omega t}), \\ \langle p(t) \rangle_\lambda &= \sqrt{2m\hbar\omega} \operatorname{Im}(\lambda e^{-i\omega t}).\end{aligned}$$

解釈： $\lambda = |\lambda|e^{i\varphi}$ とすると、 $\langle x \rangle \propto \cos(\omega t - \varphi)$, $\langle p \rangle \propto -\sin(\omega t - \varphi)$ 。期待値は古典軌道を描く。さらに $\Delta x^2 = \hbar/(2m\omega)$, $\Delta p^2 = m\hbar\omega/2$ で、最小不確定性を保つ。

■確認すべきポイント (1) 位相の符号、(2) n が整数である証明で非負性を使っていること、(3) 数状態とコヒーレント状態の時間依存性の違い。

量子力学 | 年度別問題

2003 年度

出題テーマ / 編集上の分類

井戸の拡張と断熱定理

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

問題 1

高さ無限大の壁に囲まれた幅 $2L$ の一次元井戸型ポテンシャルに、高さ無限大で幅が L に比べて十分小さいポテンシャル障壁を設け、質量 m の粒子を左半分 (幅 L) に閉じこめる (図 1)。井戸型ポテンシャルの底をエネルギーの原点とする。

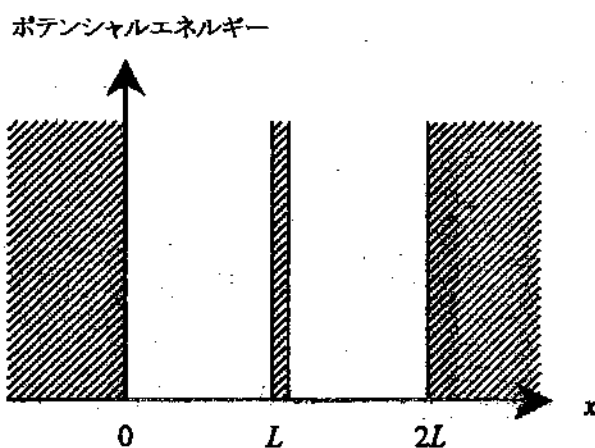


図 1

1. 粒子が量子力学的な基底状態にあるとして、そのエネルギー E_0 を求めよ。
2. ポテンシャル障壁を突然取り去って、粒子が幅 $2L$ のポテンシャル井戸全体を動けるようにする。このとき、粒子が基底状態にある確率を求めよ。またエネルギー期待値はいくらか。
3. ポテンシャル障壁を取り去った時刻から t 秒後の粒子の波動関数を $\psi(x, t)$ とする。いま仮に $\psi(x, t)$ がわかったとしよう。時刻 t において粒子の位置を観測したとき、粒子が井戸の左半分で見つかる確率は、この $\psi(x, t)$ を用いてどのように書けるか。ただし、 $\psi(x, t)$ は規格化されているとする。
4. 上記の $\psi(x, t)$ の表式を求めよ。ただし級数和はそのまま残してよい。
5. 今度は設問 1 の状態からポテンシャル障壁をきわめてゆっくりと右端まで動かす場合について考えよう。このようなゆっくりとしたポテンシャルの変化に対しては断熱定理が成り立ち、粒子は連続的に移行変わることのできる量子数の同じ固有状態にとどまる。このことを使って、粒子が幅 $2L$ のポテンシャル井戸全体を動けるようにした後の粒子のエネルギー期待値を、設問 1 で求めた E_0 を用いて表せ。

6. 上記の断熱定理が成り立つことを、以下の手順で示せ。

左側のポテンシャル井戸の幅が a のとき ($L \leq a \leq 2L$) に粒子が取り得る固有状態を $\phi_n(x, a)$ 、その固有エネルギーを $\epsilon_n(a)$ (n は負でない整数) と書く。 $\phi_n(x, a)$ は規格直交化されているものとする。 $t=0$ で基底状態にいた粒子の、時間 t での波動関数をつぎのように展開する。

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n(t) \phi_n(x, a) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \epsilon_n(a) d\tau \right\}.$$

a が時間に依存することに注意して、時間に依存する波動方程式から、係数ベクトル $\{c_n(t)\}$ の満たすべき関係式が次の形に書けることを示し、 a や t によらない係数行列 J_{mn} の表式を求めよ。

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = - \sum_m c_m(t) \frac{1}{a} \frac{da}{dt} J_{mn} \exp \left\{ +\frac{i}{\hbar} \int_0^t [\epsilon_n(a) - \epsilon_m(a)] d\tau \right\}.$$

ただし $J_{nn} = 0$ である。

次にこの関係式を用いて、ある条件の下で断熱定理 ($c_n(t) \simeq c_n(0)$) が成り立つことを説明せよ。

7. ポテンシャル井戸の左半分に閉じ込められた粒子を、運動エネルギー E_0 の古典粒子だとする。設問5と同様に壁をゆっくりと (断熱的に) 右端まで動かしたあとのエネルギーが、設問5で求めた量子系の結果と同じであることを示せ。ただし、粒子は壁と弾性衝突 (はねかえり係数 1) するとし、壁を動かしている間に粒子は壁と十分多くの回数衝突するとせよ。

2003 年度（平成 15 年度）問題 1

無限深井戸の急変・断熱膨張・波動関数の展開

2002 年 8 月 27 日実施／出典：H15phys.pdf 問題 1（原題の直後に配置）

全体の見通し： $0 < x < L$ に閉じ込めた基底状態の右壁を $L \rightarrow 2L$ に急に移すとき、波動関数は直後には変わらないが、新しい箱の複数のエネルギー固有状態に展開される。断熱的な移動では一つの固有状態に留まるため、エネルギーの結果が異なる。

設問 1 初期基底状態

境界 $\psi(0) = \psi(L) = 0$ の箱の固有状態と固有エネルギーは

$$\phi_n^{(L)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad E_n^{(L)} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

したがって初期基底エネルギーは

$$E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

設問 2 右壁を瞬間的に $2L$ に移す場合

突然近似では波動関数は $t = 0$ で連続なので、新しい幅 $2L$ での位置確率は

$$\int_0^L |\psi(x, 0^+)|^2 dx = \int_0^L \frac{2}{L} \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx = 1.$$

したがって左半分で見つかる確率は 1。また壁を瞬間的に動かしても波動関数の形は変わらず、 $\psi(x, 0^+) = \psi(x, 0^-)$ であるため

$$\langle H_{2L} \rangle_{0^+} = \int_0^{2L} \frac{\hbar^2}{2m} |\partial_x \psi(x, 0^+)|^2 dx = E_0.$$

$$P_{\text{left}}(0^+) = 1, \quad \langle E \rangle_{0^+} = E_0.$$

上の積分は境界条件を使った二次形式で評価した。 $x = L$ では波動関数は零であるため、分布微分に有限の δ 型エネルギーは現れない。

設問 3 左半分にある確率

ある時刻で $\psi(x, t)$ が規格化されていれば、求める確率は定義から

$$P_{\text{left}}(t) = \int_0^L |\psi(x, t)|^2 dx.$$

設問 4 急変後の波動関数

幅 $2L$ の規格化固有関数

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{2L}, \quad \varepsilon_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{8mL^2} = \frac{n^2}{4} E_0$$

で初期状態を展開する。係数は

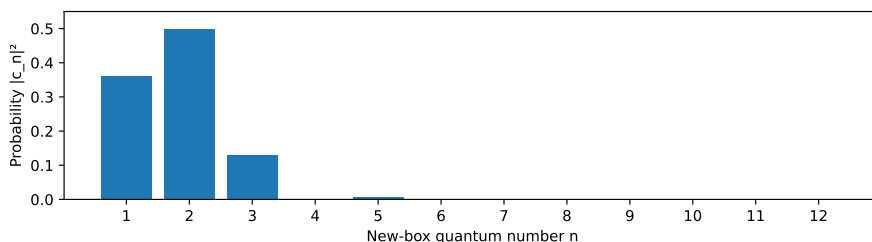
$$c_n = \int_0^{2L} \varphi_n(x)^* \psi(x, 0^+) dx = \sqrt{2} \int_0^1 \sin(\pi u) \sin\left(\frac{n\pi u}{2}\right) du.$$

積和公式で積分すると

$$c_n = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & n = 2, \\ \frac{4\sqrt{2} \sin(n\pi/2)}{\pi(4 - n^2)}, & n \neq 2. \end{cases}$$

この式は $n \neq 2$ の偶数で零になる。したがって

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{2L} \exp\left(-\frac{in^2 E_0 t}{4\hbar}\right), \quad 0 < x < 2L.$$



急拡張直後の新しい箱の固有状態への展開確率 $|c_n|^2$ 。

設問 5 右壁を断熱的に移す場合

十分に遅い連続移動では、初期基底状態は瞬間固有状態 $n = 1$ に留まる（断熱定理）。幅 $2L$ に達したとき

$$\langle E \rangle_{\text{ad}} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m(2L)^2} = \frac{E_0}{4}.$$

急変での $\langle E \rangle = E_0$ との違いは、波動関数が広がる過程で動く壁が粒子に仕事をするに由来する。

設問 6 移動壁に対する断熱展開の式

壁の位置を $a(t)$ とすると、瞬間固有状態は

$$\phi_n(x, a) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \epsilon_n(a) = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad 0 < x < a.$$

原題の展開

$$\psi(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(t) \phi_m(x, a(t)) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \epsilon_m(a(t')) dt' \right]$$

を時間依存 Schrödinger 方程式に代入する。瞬間固有状態の直交性を用いて ϕ_n に射影すると

$$\dot{c}_n = - \sum_m c_m \dot{a} \langle \phi_n | \partial_a \phi_m \rangle \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t (\epsilon_n - \epsilon_m) dt' \right].$$

結合行列要素を具体的に計算する。 $n \neq m$ で

$$\begin{aligned} \langle \phi_n | \partial_a \phi_m \rangle &= -\frac{2m\pi}{a} \int_0^1 u \sin(n\pi u) \cos(m\pi u) du \\ &= \frac{2mn(-1)^{m+n}}{a(n^2 - m^2)}. \end{aligned}$$

$n = m$ は規格化条件 $\partial_a \langle \phi_n | \phi_n \rangle = 0$ と実関数性から零。よって原題の $\dot{c}_n = - \sum_m c_m (i\dot{a}/a) J_{mn} e^{i \int (\epsilon_n - \epsilon_m)/\hbar}$ に合わせると

$$J_{mn} = \begin{cases} \frac{2imn(-1)^{m+n}}{m^2 - n^2}, & m \neq n, \\ 0, & m = n. \end{cases}$$

$J_{mn} = J_{nm}^*$ は Hermite 行列である。 $m \neq n$ の振幅移行はエネルギー差 $\Delta\epsilon_{nm} = \hbar^2 \pi^2 |n^2 - m^2| / (2ma^2)$ によって急速に振動する。従って低励起の各対に対して

$$\frac{|\dot{a}|}{a} |J_{mn}| \ll \frac{|\epsilon_n - \epsilon_m|}{\hbar}$$

が満たされ、壁速度が滑らかに変化する場合非断熱遷移が抑えられる。初めから基底状態なら $c_1(t) \simeq c_1(0)$, $c_{n \neq 1}(t) \simeq 0$ となる。

設問 7 古典的な粒子の断熱膨張

古典粒子の速さを $u = p/m$ 、壁の外向き速度を $v = \dot{a}$ ($0 < v \ll u$) とする。動く壁での弾性衝突では、衝突後の速さは $u - 2v$ となり、一衝突あたりのエネルギー変化は一次までで

$$\Delta E \simeq \frac{m}{2} [(u - 2v)^2 - u^2] = -2mu v = -2pv.$$

右壁への衝突頻度は約 $u/(2a)$ だから

$$\frac{dE}{dt} \simeq (-2pv) \frac{u}{2a} = -\frac{2E}{a} \dot{a}.$$

これを積分して $Ea^2 = \text{const.}$ 、初期 $a = L$ 、終点 $a = 2L$ なら

$$E_{\text{classical, ad}} = E_0 \left(\frac{L}{2L} \right)^2 = \frac{E_0}{4}.$$

比較：急変では分布がそのまま $\langle H \rangle = E_0$ 。断熱変化では量子数が保存されて $E_0/4$ 。古典的には繰り返す壁との衝突によってエネルギーが減る。異なる極限の操作を混同しないことが重要。

■独立検算 解析式から $\sum_n |c_n|^2 = 1$ 、 $\sum_n (n^2/4) |c_n|^2 = 1$ 。打ち切り $n \leq 1000$ ではそれぞれ 0.9999999995、0.9995947 となり 1 に収束する（エネルギーの方が収束が遅い）。

量子力学 | 年度別問題

2002年度

出題テーマ / 編集上の分類

1次元調和振動子・コヒーレント状態

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

問題 1

ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \quad (1)$$

で記述される 1 次元調和振動子を考えよう。ここで $\hat{p}$ は運動量演算子、 $\hat{x}$ は位置演算子。この系は演算子

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p} \quad (2)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p} \quad (3)$$

を用いて調べることが出来る。以下の間に、解答に至る筋道を添えて答えよ。

1. (1) 式のハミルトニアンを $a, a^\dagger$ を用いて表せ。また、 $a, a^\dagger$ の物理的意味を述べよ。

2. 基底状態 $|0\rangle$ は関係 $a|0\rangle = 0$ を満たす。これを用いて座標表示の基底状態波動関数 $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ を求めよ。また、第一励起状態の波動関数 $\psi_1(x)$ を求めよ。ここでは規格化は考えなくてよい。

3. 基底状態 $|0\rangle$ に演算子 $a^\dagger$ の指数関数をほどこして得られる状態

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^\dagger)|0\rangle, \quad \alpha \text{ は任意の複素数} \quad (4)$$

はコヒーレント状態と呼ばれる。

(a) コヒーレント状態が演算子 a の固有状態になっていることを示せ。

(b) コヒーレント状態の間の内積 $\langle\beta^*|\alpha\rangle$ を計算せよ。
ただし $\langle\beta^*| = \langle 0|\exp(\beta^* a)$ である。

(c) コヒーレント状態が n 番目の励起状態を含む確率を求めよ。

(d) コヒーレント状態について不確定性関係を調べよう。座標の期待値 $\langle\hat{x}\rangle \equiv \langle\alpha^*|\hat{x}|\alpha\rangle/\langle\alpha^*|\alpha\rangle$ と座標の二乗の期待値 $\langle\hat{x}^2\rangle \equiv \langle\alpha^*|\hat{x}^2|\alpha\rangle/\langle\alpha^*|\alpha\rangle$ を計算し、座標の不確定さの二乗

$$(\Delta x)^2 = \langle(\hat{x} - \langle\hat{x}\rangle)^2\rangle \quad (5)$$

を求めよ。

(e) 同様に運動量の不確定さの二乗 $(\Delta p)^2 = \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle$ を計算し、不確定関係を確かめよ。

2002 年度（平成 14 年度）・第 1 問

1 次元調和振動子とコヒーレント状態

出典：提供原本 H14phys.pdf 2-3 ページ。原題は直前に収録。

設問構成：1. ハミルトニアンと昇降演算子、2. 基底・第 1 励起波動関数、3(a). 固有値、(b). 内積、(c). 粒子数分布、(d). 位置の分散、(e). 運動量の分散。注意：問題の $|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$ は非規格化状態である。

準備：交換関係を明示する

原題の定義を

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p}, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \quad (1)$$

とする。 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ より、 $[a, a^\dagger] = 1$ であり、逆変換は

$$\hat{x} = x_0(a + a^\dagger), \quad \hat{p} = ip_0(a^\dagger - a), \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad p_0 = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}. \quad (2)$$

特に $x_0 p_0 = \hbar/2$ である。

設問 1：ハミルトニアンと物理的意味

$$a^\dagger a = \frac{m\omega}{2\hbar} \hat{x}^2 + \frac{1}{2m\hbar\omega} \hat{p}^2 - \frac{1}{2}, \quad (3)$$

$$\therefore H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}). \quad (4)$$

$\hat{N} = a^\dagger a$ を粒子数（励起量子数）演算子とすると、 $[H, a] = -\hbar\omega a$, $[H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger$ 。 a はエネルギーを $\hbar\omega$ 下げ、 $a^\dagger$ は $\hbar\omega$ 上げる。規格化固有状態 $|n\rangle$ に対して

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}). \quad (5)$$

設問 2：基底状態と第 1 励起状態の波動関数

$\hat{p} = -i\hbar\partial_x$ を代入すると

$$a\psi_0 = 0 \iff \left(\frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar}x\right)\psi_0(x) = 0. \quad (6)$$

よって、規格化を要求しない場合は任意定数 C により

$$\psi_0(x) = C \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right). \quad (7)$$

第 1 励起状態は $\psi_1(x) \propto a^\dagger\psi_0(x)$ と作れる。微分すると

$$a^\dagger\psi_0(x) = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}x\psi_0(x), \quad \psi_1(x) = C_1 x \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right). \quad (8)$$

規格化する場合は $C = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$, $\psi_1 = \sqrt{2m\omega/\hbar}x\psi_0$ 。偶・奇のパリティも確認できる。

設問 3(a)：コヒーレント状態は a の固有状態

$[a, a^\dagger] = 1$ から $[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}$ 。 $a|0\rangle = 0$ を使い、

$$ae^{\alpha a^\dagger}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} a(a^\dagger)^n|0\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n-1)!} (a^\dagger)^{n-1}|0\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (9)$$

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (10)$$

設問 3(b)：非規格化状態同士の内積

$\langle 0|a^n(a^\dagger)^m|0\rangle = n! \delta_{nm}$ だから

$$\langle \beta^*|\alpha\rangle = \langle 0|e^{\beta^*a}e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta^*\alpha)^n}{n!} = \boxed{e^{\beta^*\alpha}}. \quad (11)$$

したがって $\langle \alpha^*|\alpha\rangle = e^{|\alpha|^2}$ であり、問題文の状態は非規格化。規格化した $|\alpha\rangle_{\text{norm}} = e^{-|\alpha|^2/2}|\alpha\rangle$ に対し

$${}_{\text{norm}}\langle \beta|\alpha\rangle_{\text{norm}} = e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)/2+\beta^*\alpha}. \quad (12)$$

設問 3(c)：励起数 n の確率 (Poisson 分布)

規格化状態を数状態で展開する：

$$|\alpha\rangle_{\text{norm}} = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (13)$$

$\langle n|\alpha\rangle_{\text{norm}} = e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^n / \sqrt{n!}$ なので

$$\boxed{P_n = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (14)$$

平均励起数と分散はともに $|\alpha|^2$ 。 $\sum_n P_n = 1$ も指数級数から従う。

設問 3(d)：位置の期待値と分散

$\langle a\rangle = \alpha$, $\langle a^\dagger\rangle = \alpha^*$, $\langle a^2\rangle = \alpha^2$, $\langle a^\dagger a\rangle = |\alpha|^2$, $\langle aa^\dagger\rangle = |\alpha|^2 + 1$ を使う。

$$\langle \hat{x}\rangle = x_0(\alpha + \alpha^*), \quad (15)$$

$$\langle \hat{x}^2\rangle = x_0^2(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2 + 1), \quad (16)$$

$$(\Delta x)^2 = \langle \hat{x}^2\rangle - \langle \hat{x}\rangle^2 = \boxed{\frac{\hbar}{2m\omega}}. \quad (17)$$

実数部 $\text{Re } \alpha$ は位置の中心を変えるが、波束の幅は変えない。

設問 3(e)：運動量の期待値と不確定性積

同様に $\hat{p} = ip_0(a^\dagger - a)$ から

$$\langle \hat{p}\rangle = ip_0(\alpha^* - \alpha), \quad (18)$$

$$\langle \hat{p}^2\rangle = p_0^2(2|\alpha|^2 + 1 - \alpha^2 - \alpha^{*2}), \quad (19)$$

$$(\Delta p)^2 = \langle \hat{p}^2\rangle - \langle \hat{p}\rangle^2 = \boxed{\frac{m\hbar\omega}{2}}. \quad (20)$$

ゆえに

$$\boxed{\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}}, \quad (\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (21)$$

これは Heisenberg 不確定性関係の等号成立例である。実数・複素の任意の α に対して成立する。 α によって中心は変わっても、最小不確定波束の幅は変わらない。

検算： $\alpha = 0$ では基底状態に戻り、 $P_0 = 1$, $\langle x\rangle = \langle p\rangle = 0$ 。 $|\alpha| \gg 1$ では P_n の平均が $|\alpha|^2$ となり、量子数の典型値は大きくなる一方、 Δx と Δp は一定である。

量子力学 | 年度別問題

2001 年度

出題テーマ / 編集上の分類

有限井戸の束縛状態・浅い引力井戸

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

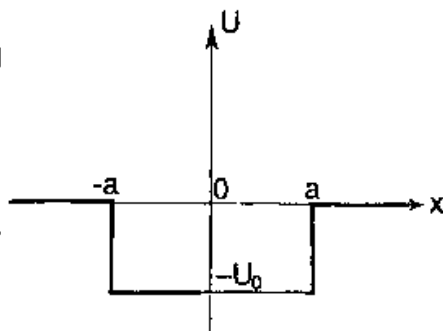
原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

[問題 1]

図のような 1 次元の井戸型ポテンシャル $U(x)$

$$U(x) = \begin{cases} -U_0 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

の中での質量 m の粒子の束縛状態 (エネルギー $E < 0$) を考える。



1. まず、量子力学の不確定性関係を使ってこの問題を考える。

(a) 粒子がポテンシャル U に束縛されていることから、直感的には粒子の位置の不確定性 Δx は a 程度だと考えられる。そこで、 $\Delta x = a$ として粒子の運動量の不確定性 Δp を求めよ。

(b) 運動量の大きさ p は Δp より大きいと考えて、(a) の結果から粒子の束縛状態が存在するためのにポテンシャルの深さ U_0 にどのような条件が必要と思われるか。

2. 実は上で求めた束縛状態が存在する条件は正しくなく、どんなに浅いポテンシャルに対しても束縛状態が存在する。

(a) シュレディンガー方程式を使って束縛状態 ($E < 0$) の波動関数 $\psi(x)$ を求めよ。その際、エネルギー E と U_0, a, m の関係式を導け。(波動関数の規格化は考えなくてよい。)

(b) 1(b) の結果に反してどのような U_0 の値に対しても束縛状態が存在することを示せ。

(c) $U_0 \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$ のときに E を求めよ。

(d) (c) の場合に粒子がポテンシャル井戸の外側にいる確率 $P(|x| > a)$ と内側にいる確率 $P(|x| < a)$ の比 $R = P(|x| > a)/P(|x| < a)$ を求めよ。また、これから 1(b) の考え方が正しくなかった理由を述べよ。

2001 年度（平成 13 年度）・第 1 問

1 次元有限井戸の束縛状態：任意の浅い引力井戸

出典：提供原本 H13phys.pdf 2 ページ。原題は直前に収録。

問題設定： $U(x) = -U_0$ ($|x| \leq a$)、 $U(x) = 0$ ($|x| > a$)、 $U_0 > 0$ 。束縛状態のエネルギーは $-U_0 < E < 0$ 。設問：1(a,b) 不確定性による見積り、2(a-d) 厳密解・存在証明・浅い井戸のエネルギーと確率比。

設問 1(a)：不確定性原理を使う粗い見積り

粒子の位置の不確定性を問題の指定通り $\Delta x = a$ と仮定すれば、Heisenberg の不確定性関係から

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \implies \boxed{\Delta p \geq \frac{\hbar}{2a}}. \quad (1)$$

これが原題の Δp を一意に決めるわけではない。 $\Delta p \simeq \hbar/(2a)$ は最小不確定を用いた**桁の見積り**であり、 $\Delta x = a$ 自体も後半の厳密解では正しくない。

設問 1(b)：誤った閾値予想とその限界

q を粒子の典型的な運動量の大きさと書く。 $q \gtrsim \Delta p$ と見積もるなら束縛の条件 $q^2/(2m) < U_0$ から

$$U_0 \gtrsim \frac{(\Delta p)^2}{2m} \gtrsim \frac{\hbar^2}{8ma^2} \quad (2)$$

という見かけ上の閾値が推測される。ただし、粒子を井戸の幅 $2a$ の内部に閉じ込めたとの仮定が誤りであり、この不等式は厳密な必要条件ではない。次の設問で反例を得る。

設問 2(a)：厳密な波動関数と固有値方程式

束縛状態では $-U_0 < E < 0$ とし

$$q = \frac{\sqrt{2m(E+U_0)}}{\hbar} > 0, \quad \kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} > 0, \quad q^2 + \kappa^2 = \frac{2mU_0}{\hbar^2}. \quad (3)$$

ポテンシャルは偶関数だから、固有状態は偶または奇のパリティに取れる。 $x = \pm a$ での ψ と ψ' の連続性から、**偶状態**は

$$\psi_+(x) = A \begin{cases} \cos(qx), & |x| \leq a, \\ \cos(qa)e^{-\kappa(|x|-a)}, & |x| > a, \end{cases} \quad \boxed{q \tan(qa) = \kappa}. \quad (4)$$

奇状態は

$$\psi_-(x) = B \begin{cases} \sin(qx), & |x| \leq a, \\ \text{sgn}(x) \sin(qa)e^{-\kappa(|x|-a)}, & |x| > a, \end{cases} \quad \boxed{-q \cot(qa) = \kappa}. \quad (5)$$

さらに $E = -\hbar^2 \kappa^2/(2m)$ 。 A, B は原題の指定通り非規格化の定数でよい。**任意に浅い井戸で存在する状態は偶の基底状態である。**

設問 2(b)：どんな $U_0 > 0$ にも束縛状態が存在する

偶状態の方程式だけを調べれば十分。 $z = qa \in (0, \pi/2)$ とおくと

$$\kappa a = z \tan z, \quad \frac{2ma^2 U_0}{\hbar^2} = z^2(1 + \tan^2 z) = \left(\frac{z}{\cos z}\right)^2. \quad (6)$$

関数 $f(z) = z/\cos z$ は $0 < z < \pi/2$ で連続・単調増加し、 $f(0+) = 0$ 、 $f(\pi/2-) = +\infty$ 。したがって**すべての $U_0 > 0$ に対してただ一つの z が存在し、 $\kappa = z \tan z/a > 0$ 。** よって

$$\boxed{\text{任意の } U_0 > 0 \text{ に対して } E < 0 \text{ の偶束縛状態が存在する。}} \quad (7)$$

これは 1 次元短距離引力井戸の特有の性質であり、前半の推測を否定する。

設問 2(c)：浅い井戸 $U_0 \ll \hbar^2/(ma^2)$ のエネルギー

無次元量 $g = 2ma^2 U_0/\hbar^2 \ll 1$ を導入する。 $z \ll 1$ なので

$$g = z^2 \sec^2 z = z^2 + z^4 + O(z^6), \quad \kappa a = z \tan z = z^2 + \frac{1}{3}z^4 + O(z^6). \quad (8)$$

$z^2 = g + O(g^2)$ より $\kappa a = g + O(g^2)$ 。ゆえに

$$\boxed{\kappa \simeq \frac{2maU_0}{\hbar^2}}, \quad \boxed{E \simeq -\frac{2ma^2U_0^2}{\hbar^2}}. \quad (9)$$

一次元では浅い井戸の結合エネルギーは深さの 2 乗で小さくなる。

設問 2(d)：井戸の外側と内側にある確率の比

偶の基底状態の波動関数を用い、規格化係数 A は比で消える。外側の確率

$$P_{\text{out}} = 2|A|^2 \cos^2(qa) \int_a^\infty e^{-2\kappa(x-a)} dx = |A|^2 \frac{\cos^2(qa)}{\kappa}. \quad (10)$$

内側の確率

$$P_{\text{in}} = |A|^2 \int_{-a}^a \cos^2(qx) dx = |A|^2 \left(a + \frac{\sin(2qa)}{2q} \right). \quad (11)$$

したがって、どんな深さでも正確な比は

$$\boxed{R = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \frac{\cos^2(qa)}{\kappa \left(a + \frac{\sin(2qa)}{2q} \right)}}. \quad (12)$$

浅い井戸では $qa \ll 1$, $\kappa a \ll 1$ で $\cos qa \simeq 1$, $\sin(2qa)/(2q) \simeq a$ 。よって

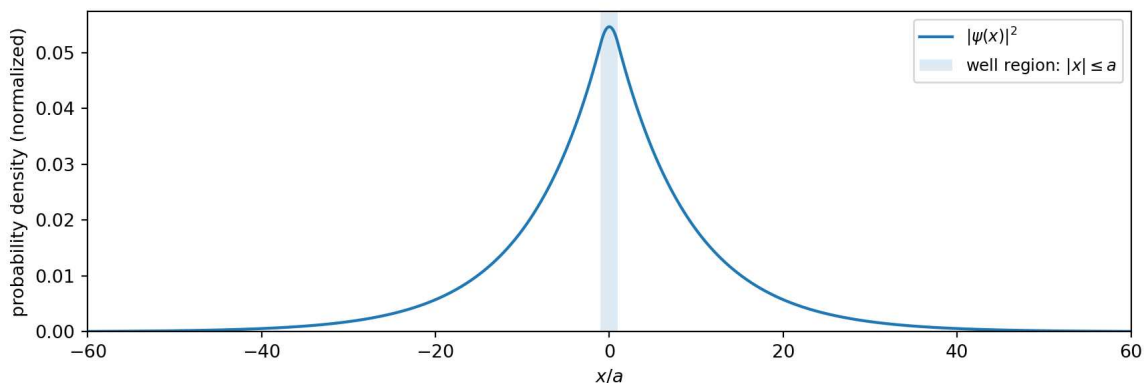
$$\boxed{R \simeq \frac{1}{2\kappa a} \simeq \frac{\hbar^2}{4ma^2U_0} \gg 1}. \quad (13)$$

粒子は束縛されているにもかかわらず、大部分の確率が井戸の**外側**にある。波動関数は長さ $\kappa^{-1} \propto U_0^{-1}$ の領域へ広がり、 $\Delta x \simeq a$ という設問 1 の仮定が成立しなくなる。従って、深さの有限な閾値は生じない。

解析解の数値検算

$\hbar = m = a = 1$ として偶状態の $z/\cos z = \sqrt{2U_0}$ を数値的に解いた。浅い井戸ほど近似が改善する。

U_0	厳密 E	近似 $-2U_0^2$	厳密 R	近似 $1/(4U_0)$
0.01	-0.000194825	-0.000200000	24.9991	25.0000
0.05	-0.00442107	-0.00500000	4.99621	5.00000
0.10	-0.0158982	-0.0200000	2.49340	2.50000



図：浅い有限井戸に束縛された偶基底状態。確率密度は井戸の外側にも長く延びる。

結論： $E < 0$ を厳密に満たす状態が任意に小さい $U_0 > 0$ で存在することと、 $\Delta x \simeq a$ の見積りが破綻することは矛盾しない。束縛状態が浅くなるほど粒子の空間的な広がりが大きくなるためである。

統計力学・量子統計 院試問題・詳解集

2026年度 → 2001年度 全25年度分

2021年度は資料未収録

各年度を「原題 → 解答・解説」の順に掲載

2001～2020年度の旧形式と2022～2026年度の現行形式を併記

年度別目次

年度	収録テーマ	頁
2026	高分子鎖とIsing模型	3
2025	調和トラップ中のBose気体	8
2024	理想気体と吸着平衡	13
2023	Dirac電子・低温比熱	18
2022	Bose凝縮と磁場	23
2020	古典理想気体・Fermi統計	28
2019	2方向スピン模型・転送行列	34
2018	古典理想気体・有限箱Bose気体	39
2017	反強磁性Ising模型	44
2016	連成振動子とフォノンの低温比熱	49
2015	高分子鎖と揺らぎ・応答	53
2014	2次元Fermi気体・2バンド	57
2013	3次元理想Bose気体・断熱磁場変化	62
2012	剛体回転子・オルト／パラ水素	67
2011	三角スピン模型・Brillouin関数	70
2010	2状態鎖状分子とエントロピー	74
2009	Fermi・Bose統計と大分配関数	78
2008	3状態分子と揺らぎ・応答	83
2007	相互作用スピン対の磁化率	86
2006	黒体放射とPlanck分布	89
2005	自由電子気体と熱電子放出	92
2004	2状態鎖状分子・張力・Gibbs自由エネルギー	95
2003	二元合金・平均場・Landau展開・相分離	100
2002	鎖状高分子・エントロピー弾性と電場	105
2001	周期1次元Ising模型・分配関数	108

注：2021年度の原題は収録していません。原題の後に独立解答を配置しています。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2026年度

出題テーマ / 編集上の分類

高分子鎖とIsing模型

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

図1左のように片方の端点(始点)が $x=0$ に固定され、長さ a の棒粒子が N 個連なっている1次元の高分子を考える。各棒粒子は右向きか左向きか2状態のうちどちらかのみを取る。 R は高分子のもう片方の端点(終点)の x 座標であり、右向きの棒粒子の数 N_+ と左向きの棒粒子の数 N_- を用いて $R = (N_+ - N_-)a$ と表される。この高分子が温度 T の熱浴に接している状況を考える。以下の設問に答えよ。

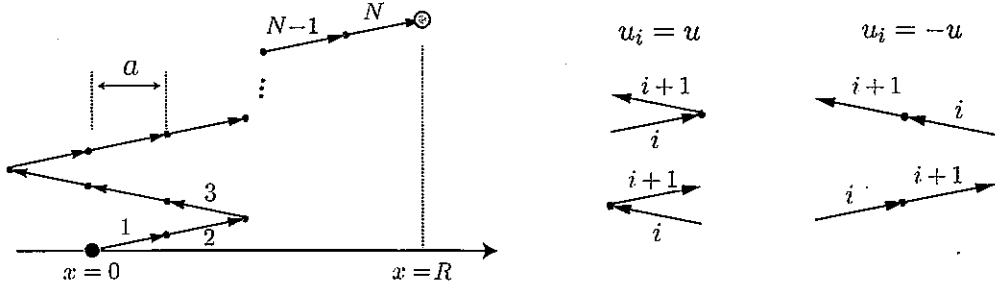


図1: 左: 1次元高分子モデルの構造。右: 連結部分のエネルギー (問3以降で用いる)。

1. N_+ , N_- を指定したときに高分子が取りうる配置の数 $W(N_+, N_-)$ を求め、 N , N_+ , N_- が十分大きいときのエントロピー $S = k_B \ln W$ を $r = R/(Na)$ の関数として求めよ。ここで k_B はボルツマン定数である。必要に応じてスターリングの公式 $\ln N! \simeq N \ln N - N$ を用いてよい。
2. 終点を $x = R = Nar$ で固定するために必要な力のうち、エントロピー由来の力

$$F_S = \frac{T}{Na} \frac{\partial S(r)}{\partial r}$$

を r , T , a の関数として求め、 r が小さいときにフックの法則が現れることを示せ。

次に、 i 番目の棒粒子と $i+1$ 番目の棒粒子の連結部分のエネルギー u_i を考慮に入れる。連結部分は曲がっている状態とまっすぐな状態とのどちらかを取り、図1右のようにそれぞれのエネルギーは u , $-u$ であるとする。また、高分子の終点には電荷 $+1$ が付加されており、電場 h が x 軸に沿って正の向きにかかっている。 i 番目の棒粒子の向きの変数 σ_i を導入し、右向きのとき $\sigma_i = 1$, 左向きのとき $\sigma_i = -1$ とすると、この高分子のエネルギーは

$$U(\{\sigma\}) = -u \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1} - ha \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

と表され、1次元のイジング模型と等価になる。以下の設問に答えよ。

3. 棒粒子の向きの変数 σ_i , σ_{i+1} に依存する関数 $M_{\sigma_i, \sigma_{i+1}} = \exp[\beta u \sigma_i \sigma_{i+1} + \beta ha(\sigma_i + \sigma_{i+1})/2]$ を使って行列 M を

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,-1} \\ M_{-1,1} & M_{-1,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\beta u + \beta ha} & e^{-\beta u} \\ e^{-\beta u} & e^{\beta u - \beta ha} \end{pmatrix}$$

とする。このとき、行列 M の 2 乗 M^2 の成分 $(M^2)_{1,1}, (M^2)_{1,-1}, (M^2)_{-1,1}, (M^2)_{-1,-1}$ は

$$(M^2)_{\sigma_1, \sigma_3} = \sum_{\sigma_2=\pm 1} M_{\sigma_1, \sigma_2} M_{\sigma_2, \sigma_3} = \sum_{\sigma_2=\pm 1} \exp \left[\beta u \sum_{i=1}^2 \sigma_i \sigma_{i+1} + \beta h a \sum_{i=1}^3 \sigma_i - \boxed{} \right]$$

と書ける。ここで $\beta = 1/(k_B T)$ である。 $\boxed{}$ を埋めよ。

4. この系の分配関数は

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm 1, \sigma_N=\pm 1} (M^{N-1})_{\sigma_1, \sigma_N} \exp [\boxed{}]$$

と書ける。 $\boxed{}$ を埋めよ。

5. 棒粒子 1 つあたりの自由エネルギー

$$f(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{-k_B T \ln Z}{N}$$

を求めよ。ただし、必要に応じて行列 M の固有値

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta u} \cosh(\beta h a) \pm \sqrt{e^{2\beta u} \sinh^2(\beta h a) + e^{-2\beta u}}$$

を用いてよい。

6. $f(h)$ を $h = 0$ の付近で $\beta h a$ の 2 次まで展開した表式を求めよ。ただし、小さい δ に対して $\cosh(\delta) \simeq 1 + \delta^2/2$, $\sinh(\delta) \simeq \delta$ となることを用いてよい。

7. r の関数としての自由エネルギー $g(r)$ は逆ルジャンドル変換により

$$g(r) = \min_h [f(h) + r a h] = f(h^*(r)) + r a h^*(r)$$

と求まる。ここで、 $h^*(r)$ は $r a = -\frac{\partial f}{\partial h}$ を満たす h である。問 6 の結果を用いて、 $h^*(r)$ を r の最低次の関数として求めよ。

8. 電場がないとき ($h = 0$) に終点を $x = R = N a r$ で固定するために必要な力

$$F = -\frac{1}{a} \frac{\partial g(r)}{\partial r}$$

を、 r が小さいときについて r , T , a , u の関数として求めよ。また、 F と問 2 で求めた F_S をそれぞれ R , T , N , a , u の関数として表したとき、 F_S の表式において棒粒子の長さ a を実効的な棒粒子の長さ $\bar{a}$ に置き換えることで F が得られることを示し、 u が正の場合、負の場合それぞれについて、 $\bar{a}$ と a の大小関係を答えよ。また、なぜそのようなのか、物理的な解釈を述べよ。

2026 年度・統計力学第 2 問

高分子のエントロピー弾性から 1 次元 Ising 模型へ

大学院理学系研究科物理学専攻・入学試験（独立解答）

出典と収録範囲：添付原本「R8Master.pdf（原本 4-5 ページ）」第 2 問。原題は解答の直前に画像で収録する。全設問を解説。これは東京大学の公式模範解答ではない。

問題全体の見通し

長さ a の棒状分子を N 本つないだ 1 次元鎖を考える。前半は右向き・左向きの配置数から弾性力を導く。後半では隣接する向きの相互作用を導入し、1 次元 Ising 模型の転送行列から熱力学極限の自由エネルギーと小伸長弾性を計算する。 $r = R/(Na) \in [-1, 1]$ 、 $\beta = (k_B T)^{-1}$ とする。

問 1：配置数とエントロピー

右向き N_+ 、左向き N_- のとき $N_+ + N_- = N$ 、 $R = a(N_+ - N_-)$ 。区別できる棒の向きを指定する組合せの数は

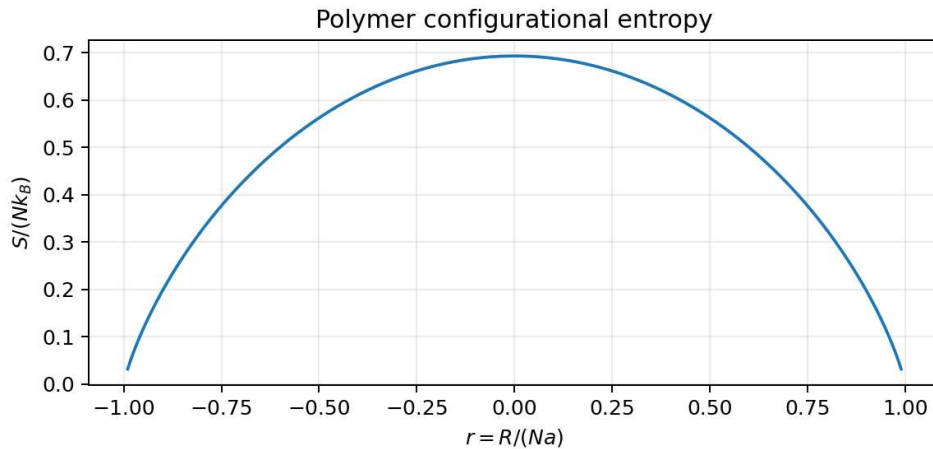
$$W(N_+, N_-) = \frac{N!}{N_+! N_-!}, \quad N_{\pm} = \frac{N}{2}(1 \pm r). \quad (1)$$

Stirling 近似 $\ln n! \simeq n \ln n - n$ より、 $-1 < r < 1$ で

$$S(r) = k_B \ln W \simeq N k_B \left[-\frac{1+r}{2} \ln \frac{1+r}{2} - \frac{1-r}{2} \ln \frac{1-r}{2} \right] \quad (2)$$

$$= N k_B \left[\ln 2 - \frac{1+r}{2} \ln(1+r) - \frac{1-r}{2} \ln(1-r) \right]. \quad (3)$$

S は $r = 0$ で最大。 $|r|$ を大きくするほど向きを選ぶ自由度が減るため、エントロピーは減少する。



問 2：エントロピー起源の力と Hooke の法則

問題で定義された力は $F_S = T(\partial S / \partial r) / (Na)$ である。問 1 を微分すると

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{N k_B}{2} \ln \frac{1-r}{1+r} = -N k_B \operatorname{artanh} r, \quad (4)$$

$$F_S(r) = -\frac{k_B T}{a} \operatorname{artanh} r = -\frac{k_B T}{2a} \ln \frac{1+r}{1-r}. \quad (5)$$

$|r| \ll 1$ では $\operatorname{artanh} r = r + r^3/3 + \dots$ なので

$$F_S \simeq -\frac{k_B T}{a} r = -\frac{k_B T}{Na^2} R. \quad (6)$$

これは小伸長での Hooke 則 $F = -KR$ 、有効ばね定数 $K = k_B T / (Na^2)$ を表す。 T に比例する点がエントロピー弾性の特徴である。

問 3：転送行列を二回かけるときの端点補正

向き $\sigma_i = \pm 1$ に対し、原題に与えられたエネルギーは $U = -u \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1} - ha \sum_{i=1}^N \sigma_i$ 。転送行列を

$$M_{\sigma,\tau} = \exp\left(\beta u \sigma \tau + \frac{\beta ha}{2}(\sigma + \tau)\right), \quad M = \begin{pmatrix} e^{\beta u + \beta ha} & e^{-\beta u} \\ e^{-\beta u} & e^{\beta u - \beta ha} \end{pmatrix} \quad (7)$$

とおく。 $(M^2)_{\sigma_1, \sigma_3} = \sum_{\sigma_2 = \pm 1} M_{\sigma_1 \sigma_2} M_{\sigma_2 \sigma_3}$ であり、指数は

$$\beta u(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3) + \beta ha(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \boxed{\frac{\beta ha}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)}. \quad (8)$$

したがって原題の空欄は $\boxed{\beta ha(\sigma_1 + \sigma_3)/2}$ となる。これは内部のスピンに比べ、端点の磁場エネルギーが各転送行列では半分しか計上されないことを補う。

問 4：分配関数の正確な端点因子

長さ N の鎖で M^{N-1} を掛けると、内部の $\sigma_2, \dots, \sigma_{N-1}$ は磁場項に 1 回分、両端 σ_1, σ_N は半分しか入らない。そのため

$$Z_N(h) = \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \sum_{\sigma_N = \pm 1} (M^{N-1})_{\sigma_1, \sigma_N} \exp\left[\frac{\beta ha}{2}(\sigma_1 + \sigma_N)\right]. \quad (9)$$

原題の空欄は $\boxed{\beta ha(\sigma_1 + \sigma_N)/2}$ である。これにより有限 N の分配関数が正確に再現される。

問 5：熱力学極限と自由エネルギー

固有値は問題に与えられた

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta u} \cosh(\beta ha) \pm \sqrt{e^{2\beta u} \sinh^2(\beta ha) + e^{-2\beta u}}. \quad (10)$$

有限温度では $\lambda_+ > |\lambda_-|$ が成立する。端点の寄与は $N \rightarrow \infty$ で無視できるため、 $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \ln Z_N = \ln \lambda_+$ 。従って

$$f(h) = -k_B T \ln \left[e^{\beta u} \cosh(\beta ha) + \sqrt{e^{2\beta u} \sinh^2(\beta ha) + e^{-2\beta u}} \right]. \quad (11)$$

$h = 0$ では $\lambda_+ = e^{\beta u} + e^{-\beta u} = 2 \cosh(\beta u)$ 。

$$\boxed{f(0) = -k_B T \ln[2 \cosh(\beta u)]}. \quad (12)$$

問 6：弱電場での自由エネルギーの二次展開

$H = \beta ha$ 、 $U = \beta u$ とおく。 H が小さいとき

$$\cosh H = 1 + \frac{1}{2}H^2 + O(H^4), \quad (13)$$

$$\sqrt{e^{2U} \sinh^2 H + e^{-2U}} = e^{-U} \left[1 + \frac{1}{2}e^{4U} H^2 + O(H^4) \right]. \quad (14)$$

したがって $\lambda_+(H) = 2 \cosh U [1 + \frac{1}{2}e^{2U} H^2 + O(H^4)]$ 。対数を取れば

$$\boxed{f(h) = -k_B T \ln(2 \cosh \beta u) - \frac{\beta a^2 e^{2\beta u}}{2} h^2 + O(h^4)}. \quad (15)$$

一次の項がないのは $h \mapsto -h$ で模型が対称なためである。 $-f''(0) = \beta a^2 e^{2\beta u}$ は一分子当たりの線形応答率である。

問 7：Legendre 変換で伸長を固定する

問題が与えた $g(r) = \min_h \{f(h) + rah\}$ を用いる。停留条件は

$$ra = -f'(h) = \beta a^2 e^{2\beta u} h + O(h^3), \quad \boxed{h^*(r) = \frac{k_B T}{a} e^{-2\beta u} r + O(r^3)}. \quad (16)$$

これを $f(h) + rah$ に代入すれば

$$g(r) = -k_B T \ln(2 \cosh \beta u) + \frac{k_B T}{2} e^{-2\beta u} r^2 + O(r^4). \quad (17)$$

ここで g は棒 1 本当りの自由エネルギーである。 h^* を変分変数として最小化するのは、 $f(h)$ が h に関して凹であるため、厳密には符号に注意を要する。

原題への数学的注記：表記 $g(r) = \min_h [f(h) + rah]$ は、 $f''(h) < 0$ となる実際の Ising 自由エネルギーでは大域的な最小値を持たない。正しい Legendre–Fenchel 変換は $g(r) = \sup_h [f(h) + rah]$ (あるいは停留点による定義) である。本解答では設問の停留条件 $ra = -f'(h)$ を用いており、求める小 r 展開はこの定義で正しい。

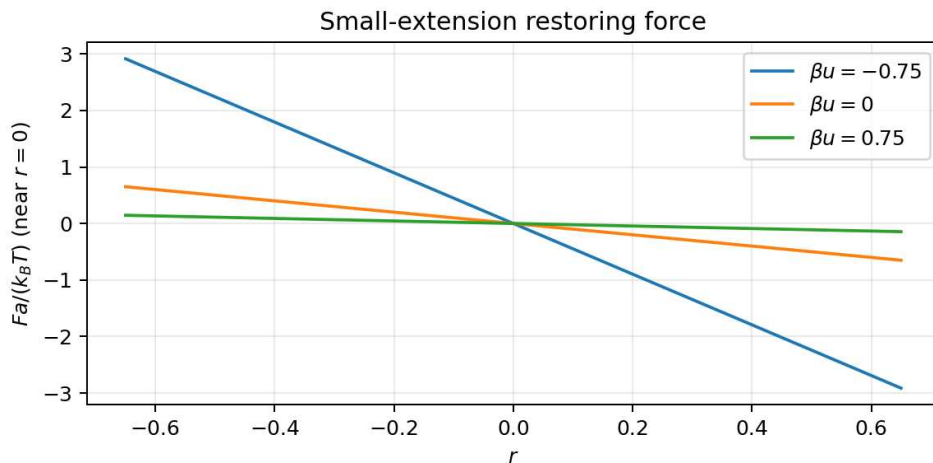
問 8：有効分子長と相互作用の物理的意味

$$F = -\frac{1}{a} \frac{\partial g}{\partial r} \simeq -\frac{k_B T}{a} e^{-2\beta u} r = -\frac{k_B T}{Na^2} e^{-2\beta u} R. \quad (18)$$

問 2 の $F_S \simeq -k_B TR/(Na^2)$ と比較すると

$$\tilde{a} = ae^{\beta u}, \quad F \simeq -\frac{k_B T}{N\tilde{a}^2} R. \quad (19)$$

$u > 0$ は隣接棒が同方向を好む強磁性的結合で、鎖が相関を保ちやすくなり $\tilde{a} > a$ (柔らかい)。 $u < 0$ は交互配向を好み、 $\tilde{a} < a$ (硬い)。この一致は $|r| \ll 1$ と $N \rightarrow \infty$ の線形応答に限られ、相関長が鎖全体と同程度なら有限サイズの補正を考える必要がある。



最終チェック

- 配置数 W から $S(r)$ 、さらに F_S へ微分できること。
- 転送行列の端点の磁場項を半分ずつ配置する理由。
- λ_+ 支配の熱力学極限と $f(h)$ の偶関数性。
- Legendre 変換の「最小化」と「最大化」の違いを理解すること。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2025年度

出題テーマ / 編集上の分類

調和トラップ中のBose気体

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

質量 m で相互作用がなく、同一で互いに判別不能な N 個のボース粒子が、固有振動数 ω の調和振動子ポテンシャルのもと、温度 T の平衡状態にある。ハミルトニアン $\hat{H}$ は、一粒子のハミルトニアン

$$\hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \frac{3}{2} \hbar \omega \quad (1)$$

を使って $\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{H}_i$ で与えられ、一粒子のエネルギー固有値は

$$E_{n_x, n_y, n_z} = (n_x + n_y + n_z) \hbar \omega \quad (n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

である。ここで、 $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものであり、式 (1) の最後の定数項は、ゼロ点エネルギーがゼロとなるように付け加えた。以下、粒子数 N は十分大きいとする。また、 k_B をボルツマン定数とし、 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ とする。

(A) このボース気体の高温領域 $\beta \hbar \omega \ll 1$ での性質を考えよう。

1. カノニカル分布に基づいて、一粒子の分配関数 Z_1 を求めよ。
2. 高温領域 $\beta \hbar \omega \ll 1$ において、相互作用のない N 粒子系の分配関数が $Z = \frac{1}{N!} (Z_1)^N$ で与えられることを使って、エネルギー期待値 $\langle \hat{H} \rangle$ を近似的に求めよ。
3. 高温領域 $\beta \hbar \omega \ll 1$ は古典極限に相当するが、そこで得たエネルギー期待値は、一様な単原子分子理想気体の内部エネルギーの公式 $U = \frac{3}{2} N k_B T$ と異なる。この違いが何に起因するか、古典統計力学におけるエネルギー等分配則に基づいて考察しよう。一般化座標および一般化運動量を ξ_i と書くことにして、ハミルトニアンがその二次式として $H(\xi_1, \dots, \xi_{N'}) = \sum_{i=1}^{N'} \alpha_i \xi_i^2 (\alpha_i > 0)$ のように書けるとき、カノニカル分布におけるエネルギー期待値は $\langle H \rangle = \frac{N'}{2} k_B T$ となる。これに基づいて、式 (1) の系の高温領域でのエネルギー期待値が問2の結果となる理由、また一様な単原子分子理想気体の内部エネルギーが $U = \frac{3}{2} N k_B T$ となる理由を、ハミルトニアンの形と関連付けて説明せよ。
4. $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ とすると、高温領域における r_i^2 の期待値は $\langle r_i^2 \rangle \simeq 3 \frac{k_B T}{m \omega^2}$ となり、粒子は実効的に体積 $V = \frac{4}{3} \pi \langle r_i^2 \rangle^{3/2} \simeq 4 \sqrt{3} \pi \left(\frac{k_B T}{m \omega^2} \right)^{3/2}$ の領域に閉じ込められていることがわかる。従って、 ω または T を変えることで体積 V を変化させることができる。このことと、熱力学においてヘルムホルツ自由エネルギー F と圧力 p の間に成り立つ関係式を使って、圧力 p を表す式を求め、 $\frac{\partial F}{\partial \omega}$, $\frac{\partial F}{\partial T}$, m, ω, β の中から必要なものを用いて表せ。
5. 前問の結果とカノニカル分布を使って、高温領域 $\beta \hbar \omega \ll 1$ における圧力 p を求め、 ω を使わず V を使って表せ。

(B) 同じボース気体について、量子統計に基づいて低温での性質を議論しよう。化学ポテンシャルを $\mu(\leq 0)$ とすると、ボース分布関数

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} - 1} \quad (3)$$

および一粒子の状態密度 $D(E) = \frac{d\Omega}{dE}$ を使って、粒子数 N は

$$N = N_0 + \int_0^\infty f(E)D(E)dE \quad (4)$$

と表すことができる。ここで、 $\Omega(E)$ は一粒子の状態数、すなわち $E_{n_x, n_y, n_z} \leq E$ となる状態の数であり、 N_0 は基底状態粒子数である。

6. $E \gg \hbar\omega$ の場合に成り立つ、 $\Omega(E)$ の近似的な表式を求めよ。

7. 基底状態粒子数 N_0 が無視できる場合に逆温度 β が満たすべき不等式を導出し、ボース・アインシュタイン凝縮の転移温度 T_c を求めよ。ボース・アインシュタイン凝縮とは、巨視的な数の粒子が基底状態をとり、 N に比べて N_0 が無視できなくなる状態を指す。解答には以下の関数 $\eta_s(x)$ を使って良い。定義域は $x \leq 0$ 、パラメータ s は $s > 1$ とする。

$$\eta_s(x) = \int_0^\infty \frac{y^{s-1}}{e^{y-x} - 1} dy \quad (5)$$

この関数は x について単調増加し、 $\eta_s(0) > 0$ である。

8. 凝縮相 $T < T_c$ における基底状態粒子数 N_0 を求め、 N, T, T_c を使って表せ。

2025 年度・統計力学第 2 問

調和トラップ中のボース気体と Bose-Einstein 凝縮

大学院理学系研究科物理学専攻・入学試験（独立解答）

出典と収録範囲：添付原本「R7Master.pdf（原本 6-7 ページ）」第 2 問。原題は解答の直前に画像で収録する。全設問を解説。これは東京大学の公式模範解答ではない。

問題全体の見通し

相互作用せず、同一で区別できない N 個のボース粒子を 3 次元等方的調和トラップに閉じ込める。基底エネルギーを 0 とした一粒子準位は

$$E_{n_x n_y n_z} = (n_x + n_y + n_z)\hbar\omega, \quad n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

(A) の高温では古典 Boltzmann 近似、(B) の低温では Bose 分布を用いる。 $\beta = (k_B T)^{-1}$ 、 $x = \beta\hbar\omega$ と置く。

(A) 問 1：一粒子分配関数

3 軸方向の量子数は独立で、等比級数の積で求まる。

$$Z_1 = \sum_{n_x, n_y, n_z \geq 0} e^{-x(n_x + n_y + n_z)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-xn} \right)^3 = \boxed{\frac{1}{(1 - e^{-x})^3}}. \quad (2)$$

$E = 0$ にゼロ点エネルギーを合わせた設定なので、各軸の $e^{-x/2}$ 因子はない。

(A) 問 2：高温でのエネルギー期待値

問題に指定された古典極限での多粒子分配関数は $Z = Z_1^N / N!$ 。 $N!$ は β に依らないから

$$\langle \hat{H} \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln Z_1}{\partial \beta} = \boxed{\frac{3N\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}}. \quad (3)$$

$x \ll 1$ で $(e^x - 1)^{-1} = x^{-1} - 1/2 + x/12 + O(x^3)$ 。従って

$$\boxed{\langle \hat{H} \rangle = 3Nk_B T - \frac{3N\hbar\omega}{2} + \frac{N(\hbar\omega)^2}{4k_B T} + O\left(\frac{N(\hbar\omega)^4}{(k_B T)^3}\right)} \quad (4)$$

で、最高次は $3Nk_B T$ である。

(A) 問 3：通常の単原子分子理想気体との違い

3 次元自由粒子は p_x^2, p_y^2, p_z^2 の 3 個の独立二次項のみなので等分配則により $U = 3Nk_B T/2$ 。対して調和トラップの古典ハミルトニアンは

$$H_{\text{cl}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=x,y,z} \left(\frac{p_{ij}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_{ij}^2}{2} \right) \quad (5)$$

で、運動量 3 個に加えて位置 3 個の二次項がある。全 6 項 $\times k_B T/2$ だから $\langle H \rangle = 3Nk_B T$ 。問題のエネルギーは $-3N\hbar\omega/2$ の基底点補正を含んでおり、高温ではこの有限の差が相対的に小さくなる。

(A) 問 4：トラップの有効体積と圧力

原題は粒子分布の代表半径から、有効体積

$$V \simeq 4\sqrt{3}\pi \left(\frac{k_B T}{m\omega^2} \right)^{3/2} \quad (6)$$

を定義する。温度一定のとき $V \propto \omega^{-3}$ 、従って $\partial \ln \omega / \partial V = -1/(3V)$ 。 $x \ll 1$ では

$$Z_1 \simeq \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3, \quad F_H = -k_B T \ln(Z_1^N / N!) \simeq 3Nk_B T \ln(\beta\hbar\omega) + k_B T \ln N!. \quad (7)$$

よって

$$\boxed{p = -\left(\frac{\partial F_H}{\partial V} \right)_{T,N} = -3Nk_B T \frac{\partial \ln \omega}{\partial V} = \frac{Nk_B T}{V}}. \quad (8)$$

この p は、通常の容器壁がなくても「有効体積を変える一般化力」として定義できる。

(A) 問 5：状態方程式

前問より高温・古典極限では

$$pV = Nk_B T. \quad (9)$$

調和トラップに閉じ込めた気体でも、適切な体積の定義に対して理想気体の状態方程式に一致する。

(B) 問 6：積算状態数と状態密度

エネルギー E 以下は $n_x + n_y + n_z \leq q = \lfloor E/(\hbar\omega) \rfloor$ を満たす非負整数の組である。 $n_x + n_y + n_z = k$ の組は $\binom{k+2}{2}$ 個だから

$$\Omega(E) = \sum_{k=0}^q \binom{k+2}{2} = \left[\binom{q+3}{3} = \frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{6} \right]. \quad (10)$$

$E \gg \hbar\omega$ では $q \simeq E/(\hbar\omega)$ より

$$\Omega(E) \simeq \frac{E^3}{6(\hbar\omega)^3}, \quad D(E) = \frac{d\Omega}{dE} \simeq \frac{E^2}{2(\hbar\omega)^3}. \quad (11)$$

離散的な状態密度を連続関数として扱う近似で、基底の $E = 0$ は別の項 N_0 に分離する。

(B) 問 7：凝縮温度と非凝縮条件

Bose 分布 $f(E) = [e^{\beta(E-\mu)} - 1]^{-1}$ を用いる。基底エネルギーが 0 なので $\mu \leq 0$ 。励起状態の粒子数は

$$N_{\text{ex}}(T, \mu) = \int_0^\infty \frac{E^2 dE}{2(\hbar\omega)^3 [e^{\beta(E-\mu)} - 1]} \quad (12)$$

$$= \frac{(k_B T)^3}{2(\hbar\omega)^3} \eta_3(\beta\mu), \quad \eta_s(z) = \int_0^\infty \frac{y^{s-1} dy}{e^{y-z} - 1}. \quad (13)$$

η_3 は単調増加なので、 $\mu \leq 0$ から $N_{\text{ex}} \leq (k_B T/\hbar\omega)^3 \eta_3(0)/2$ 。幾何級数を積分して

$$\eta_3(0) = \sum_{\ell=1}^\infty \int_0^\infty y^2 e^{-\ell y} dy = 2 \sum_{\ell=1}^\infty \ell^{-3} = 2\zeta(3). \quad (14)$$

従って凝縮せず $N_0 \simeq 0$ とみなせるための条件は

$$N \leq \zeta(3) \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 \iff T \geq T_c, \quad T_c = \frac{\hbar\omega}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3}. \quad (15)$$

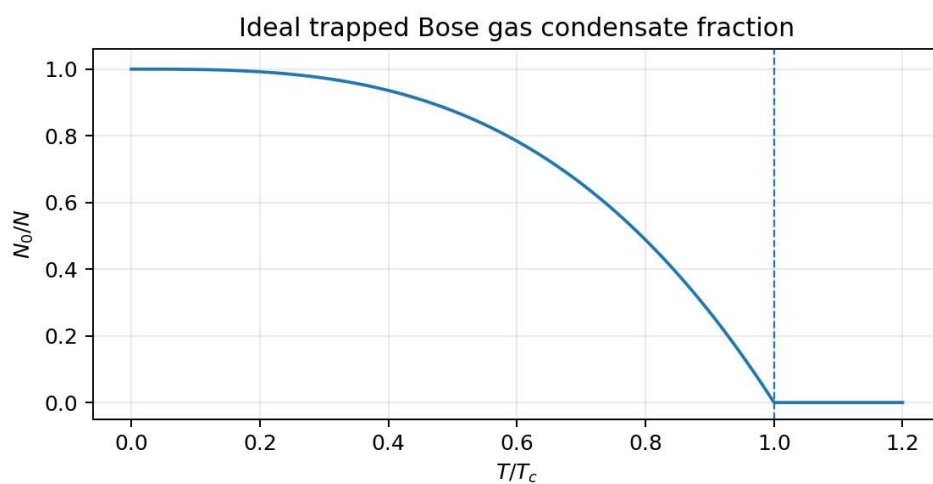
T_c は大粒子数の連続状態密度近似における転移温度である。

(B) 問 8：凝縮温度以下の基底粒子数

$T < T_c$ では $\mu \simeq 0$ に張り付き、励起状態は最大収容数 $N_{\text{ex}} \simeq \zeta(3)(k_B T/\hbar\omega)^3$ まで占有される。従って

$$N_0 = N - N_{\text{ex}} \simeq N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \right], \quad (T < T_c). \quad (16)$$

温度が T_c に近づくと連続的に $N_0/N \rightarrow 0$ 。これは熱力学極限近似の結果で、有限個のトラップ粒子では厳密な非解析的相転移ではない。



最終チェック

- 高温の Boltzmann 近似 $Z = Z_1^N/N!$ と低温の Bose 分布を混同しない。
- 基底エネルギーを 0 にした効果と、自由粒子との等分配則の差を区別する。
- $D(E) \propto E^2$ が $N_{\text{ex}} \propto T^3$ を生むことを確認する。
- $\eta_3(0) = 2\zeta(3)$ の係数 2 を落とさない。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2024年度

出題テーマ / 編集上の分類

理想気体と吸着平衡

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

容器の中に同一種の単原子分子 $N (\gg 1)$ 個からなる理想気体が閉じ込められている (図1)。各分子の質量は m であり、分子は互いに区別できない。容器にはピストンが付いており、容器内の体積を変化させることができる。この系を古典統計力学に基づいて考察する。プランク定数を h 、ボルツマン定数を k として以下の設問に答えよ。必要であれば定数 $a > 0$ に対して $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ であること、および、 $N \gg 1$ に対して $\log N! \simeq N \log N - N$ が成り立つことを使ってよい。また、解答に際しては $\alpha = \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ を用いてよい。

まず、容器内の絶対温度と体積をそれぞれ T 、 V に保った平衡状態を考える。

1. N 個の気体分子に対する分配関数を $Z(T, V, N)$ とする。 $z_1(T, V) = Z(T, V, 1)$ を求めよ。また、 $Z(T, V, N)$ を $z_1(T, V)$ と N を用いて表せ。
2. ヘルムホルツの自由エネルギー $F(T, V, N)$ を求めよ。
3. 設問2で求めた $F(T, V, N)$ が示量性を持つことを示せ。
4. 気体のエネルギーを E とする。 $\langle E \rangle$ を求めよ。また、比 $\frac{\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle}{\langle E \rangle^2}$ を評価せよ。ただし、 $\langle A \rangle$ はカノニカル分布に関する A の期待値を表す。
5. エントロピー S を求めよ。

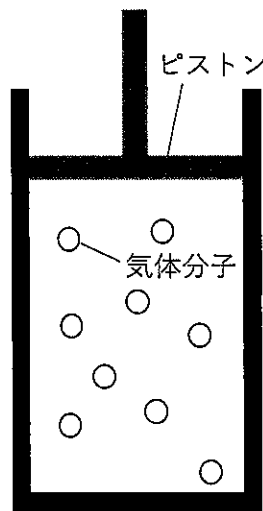


図1: 容器内に閉じ込められた理想気体

次に、容器内の絶対温度と圧力をそれぞれ T , p に保った平衡状態を考える。

6. 容器内の体積 V を求めよ。

7. 化学ポテンシャル μ を T , p の関数として表せ。

更に、気体を閉じ込めている容器内 (図 1) の底面の状態について考える。底面には、1 サイトあたり高々1 個の気体分子を吸着する吸着サイトが M 個存在する (図 2)。ただし、 $N \gg M \gg 1$ とする。吸着サイト 1 個あたりのエネルギーは、分子を吸着しているとき $-\epsilon$ ($\epsilon > 0$)、吸着していないとき 0 であるとし、各吸着サイトは独立に分子を吸着するとする。

8. M 個の吸着サイトに対する大分配関数 $\Xi(T, \mu, M)$ を求めよ。

9. 吸着サイトが分子を吸着している割合 θ を T , μ の関数として表せ。

10. T を一定に保ち θ を圧力 p の関数として表したときのグラフの概形を図示せよ。

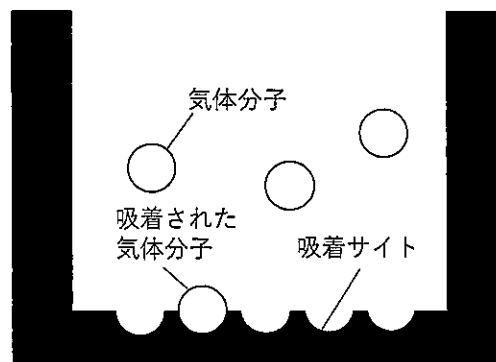


図 2: 容器内の底面の様子

2024 年度・統計力学第 2 問

単原子理想気体と Langmuir 型の分子吸着平衡

大学院理学系研究科物理学専攻・入学試験（独立解答）

出典と収録範囲：添付原本「R6Master.pdf（原本 6-7 ページ）」第 2 問。原題は解答の直前に画像で収録する。全設問を解説。これは東京大学の公式模範解答ではない。

問題全体の見通し

質量 m の同種単原子粒子 $N \gg 1$ 個からなる古典理想気体を扱う。まずカノニカル分布から状態方程式、自由エネルギーとエントロピーを導き、次に化学ポテンシャルを用いて表面の吸着サイトの占有率を求める。原題の指定に従い

$$\alpha = \left(\frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2}, \quad \beta = (k_B T)^{-1} \quad (1)$$

と定義する（ここで h は Planck 定数、 $\hbar = h/(2\pi)$ ）。

問 1：一粒子および N 粒子の分配関数

一粒子の Hamilton 関数は $H_1 = \mathbf{p}^2/(2m)$ 。位相空間で積分すると

$$z_1(T, V) = \frac{1}{h^3} \int_V d^3x \int_{\mathbb{R}^3} d^3p e^{-\beta \mathbf{p}^2/(2m)} = \frac{V}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \quad (2)$$

$$= \boxed{V \alpha (k_B T)^{3/2}}. \quad (3)$$

粒子は同種で区別できず、古典的な希薄気体なので Gibbs 補正 $N!$ を割る：

$$Z(T, V, N) = \frac{z_1(T, V)^N}{N!} = \frac{[V \alpha (k_B T)^{3/2}]^N}{N!}. \quad (4)$$

問 2：Helmholtz 自由エネルギー

$F = -k_B T \ln Z$ 、 $\ln N! \simeq N \ln N - N$ を用いると

$$F(T, V, N) = -N k_B T \left\{ \ln \left[\frac{V \alpha (k_B T)^{3/2}}{N} \right] + 1 \right\}. \quad (5)$$

熱的 de Broglie 波長 $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ を使えば $F = -N k_B T [\ln(V/(N \lambda_T^3)) + 1]$ とも書ける。

問 3：自由エネルギーの示量性

T を固定し、 $V \rightarrow \gamma V$ 、 $N \rightarrow \gamma N$ とする。比 V/N は変化しないため

$$F(T, \gamma V, \gamma N) = \gamma F(T, V, N). \quad (6)$$

従って F は熱力学極限で示量変数 V, N に関して 1 次同次であり、示量性を満たす。

問 4：エネルギーと相対揺らぎ

カノニカル分布では $\langle E \rangle = -\partial_\beta \ln Z$ 、 $\text{Var}(E) = \partial_\beta^2 \ln Z$ 。 $Z \propto \beta^{-3N/2}$ から

$$\langle E \rangle = \frac{3N}{2\beta} = \frac{3}{2} N k_B T, \quad \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \frac{3N}{2\beta^2} = \frac{3}{2} N (k_B T)^2. \quad (7)$$

問題の要求する相対分散は

$$\frac{\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle}{\langle E \rangle^2} = \frac{2}{3N}. \quad (8)$$

相対標準偏差は $\sqrt{2/(3N)}$ なので、熱力学的に大きい N ではエネルギーは鋭く集中する。

問 5：エントロピー

熱力学恒等式 $S = -(\partial F/\partial T)_{V,N}$ で、 $F = -Nk_B T[A(T) + 1]$ 、 $A(T) = \ln(V\alpha(k_B T)^{3/2}/N)$ とおくと $TA'(T) = 3/2$ 。よって

$$S = Nk_B \left[\ln \left(\frac{V\alpha(k_B T)^{3/2}}{N} \right) + \frac{5}{2} \right]. \quad (9)$$

これは Sackur-Tetrode 型の古典理想気体の式で、量子縮退が無視できる範囲で成立する。

問 6：温度 T ・圧力 p 指定時の体積

F を微分して $p = -(\partial F/\partial V)_{T,N} = Nk_B T/V$ 。従って

$$V = \frac{Nk_B T}{p}. \quad (10)$$

問 7：化学ポテンシャル

固定 T, V で $\mu = (\partial F/\partial N)_{T,V}$ とすると

$$\mu = k_B T \ln \left[\frac{N}{V\alpha(k_B T)^{3/2}} \right]. \quad (11)$$

前問の $N/V = p/(k_B T)$ を代入して

$$\mu(T, p) = k_B T \ln \left[\frac{p}{\alpha(k_B T)^{5/2}} \right]. \quad (12)$$

吸着粒子と気相粒子の平衡では、この μ が共通になる。

問 8：独立な吸着サイトの大分配関数

各サイトの占有数は $n = 0$ または $n = 1$ 。空ならエネルギー 0、吸着時は $-\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$)。1 サイトの grand partition function は

$$\Xi_1 = \sum_{n=0}^1 e^{-\beta(E_n - \mu n)} = 1 + e^{\beta(\mu + \varepsilon)}. \quad (13)$$

M サイトが独立なので

$$\Xi(T, \mu, M) = \left[1 + e^{\beta(\mu + \varepsilon)} \right]^M. \quad (14)$$

問 9：吸着サイトの占有率

平均吸着粒子数は $\langle n_{\text{ads}} \rangle = \beta^{-1} \partial_\mu \ln \Xi$ 。占有率 $\theta = \langle n_{\text{ads}} \rangle / M$ は

$$\theta = \frac{e^{\beta(\mu + \varepsilon)}}{1 + e^{\beta(\mu + \varepsilon)}} = \frac{1}{1 + e^{-\beta(\mu + \varepsilon)}}. \quad (15)$$

$\mu(T, p)$ を代入し、 $K(T) = \alpha(k_B T)^{5/2} e^{-\varepsilon/(k_B T)}$ とおけば

$$\theta(T, p) = \frac{p}{p + K(T)}. \quad (16)$$

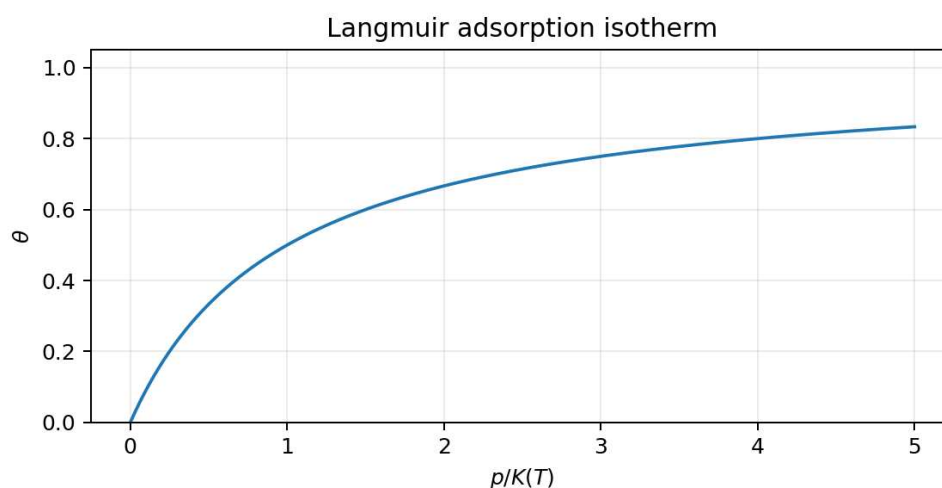
圧力が $K(T)$ に等しいとき $\theta = 1/2$ 。これは独立・単層吸着を仮定した Langmuir 型の吸着等温式である。

問 10：温度一定の吸着曲線

$K(T) > 0$ を固定して $p \geq 0$ で $\theta = p/(p + K)$ を考える。微分すれば

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{K}{(p + K)^2} > 0, \quad \frac{d^2\theta}{dp^2} = -\frac{2K}{(p + K)^3} < 0. \quad (17)$$

従って $\theta(0) = 0$ から単調増加・上に凸（数学的には二階微分負、凹関数）で 1 へ漸近する。



低圧では $\theta \simeq p/K$ 、高圧では $\theta \rightarrow 1$ 。各サイトに分子は 1 個しか吸着できないため、いくら圧力を高めても占有率は 1 を超えない。

最終チェック

- 古典的同種粒子の Gibbs 補正 $1/N!$ を忘れない。
- 相対分散 $2/(3N)$ と相対標準偏差 $\sqrt{2/(3N)}$ を混同しない。
- $pV = Nk_B T$ を介して $\mu(T, p)$ を得る。
- 吸着等温式は独立サイト・二値占有・吸着エネルギー固定の仮定に依存する。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2023 年度

出題テーマ / 編集上の分類

Dirac電子・低温比熱

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

温度 T 、化学ポテンシャル μ の粒子浴に接している電子の集団をグランドカノニカル分布で考える。系は一辺が L 、体積 $V = L^3$ の立方体であるとし、周期境界条件が課されているとする。以下では電子間の相互作用は無視できるとし、スピンの自由度は考えなくてよい。また、記号 i は虚数単位を表すものとする。

物質のなかでもディラック半金属やワイル半金属とよばれる物質中の電子は、真空中とは大きく異なる運動エネルギーを持つ。ここではそれらを簡略化した模型として、波数 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ の電子が2成分の内部自由度をもつ場合を考えよう。位置 $\mathbf{x}$ における電子の波動関数は

$$\psi(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\phi(\mathbf{k}), \quad \phi(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{k}) \\ \phi_2(\mathbf{k}) \end{pmatrix}$$

と表せるとし、 $\phi(\mathbf{k})$ は固有値方程式

$$H(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}\phi(\mathbf{k})$$

に従う。 $H(\mathbf{k})$ は 2×2 行列のハミルトニアンであり、以下で与えられるとする。

$$H(\mathbf{k}) = \hbar v(k_x\sigma_x + k_y\sigma_y + k_z\sigma_z)$$

ここで $\hbar$ はプランク定数を 2π で割った定数、 v は群速度(定数)、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は以下で与えられるパウリ行列である。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_{\mathbf{k}}$ は $H(\mathbf{k})$ の固有値である。以下では、二つの固有値を $\varepsilon_{\mathbf{k},a}$ ($a = 1, 2$, $\varepsilon_{\mathbf{k},1} \leq \varepsilon_{\mathbf{k},2}$) で表し、波数 $\mathbf{k}$ の絶対値には上限 k_0 ($|\mathbf{k}| \leq k_0$) があるとする。

まず、 $k_x = k_y = 0$ の場合を考える。このとき $H(\mathbf{k})$ は対角行列である。

1. 周期境界条件より k_z はどのような値を取り得るか答えよ。また、 $\varepsilon_{\mathbf{k},1}, \varepsilon_{\mathbf{k},2}$ を k_z の関数として図示せよ。
2. エネルギーが0から ε (ただし $\varepsilon > 0$) の間にある $k_x = k_y = 0$ をみたす1粒子の状態の数を $\Omega_0(\varepsilon)$ とする。系の体積が十分大きいときに $\Omega_0(\varepsilon)$ を求めよ。

次に、任意の $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ について考える。

3. $H(\mathbf{k})$ の固有値 $\varepsilon_{\mathbf{k},1}, \varepsilon_{\mathbf{k},2}$ を求めよ。
4. エネルギーが0から ε (ただし $\varepsilon > 0$) の間にある1粒子の状態の数を $\Omega(\varepsilon)$ とおく。系の体積が十分大きいときに $\Omega(\varepsilon)$ を求め、状態密度 $D(\varepsilon) = \frac{d\Omega(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ を計算せよ。

化学ポテンシャルが $\mu = 0$ に固定されている場合を考える。このとき、電子がフェルミ粒子であることを考慮すると、大分配関数は

$$\Xi(T, V) = \prod_k \prod_{a=1}^2 \sum_{n_{k,a}=0}^1 \exp(-\beta \varepsilon_{k,a} n_{k,a})$$

で与えられる。ここで $\beta = 1/(k_B T)$ であり、 k_B はボルツマン定数である。

5. 自然対数をとった $\log \Xi$ はある関数 $F(\varepsilon)$ を用いて以下の積分形に書き直せる。

$$\log \Xi = \int_0^{\varepsilon_0} F(\varepsilon) d\varepsilon$$

ただし、 $\varepsilon_0 = \hbar v k_0$ である。 $F(\varepsilon)$ を状態密度 $D(\varepsilon)$ と ε の関数を用いて表せ。

6. $\varepsilon_0 \gg k_B T$ のときに、設問 5 の積分を実行すると、 $\log \Xi$ は ε_0 の関数として

$$\log \Xi = (\varepsilon_0 \text{ の有限次の多項式}) + G(\varepsilon_0)$$

と表せる。ここで $G(\varepsilon_0)$ は $\lim_{\varepsilon_0 \rightarrow \infty} G(\varepsilon_0) = 0$ をみたす関数である。 $G(\varepsilon_0)$ の項を無視する近似をすることで $\log \Xi$ を求めよ。ただし、以下の公式を用いてよい。

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x + 1} dx = \frac{7\pi^4}{120}$$

7. $\varepsilon_0 \gg k_B T$ のときに、設問 6 の結果を用いて内部エネルギー E 、および比熱 $C = \frac{\partial E}{\partial T}$ を求めよ。

8. 通常の金属では低温で比熱が温度に比例する。この理由を簡潔に述べよ。また、設問 7 において低温で比熱が通常の金属とは定性的に異なる振る舞いをする理由を簡潔に述べよ。

2023 年度・統計力学第 2 問

3 次元 Dirac 電子の状態密度と低温比熱

大学院理学系研究科物理学専攻・入学試験（独立解答）

出典と収録範囲：添付原本「R5master.pdf（PDF 6-7 ページ、冊子内 3-4 ページ）」第 2 問。原題は解答の直前に画像で収録する。全設問を解説。これは東京大学の公式模範解答ではない。

問題全体の見通し

立方体 $V = L^3$ 中の非相互作用電子の二成分模型 $H(\mathbf{k}) = \hbar v \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ を考える。周期境界条件、 $|\mathbf{k}| \leq k_0$ 、二つのエネルギー枝 $\varepsilon_{\mathbf{k},1} \leq \varepsilon_{\mathbf{k},2}$ 、化学ポテンシャル $\mu = 0$ を原題の通り採用する。電子スピン等の追加縮退は置かない。 $\varepsilon_0 = \hbar v k_0$ 、 $\beta = 1/(k_B T)$ とする。

問 1： $k_x = k_y = 0$ の許容波数と分散

周期境界条件 $e^{ik_z L} = 1$ から

$$k_z = \frac{2\pi n}{L} \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad H = \hbar v k_z \sigma_z = \begin{pmatrix} \hbar v k_z & 0 \\ 0 & -\hbar v k_z \end{pmatrix}. \quad (1)$$

よって $\varepsilon_{k_z,1} = -\hbar v |k_z|$, $\varepsilon_{k_z,2} = \hbar v |k_z|$ 。 $k_z = 0$ では 2 枝が接する。枝ラベルを固定したときの固有ベクトルは k_z の符号で入れ替わる。

問 2：一次元の正エネルギー状態数 $\Omega_0(\varepsilon)$

$0 < \varepsilon_{k_z,a} < \varepsilon$ の正エネルギー状態は、 $n \neq 0$ の各波数に 1 本ずつ（正・負の n の双方）ある。許容値を厳密に数えると、 ε が固有値と重ならない場合

$$\Omega_0(\varepsilon) = 2 \left\lfloor \frac{L\varepsilon}{2\pi\hbar v} \right\rfloor, \quad (2)$$

固有値と一致する場合は上端を除くように階段値を調整する。したがって L が大きい連続近似では

$$\Omega_0(\varepsilon) \simeq \frac{L\varepsilon}{\pi\hbar v}. \quad (3)$$

原題の波数切断により、 $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ の範囲のみ対象とする。 $k_z = 0$ の零エネルギー状態は $0 < \varepsilon'$ から除く。

問 3：一般の $\mathbf{k}$ の二つの固有エネルギー

Pauli 行列の積 $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I + i \sum_l \epsilon_{ijl} \sigma_l$ を用いると

$$(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = |\mathbf{k}|^2 I. \quad (4)$$

また $\text{tr } H = 0$ であるから、固有値は逆符号の対となる。結論は

$$\varepsilon_{\mathbf{k},1} = -\hbar v |\mathbf{k}|, \quad \varepsilon_{\mathbf{k},2} = +\hbar v |\mathbf{k}|. \quad (5)$$

問 4：3 次元の状態数と状態密度

$0 < \varepsilon' < \varepsilon$ にある正エネルギー枝の一粒状態数を数える。 $\mathbf{k}$ 空間の体積要素に $V/(2\pi)^3$ を掛ければ

$$\Omega(\varepsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\varepsilon}{\hbar v} \right)^3 = \frac{V\varepsilon^3}{6\pi^2(\hbar v)^3}, \quad (6)$$

$$D(\varepsilon) = \frac{d\Omega}{d\varepsilon} = \frac{V\varepsilon^2}{2\pi^2(\hbar v)^3} \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0). \quad (7)$$

負エネルギー枝にも絶対値が同じ状態密度があるが、 Ω と D の定義には含めず、問 5 で別途足す。

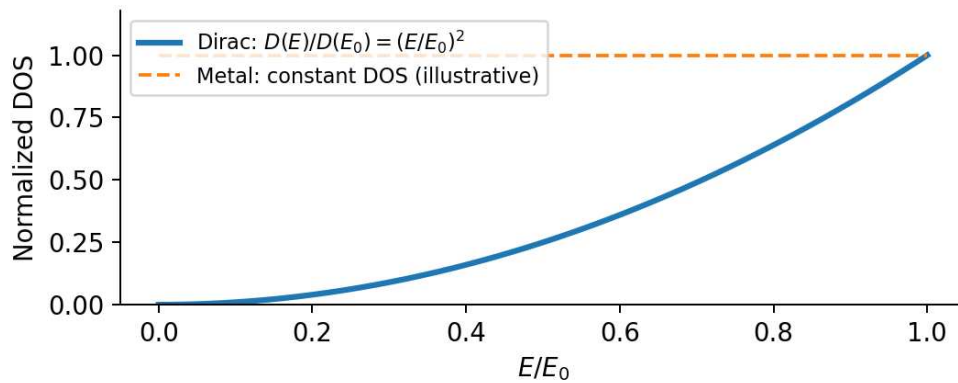


図 1：正エネルギー枝の状態密度。破線は通常金属の Fermi 面近傍との模式比較。

問 5：Fermi 粒子の大分配関数

$\mu = 0$ で、一粒子の占有数は $n_{\mathbf{k},a} = 0, 1$ 。各状態の因子は $1 + e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{k},a}}$ だから

$$\log \Xi = \sum_{\mathbf{k},a} \log (1 + e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{k},a}}) \quad (8)$$

$$= \int_0^{\varepsilon_0} D(\varepsilon) [\log(1 + e^{-\beta \varepsilon}) + \log(1 + e^{\beta \varepsilon})] d\varepsilon. \quad (9)$$

$\log(1 + e^x) = x + \log(1 + e^{-x})$ を使えば、原題指定の $\log \Xi = \int F(\varepsilon) d\varepsilon$ に対する答えは

$$F(\varepsilon) = D(\varepsilon) [\beta \varepsilon + 2 \log(1 + e^{-\beta \varepsilon})]. \quad (10)$$

第一項は負エネルギー枝が全て満たされた基底状態の寄与であり、低温励起の寄与とは区別される。

問 6：低温での $\log \Xi$

$\varepsilon_0 \gg k_B T$ のとき、第一項の積分は厳密に

$$\beta \int_0^{\varepsilon_0} D(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = \frac{V \beta \varepsilon_0^4}{8\pi^2 (\hbar v)^3}. \quad (11)$$

第二項を部分積分すると

$$2 \int_0^{\varepsilon_0} D(\varepsilon) \log(1 + e^{-\beta \varepsilon}) d\varepsilon = \frac{V}{\pi^2 (\hbar v)^3} \left[\frac{\varepsilon_0^3}{3} \log(1 + e^{-\beta \varepsilon_0}) + \frac{\beta}{3} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta \varepsilon} + 1} d\varepsilon \right]. \quad (12)$$

原題で指定された積分 $\int_0^\infty x^3 / (e^x + 1) dx = 7\pi^4/120$ を用い、上端から無限遠までの尾部を無視すると

$$\log \Xi \simeq \frac{V \beta \varepsilon_0^4}{8\pi^2 (\hbar v)^3} + \frac{7\pi^2 V}{360 (\hbar v)^3 \beta^3}. \quad (13)$$

無視した端点寄与と積分尾部は $e^{-\beta \varepsilon_0}$ によって抑制される。 T に依らない真空エネルギー由来の項を消してはいけない点に注意。

問 7：内部エネルギーと熱容量

$\mu = 0$ で $U = -\partial_\beta \log \Xi$ より

$$U \simeq -\frac{V \varepsilon_0^4}{8\pi^2 (\hbar v)^3} + \frac{7\pi^2 V}{120 (\hbar v)^3} (k_B T)^4. \quad (14)$$

体積一定の熱容量は

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \simeq \frac{7\pi^2 V k_B}{30 (\hbar v)^3} (k_B T)^3. \quad (15)$$

基底エネルギー（負の定数）は熱容量には寄与しない。体積は固定されているので原題の $C = \partial U / \partial T$ と一致する。

問 8：通常金属との低温比熱の比較

通常金属は Fermi 面の近くで状態密度 $D(E_F) \neq 0$ がほぼ一定であり、熱励起に参加する状態数が $\propto T$ だから、電子比熱も $C_V \propto T$ となる。一方、 $\mu = 0$ の Dirac 点では

$$D(\varepsilon) \propto \varepsilon^2, \quad \text{熱的励起の有効状態数} \propto T^3, \quad U_{\text{th}} \propto T^4, \quad C_V \propto T^3. \quad (16)$$

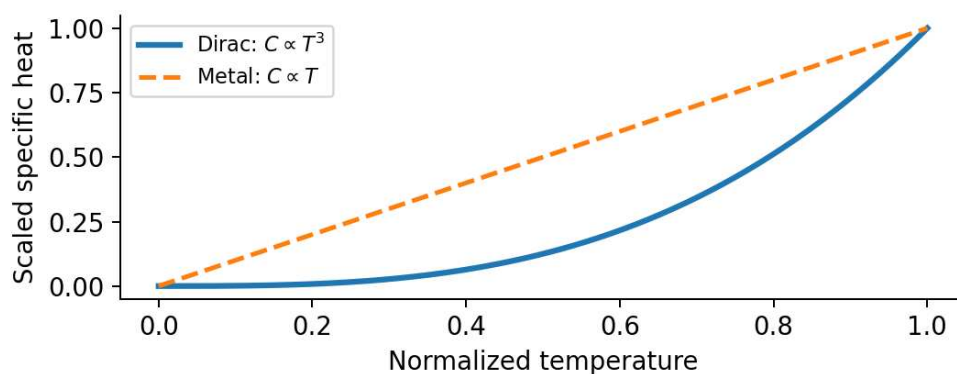


図 2：温度べきの模式比較（両曲線は任意の正規化）。

計算の要点： $\mu = 0$ の二枝を両方数えること、正の状態密度 $D(\varepsilon)$ を負の枝にも再利用すること、 $\log 3$ の定数の基底エネルギーと熱励起分を分離すること。 $T \ll \varepsilon_0/k_B$ の極限の結果である。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2022 年度

出題テーマ / 編集上の分類

Bose凝縮と磁場

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

体積 $V = L^3$ の相互作用が無視できる理想ボース気体を考える。ボース粒子の質量は m ，粒子数は N とする。以下の設問に答えよ。なお，必要であれば，プランク定数を 2π で割った量 $\hbar$ を用いてもよい。

まず，スピンのないボース粒子を考える。

1. 全ての粒子固有エネルギーとそれに対応する固有波動関数 $\Psi(x, y, z)$ を求めよ。ただし， $\Psi(x, y, z)$ は周期境界条件

$$\Psi(x + L, y, z) = \Psi(x, y, z), \Psi(x, y + L, z) = \Psi(x, y, z), \Psi(x, y, z + L) = \Psi(x, y, z)$$

を満たすとする。また，基底状態のエネルギーは $E = 0$ であるとする。

2. 固有エネルギー E_i をもつ粒子固有状態 i の大分配関数は，温度 T ，化学ポテンシャル μ ($\mu \leq 0$)，ボルツマン定数 k_B を用いて

$$\Xi_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} \exp \left[- \frac{(E_i - \mu)n_i}{k_B T} \right]$$

で与えられる。このとき，状態 i に存在する粒子数の統計力学的平均値 (ボース分布関数) $f(E_i, \mu)$ を求めよ。導出の過程も示すこと。

以下では， L が十分大きく，エネルギー準位が連続とみなせるとする。

3. エネルギーが 0 から E の範囲にある粒子固有状態の数を $\Omega(E)$ とすると，状態密度は $D(E) = \frac{d\Omega(E)}{dE}$ で与えられる。 $D(E)$ を求めよ。
4. ある温度 $T = T_c$ より高温では，設問 2 と 3 の結果を用いて，全粒子数 N は

$$N = \int_0^{\infty} f(E, \mu) D(E) dE \quad (1)$$

と表される。式 (1) の右辺は，温度一定のもとで， μ ($\mu \leq 0$) の単調増加関数である。 $\mu = 0$ のときの積分を評価せよ。なお，

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

を用いてもよい。ここで， $\zeta(x)$ はリーマンのゼータ関数である。

5. $T < T_c$ では，マクロな数の粒子がエネルギー最低の粒子状態をとり，全粒子数 N は，エネルギー最低の粒子状態 ($E = 0$) にある粒子数 N_0 とそれ以外の状態にある粒子数の和として以下のように表される。

$$N = N_0 + \int_0^{\infty} f(E, \mu = 0) D(E) dE$$

この現象をボース・アインシュタイン凝縮と呼ぶ。転移温度 T_c を求めよ。

6. $T < T_c$ における N_0 を N , T , T_c を用いて表せ。
7. $T < T_c$ における定積熱容量 $C_V = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_{N,V}$ は定数 a を用いて $C_V = aT^\gamma$ と表される。 γ の値を求めよ。

次に、ボース粒子がスピン S をもつ場合を考える。

8. 外部磁場がない場合の状態密度 $D(E)$ とボース・アインシュタイン凝縮の転移温度 T'_c を求めよ。
9. 磁束密度の大きさが B の外部磁場を z 方向にかけると、ゼーマンエネルギーによりスピン自由度の縮退が解ける。ゼーマンエネルギーは c をある正の定数として $-cm_z B$ (m_z はスピン磁気量子数 $-S, -S+1, \dots, S$) と書けるとする。ボース・アインシュタイン凝縮の転移温度 T'_c を決める方程式を書き下せ。
10. 転移温度 T'_c の B 依存性の概略を図示し、その $cB \gg k_B T'_c$ における振る舞いを述べよ。
 なお、 $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx = 1$ を用いてもよい。

2022 年度・統計力学第 2 問

理想 Bose 気体の凝縮と磁場中のスピン縮退

大学院理学系研究科物理学専攻・入学試験（独立解答）

出典と収録範囲：添付原本「R4master.pdf（PDF 6-7 ページ、冊子内 3-4 ページ）」第 2 問。原題は解答の直前に画像で収録する。全設問を解説。これは東京大学の公式模範解答ではない。

問題全体の見通し

周期境界条件を課した体積 $V = L^3$ の非相互作用 Bose 粒子を考える。最初はスピン 0、後半でスピン S の縮退と外部磁場を加える。連続準位近似・熱力学極限で計算し、 $\beta = (k_B T)^{-1}$ 、 $\lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar^2/(mk_B T)}$ と置く。有限系の基底状態は励起状態の連続積分に含めず別に数える。

問 1：1 粒子の固有エネルギーと波動関数

$\psi(\mathbf{r} + L\mathbf{e}_j) = \psi(\mathbf{r})$ より $k_j = 2\pi n_j/L$ 。規格化した一粒子状態とエネルギーは

$$\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = V^{-1/2} \exp\left(\frac{2\pi i}{L} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}\right), \quad E_{\mathbf{n}} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3. \quad (1)$$

$(0, 0, 0)$ の基底エネルギーは 0。

問 2：Bose 分布を大分配関数から導く

エネルギー E_i の一粒子状態は $n_i = 0, 1, 2, \dots$ 個を占有できるから

$$\Xi_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta(E_i - \mu)n_i} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(E_i - \mu)}}. \quad (2)$$

ただし収束には $\mu < E_i$ が必要であり、基底 $E_0 = 0$ から $\mu \leq 0$ 。平均占有数は

$$f(E_i, \mu) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log \Xi_i}{\partial \mu} = \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu)} - 1}. \quad (3)$$

凝縮点で $\mu \uparrow 0$ とすると、 $E = 0$ の基底粒子数は積分近似とは別扱いにする。

問 3：3 次元の状態密度

$k = \sqrt{2mE}/\hbar$ の球内部の格子点数は

$$\Omega(E) \simeq \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k^3}{3} = \frac{V}{6\pi^2} \left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{3/2}. \quad (4)$$

ゆえに

$$D(E) = \frac{d\Omega}{dE} = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E} \quad (E > 0). \quad (5)$$

スピン 0 なので追加縮退因子はない。

問 4： $\mu = 0$ での励起粒子数と上限

単調性は

$$\frac{\partial f(E, \mu)}{\partial \mu} = \frac{\beta e^{\beta(E - \mu)}}{(e^{\beta(E - \mu)} - 1)^2} > 0 \quad (E > 0). \quad (6)$$

したがって、 $\mu \leq 0$ で励起粒子数は $\mu = 0$ が最大となる。 $E = k_B T x$ として原題の積分公式を用いると

$$N_{\text{ex}}^{\text{max}}(T) = \int_0^{\infty} \frac{D(E) dE}{e^{\beta E} - 1} = \frac{V}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \quad (7)$$

$$= V \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right). \quad (8)$$

熱力学極限で $N > N_{\text{ex}}^{\text{max}}(T)$ なら、超過分は基底を占める必要がある。

問 5：Bose–Einstein 凝縮温度

臨界点で $N = N_{\text{ex}}^{\text{max}}(T_c)$ 、 $\mu \rightarrow 0$ だから

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left[\frac{N}{V\zeta(3/2)} \right]^{2/3}. \quad (9)$$

粒子密度 N/V を固定した熱力学極限での式である。

問 6：凝縮粒子数

$T < T_c$ で $\mu = 0$ のまま $N_{\text{ex}} = N(T/T_c)^{3/2}$ 。従って

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right], \quad \frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}. \quad (10)$$

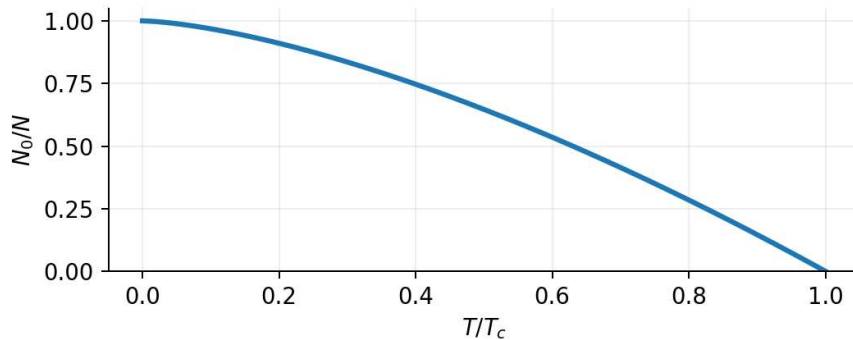


図 1：スピン 0 の理想気体の凝縮割合。

問 7：定積熱容量の温度指数

基底エネルギーは 0 なのでエネルギーは励起状態のみが担う。原題の $T < T_c$ では

$$U = \int_0^\infty E D(E) f(E, 0) dE \quad (11)$$

$$= \left[\frac{3}{2} \frac{V}{\lambda_T^3} k_B T \zeta(5/2) \right] = \frac{3}{2} V \left(\frac{mk_B}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} k_B \zeta(5/2) T^{5/2}. \quad (12)$$

よって

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{N,V} = \frac{15}{4} V \left(\frac{mk_B}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} k_B \zeta(5/2) T^{3/2}, \quad \gamma = \frac{3}{2}. \quad (13)$$

凝縮した粒子数は変化するが、その粒子の基底エネルギーが 0 なので上式に寄与しない。

問 8：スピン S 、磁場なしの臨界温度

スピン方向は $m_z = -S, -S+1, \dots, S$ の $g = 2S+1$ 状態。各運動状態は g 重に縮退するため

$$D_S(E) = gD(E), \quad N = g \frac{V}{\lambda_{T_c}^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right). \quad (14)$$

スピン 0 の臨界温度 T_c と比べて

$$T'_c(0) = \frac{T_c}{(2S+1)^{2/3}}. \quad (15)$$

ここで T'_c はスピン S の場合の転移温度。縮退が増えると各状態に粒子が分散できるため転移温度は下がる。

問 9：磁場中の凝縮温度を決める方程式

原題の Zeeman エネルギーは $-cm_z B$ ($c > 0, B \geq 0$)。最低状態は $m_z = S$ で、基底エネルギーは $-cSB$ 。従って臨界点の化学ポテンシャルは $\mu = -cSB$ となる。運動エネルギー $E \geq 0$ と $j = S - m_z \in \{0, 1, \dots, 2S\}$ を用いれば励起の平均粒子数は

$$N = \sum_{j=0}^{2S} \int_0^\infty \frac{D(E) dE}{e^{\beta_c(E+cBj)} - 1}. \quad (16)$$

$\text{Li}_s(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell}/\ell^s$ を使って積分すると

$$N = V \left(\frac{mk_{\text{B}}T'_c(B)}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \sum_{j=0}^{2S} \text{Li}_{3/2} \left(e^{-jcB/(k_{\text{B}}T'_c(B))} \right). \quad (17)$$

$j=0$ の項は常に $\zeta(3/2)$ 。この式は臨界状態で凝縮基底の巨視的占有をまだ加えない、飽和励起粒子数の条件である。

問 10：磁場依存性と強磁場の極限

$B=0$ では全スピン枝が等しいので前問は $T'_c(0) = T_c/(2S+1)^{2/3}$ を再現する。 B を上げると $j \geq 1$ の励起は抑制され、同じ温度での飽和励起粒子数が小さくなる。このため転移温度 $T'_c(B)$ は増加する。特に $cB \gg k_{\text{B}}T'_c$ では

$$\text{Li}_{3/2}(e^{-jcB/(k_{\text{B}}T'_c)}) \sim e^{-jcB/(k_{\text{B}}T'_c)} \quad (j \geq 1), \quad (18)$$

ほぼ $j=0$ だけが残る、

$$T'_c(B) \rightarrow T_c \quad (cB \gg k_{\text{B}}T'_c). \quad (19)$$

強磁場での近づき方は $T'_c(B) < T_c$ から指数関数的である。図 2 は原題で特定されていないスピン値について、説明用に $S=1$ を選んだ数値例である。

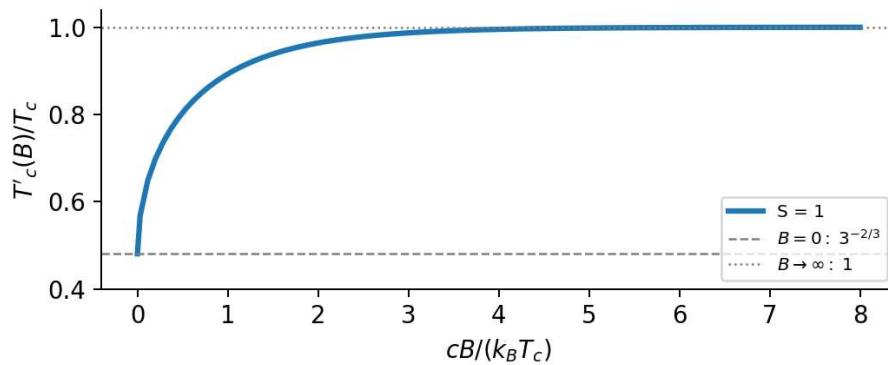


図 2： $S=1$ の数値例。横軸 $cB/(k_{\text{B}}T_c)$ 。 $T'_c(0)/T_c = 3^{-2/3}$ 、強磁場で 1 に近づく。

主要な注意点： (i) 周期境界条件による状態密度にはスピン縮退を自動で入れない。(ii) μ は粒子数の制約から基底エネルギー以下。(iii) 磁場がある場合、基底エネルギーは $-cSB$ なので、臨界の μ を 0 と置いてはいけない。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2020 年度

出題テーマ / 編集上の分類

古典理想気体・Fermi統計

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

体積 V 、粒子数 N の系が温度 T の熱浴と接触している状況を考える。粒子の質量を m とし、粒子間の相互作用は考えない。必要であれば、熱力学の関係式

$$\begin{aligned} dU &= d'Q - PdV + \mu dN, \\ d'Q &= TdS, \quad (\text{可逆過程の場合}) \\ F &= U - TS, \end{aligned} \quad (1)$$

を用いてよい。ここで、 U は系の内部エネルギー、 Q は熱量、 P は圧力、 μ は化学ポテンシャル、 S はエントロピー、 F はヘルムホルツの自由エネルギーである。

まず粒子を古典的に扱う。この場合、分配関数は

$$Z = \frac{1}{h^{3N} N!} \int \cdots \int dp_{1x} dp_{1y} dp_{1z} \cdots dp_{Nx} dx_1 dy_1 dz_1 \cdots dz_N e^{-\beta H} \quad (2)$$

で、ハミルトニアン H は

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} (p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2) \quad (3)$$

で与えられる。ここで (p_{ix}, p_{iy}, p_{iz}) は i 番目の粒子の運動量、 (x_i, y_i, z_i) は i 番目の粒子の位置座標、 h はプランク定数 ($h = 2\pi\hbar$)、 $\beta = 1/(k_B T)$ で、 k_B はボルツマン定数である。

1. 式 (2) の積分を実行し、 $Z(T, V, N)$ を求めよ。さらに、得られた結果を用いて、この系の圧力 $P(T, V, N)$ を求めよ。必要であれば

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (a > 0) \\ \ln N! &\approx N \ln N - N, \quad (N \text{ が十分大きい場合}) \end{aligned} \quad (4)$$

を用いてよい。

2. 式 (2) には、 $1/N!$ という因子がついている。もしこの因子が無かったとすると、ヘルムホルツの自由エネルギーが、ある熱力学の性質を満たさなくなる。このことを簡潔に説明せよ。
3. この系のエントロピー $S(T, V, N)$ を求めよ。 $T \rightarrow 0$ としたときに、古典的には S はどうなるか述べよ。
4. 体積が一定のときの熱容量 $C_V(T, V, N)$ を求めよ。

以下では、粒子がフェルミ粒子であるとして、量子力学的に扱う。系は化学ポテンシャル μ の粒子浴に接しているとして、グランドカノニカル分布で考える。粒子の運動エネルギーを

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (5)$$

と表す。ここで $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ は粒子の波数を表す。また、体積 V は一辺の長さ L の立方体とし ($V = L^3$)、周期境界条件が満たされるものとする。ただし、スピンなどの粒子の内部自由度は考えなくてよい。

5. この系の大分配関数 $\Xi(T, V, \mu)$ は

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_k (1 + e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}) \quad (6)$$

である。この式で、波数 k が取り得る値を求めよ。

6. 大分配関数を用いて、全粒子数の期待値 $\bar{N}$ が

$$\bar{N} = \sum_k f(\varepsilon_k) \quad (7)$$

となることを示せ。ここで $f(\varepsilon_k)$ はフェルミ分布関数

$$f(\varepsilon_k) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1} \quad (8)$$

である。

7. フェルミ粒子系の縮退温度より十分高い温度では、 μ は負で絶対値の大きな値 ($|\mu| \gg k_B T$) となる。この場合、フェルミ分布関数は

$$f(\varepsilon_k) \approx e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)} \quad (9)$$

と近似してよい。このような温度領域で、 L が十分大きいとして式 (7) の k の取り得る値についての和を積分の形に書き直して積分を実行し、 μ を T, V と $\bar{N}$ (簡単のために $\bar{N} = N$ と書いてよい) の関数として求めよ。

8. 設問 7 と同様の温度領域におけるエントロピーが、近似的に $S \approx -\frac{\mu}{T} N$ となることを示せ。
9. 一方、縮退温度より十分低い温度では、この自由フェルミ粒子系の熱容量 C_V は T に比例して $C_V = \gamma T$ と書けることが分かっている。このことと設問 8 の結果を考慮して、フェルミ粒子系でのエントロピーを温度の関数としてグラフにせよ。比較のために、設問 3 で考えたエントロピーの温度依存性も点線で書き加えよ。

2020 年度・第 2 問

理想気体：古典極限から自由 Fermi 気体へ

東大大学院理学系研究科物理学専攻・修士課程入学試験

原題との対応 原本 R2phys.pdf の第 2 問（原本 3–4 ページ、PDF6–7 ページ）。全 9 設問。以下は独立に作成した解説であり、大学の公式解答ではない。

記号 $\beta = (k_B T)^{-1}$ 、 $h = 2\pi\hbar$ 、熱的 de Broglie 波長を

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}, \quad n = \frac{N}{V}, \quad z = e^{\beta\mu} \quad (1)$$

と置く。前半は古典的な同種粒子、後半は内部自由度を持たないフェルミ粒子を扱う。

I. 古典理想気体

設問 1：分配関数と圧力 各粒子の位置積分は V 、運動量積分は 1 粒子あたり

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3p \exp\left(-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right) = \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}. \quad (2)$$

したがって同種粒子の $N!$ を含む正準分配関数は

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda_T^3}\right)^N. \quad (3)$$

自由エネルギー $F = -k_B T \ln Z$ から

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = k_B T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_{T,N} = \frac{N k_B T}{V}, \quad (4)$$

$$PV = N k_B T. \quad (5)$$

設問 2： $1/N!$ の役割 同種粒子のラベル交換で得られる $N!$ 通りを別状態として数えると、同じ気体を同じ条件で混合したときも見かけの混合エントロピーが生じ、熱力学の示量性と整合しない（Gibbs のパラドックス）。正しい数え上げでは $1/N!$ が必要である。

実際、Stirling 近似を用いると

$$F \simeq -N k_B T \left[\ln \left(\frac{V}{N \lambda_T^3} \right) + 1 \right] \quad (6)$$

となり、 $N, V \rightarrow aN, aV$ として $F \rightarrow aF$ が成立する。 $1/N!$ がなければ $F = -Nk_B T \ln(V/\lambda_T^3)$ となり、体積の単純な拡大で余分な $-aNk_B T \ln a$ が発生する。

設問 3：エントロピーと零温度極限 $\lambda_T^3 \propto T^{-3/2}$ を用い、 $S = -(\partial F/\partial T)_{V,N}$ より

$$S \simeq Nk_B \left[\ln \left(\frac{V}{N\lambda_T^3} \right) + \frac{5}{2} \right]. \quad (7)$$

この公式を形式的に $T \rightarrow 0$ に延長すると $S \rightarrow -\infty$ となる。しかしこれは第三法則の破れを示すものではない。粒子密度 $n\lambda_T^3 \ll 1$ の古典近似が低温で破綻し、**Bose/Fermi** 統計が必要になるためである。

設問 4：定積熱容量 分配関数の β 微分から

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{2}Nk_B T, \quad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N} = \frac{3}{2}Nk_B. \quad (8)$$

単原子古典理想気体の等分配則と一致する。

II. 内部自由度を持たない自由 Fermi 気体

設問 5：許される波数 一辺 L の周期境界条件 $\psi(x_i + L) = \psi(x_i)$ から

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z), \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

$\mathbf{k} = \mathbf{0}$ も許され、各 1 粒子状態の占有数は Pauli 原理より 0 または 1 である。したがって問題文にある大分配関数 $\Xi = \prod_{\mathbf{k}} (1 + e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)})$ が成立する。

設問 6：平均粒子数と Fermi 分布

$$\bar{N} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \mu} \right)_{T,V} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)}} \quad (10)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} + 1}. \quad (11)$$

これは占有数の確率平均としても導ける。分配関数の 1 つの因子は、未占有と占有の 2 状態を足し合わせた結果である。

設問 7：高温・低密度極限における化学ポテンシャル $|\mu| \gg k_B T$ かつ $\mu < 0$ のとき $z = e^{\beta\mu} \ll 1$ 。

したがって

$$N \simeq \sum_{\mathbf{k}} z e^{-\beta \epsilon_{\mathbf{k}}} \simeq z \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k e^{-\beta \hbar^2 k^2 / (2m)} \quad (12)$$

$$= z \frac{V}{\lambda_T^3}. \quad (13)$$

従って

$$\mu(T, V, N) \simeq k_B T \ln \left(\frac{N \lambda_T^3}{V} \right). \quad (14)$$

この漸近式の有効条件は $n \lambda_T^3 \ll 1$ である。大きな箱と熱力学極限で離散和を積分に置換した。

設問 8：エントロピーと $-\mu N/T$ 大分配関数の古典希薄極限 $\ln \Xi \simeq N$ と $\Omega = -k_B T \ln \Xi = -PV$ 、および

$$U = TS - PV + \mu N \quad (15)$$

から $S = (U + PV - \mu N)/T$ 。設問 4 と理想気体状態方程式より

$$S \simeq \frac{5}{2} N k_B - \frac{\mu N}{T}. \quad (16)$$

さらに $-\mu/(k_B T) = \ln(1/n \lambda_T^3) \gg 1$ なので、主導項の意味で

$$S \simeq -\frac{\mu N}{T}. \quad (17)$$

等号とみなすのではなく、 $5 N k_B / 2$ が相対的に小さい高温・低密度の近似である。

設問 9：低温エントロピーと概形 問題文の仮定 $C_V = \gamma T$ と熱力学関係 $C_V = T(\partial S / \partial T)_{V, N}$ より

$$\frac{dS}{dT} = \gamma, \quad S(T) = S(0) + \gamma T. \quad (18)$$

自由 Fermi 気体の一意な基底状態を仮定して $S(0) = 0$ とすると

$$S \simeq \gamma T \quad (T \ll T_F). \quad (19)$$

ここで γ は正の定数。3 次元スピンなし自由 Fermi 気体なら $\gamma = \pi^2 N k_B / (2 T_F)$ である。一方、高温では式(14)と設問 8 から

$$S \simeq N k_B \left[\frac{3}{2} \ln T + \text{const.} \right] \quad (T \gg T_F). \quad (20)$$

追加検算（自由 Fermi 気体の数値解） 無次元化学ポテンシャル $\eta = \mu / (k_B T)$ と Fermi 積分

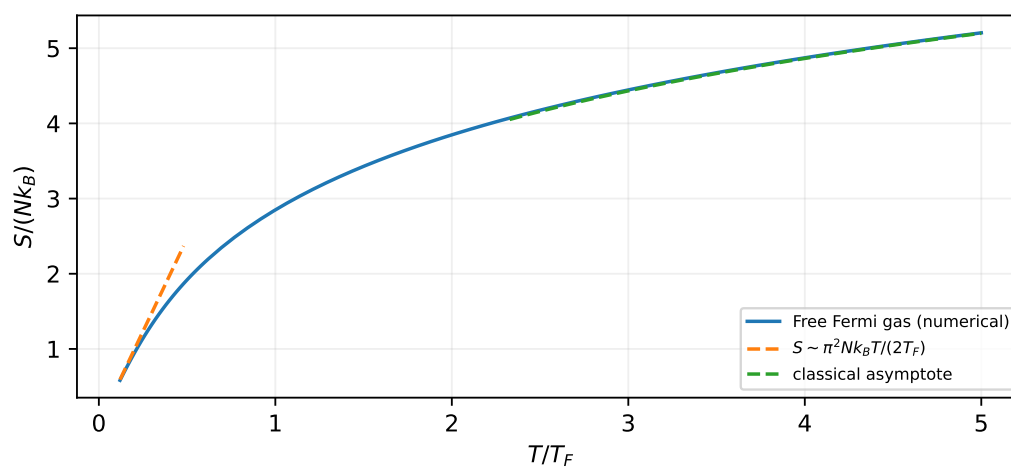
$$\mathcal{F}_s(\eta) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{q^{s-1}}{e^{q-\eta} + 1} dq \quad (21)$$

を用い、 $T_F = \hbar^2(6\pi^2n)^{2/3}/(2mk_B)$ とする。粒子数条件を満たす η を数値的に求めれば

$$\mathcal{F}_{3/2}(\eta) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{T_F}{T} \right)^{3/2}, \quad (22)$$

$$\frac{S}{Nk_B} = \frac{5}{2} \frac{\mathcal{F}_{5/2}(\eta)}{\mathcal{F}_{3/2}(\eta)} - \eta \quad (23)$$

が得られる。実線はこの積分から求めた自由 Fermi 気体の数値結果で、破線は低温・高温の漸近式である。



補足：低温の Sommerfeld 展開にはフェルミ面が存在することを仮定する。高温の古典式を零温度まで外挿してはいけない。

確認事項

- (1) Z の次元はない。(2) μ は高温・希薄では負である。(3) N を固定したとき高温極限で $n\lambda_T^3 \rightarrow 0$ 。(4) 第三法則は Fermi 統計を用いると回復する。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2019 年度

出題テーマ / 編集上の分類

2方向スピン模型・転送行列

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

スピンを持つ原子が図1のように1次元的に並んで相互作用している古典的な系を考える。これらの原子に、左端から順に $i = 1, 2, \dots, L$ と番号を付け、 i 番目の原子のスピンの状態を表す変数を S_i とする。ただし、 $L \geq 2$ とし、 S_i は、 $\hat{x} = (1, 0, 0)$ か $\hat{y} = (0, 1, 0)$ のいずれかをとるものとする (図1)。この系の各状態は、スピン配置 $(S_1, \dots, S_L)$ で指定され、そのエネルギーは、

$$E(S_1, \dots, S_L) = -J \sum_{i=1}^{L-1} S_i \cdot S_{i+1} \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 $J > 0$ である。この系が、温度 T の熱平衡状態にあるとする。ここで、ボルツマン定数 k_B を用いて逆温度を $\beta = 1/(k_B T)$ と定義し、系の分配関数を $Z_L(\beta)$ とする。以下の設問に答えよ。

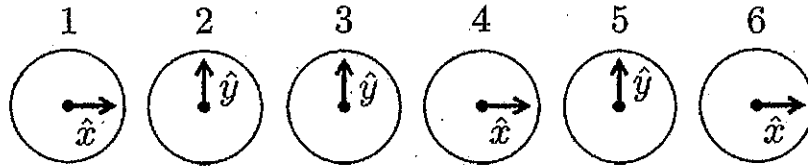


図1: $L = 6$ の場合のスピン配置の例。

1. $L = 2$ の場合に、可能なスピン配置をすべて列挙し、それぞれのエネルギーを求めよ。また、その結果をもとに、分配関数 $Z_2(\beta)$ を求めよ。
2. $L = 3$ の場合に、可能なスピン配置をすべて列挙し、それぞれのエネルギーを求めよ。また、その結果をもとに、分配関数 $Z_3(\beta)$ を求めよ。
3. 一般の L について、 $Z_L(\beta)$ を求めよ。ただし、 $L \geq 3$ のとき、 $Z_L(\beta)$ は $Z_{L-1}(\beta)$ を用いて表すことができる。その関係式を用いてよい。
4. 一般の L について、系の自由エネルギー $F_L(\beta)$ を求めよ。
5. L が十分大きい極限での、スピン1個あたりの内部エネルギー $u(\beta)$ を求めよ。また、高温極限および低温極限での $u(\beta)$ の値とスピン配置の出現確率との関係について説明せよ。

次に、原子数 L の系の左端のスピン S_1 と右端のスピン S_L の内積の期待値 $\langle S_1 \cdot S_L \rangle$ について考える。

6. 原子数 L の系において、 $S_1 = \hat{a}$ かつ $S_L = \hat{b}$ ($\hat{a}, \hat{b}$ は、 $\hat{x}, \hat{y}$ のいずれか) である確率を $P_L(\hat{a}, \hat{b})$ とする。 $L \geq 3$ のとき、 $P_L(\hat{a}, \hat{b})$ と $P_{L-1}(\hat{a}, \hat{b})$ の間には、以下の関係が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} P_L(\hat{x}, \hat{x}) & P_L(\hat{x}, \hat{y}) \\ P_L(\hat{y}, \hat{x}) & P_L(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{L-1}(\hat{x}, \hat{x}) & P_{L-1}(\hat{x}, \hat{y}) \\ P_{L-1}(\hat{y}, \hat{x}) & P_{L-1}(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(\hat{x}, \hat{x}) & Q(\hat{x}, \hat{y}) \\ Q(\hat{y}, \hat{x}) & Q(\hat{y}, \hat{y}) \end{pmatrix} \quad (2)$$

このとき、4つの行列要素 $Q(\hat{a}, \hat{b})$ を β, J を用いて表せ。

7. $\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_L \rangle$ を, β, J, L を用いて表せ。また, $\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_L \rangle$ は, L に依存しない定数 A, B, ξ を用いて

$$\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_L \rangle = A + B \exp\left(-\frac{L-1}{\xi}\right) \quad (3)$$

と書ける。高温極限および低温極限における ξ を, それぞれ β, J を用いて表せ。

2019 年度・第 2 問

2 方向スピン模型：転送行列と相関長

東大大学院理学系研究科物理学専攻・修士課程入学試験

原題との対応 原本 H31phys.pdf の第 2 問（原本 3–4 ページ、PDF6–7 ページ）、全 7 設問。これは独立に作成した非公式解答である。

モデル $S_i \in \{\hat{x}, \hat{y}\}$ 、 $\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$ 、 $J > 0$ 、開放端、

$$E = -J \sum_{i=1}^{L-1} S_i \cdot S_{i+1}, \quad t = e^{\beta J}, \quad \rho = \frac{t-1}{t+1} = \tanh \frac{\beta J}{2}. \quad (1)$$

同じ向きの隣接対はエネルギー $-J$ 、異なる向きは 0 を持つ。

設問 1： $L = 2$ の全配置

配置	エネルギー	Boltzmann 重み
xx, yy	$-J$	t
xy, yx	0	1

よって

$$Z_2(\beta) = 2t + 2 = 2(1+t). \quad (2)$$

設問 2： $L = 3$ の全配置

配置	エネルギー	個数
xxx, yyy	$-2J$	2
xyx, xyy, yxx, yyx	$-J$	4
xyx, yxy	0	2

$$Z_3 = 2t^2 + 4t + 2 = 2(1+t)^2. \quad (3)$$

設問 3： 一般の L の分配関数 最初のスピンは 2 通り。次の各スピンは直前と同じ向き（重み t ）または異なる向き（重み 1）から選べるため、

$$Z_L = 2(1+t)^{L-1}, \quad Z_L = (1+t)Z_{L-1} \quad (L \geq 3). \quad (4)$$

同じ結論は転送行列 $M = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_+ = t + 1$, $\lambda_- = t - 1$ から従う。

設問 4：自由エネルギー

$$F_L = -k_B T \ln Z_L = -k_B T [\ln 2 + (L-1) \ln(1 + e^{\beta J})]. \quad (5)$$

$$F_L = -\frac{1}{\beta} [\ln 2 + (L-1) \ln(1 + e^{\beta J})]. \quad (6)$$

熱力学極限における 1 サイト当たり自由エネルギーは $f = -\beta^{-1} \ln(1 + t)$ である。

設問 5：1 サイト当たり内部エネルギー $U_L = -\partial_\beta \ln Z_L$ から

$$U_L = -(L-1)J \frac{e^{\beta J}}{1 + e^{\beta J}}, \quad u = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{U_L}{L} = -J \frac{t}{1+t}. \quad (7)$$

高温 ($\beta J \rightarrow 0$) では $u \rightarrow -J/2$ 。隣接する 2 スピンが同じである確率が $1/2$ だからである。低温 ($\beta J \rightarrow \infty$) では $u \rightarrow -J$ となり、全スピン同方向の 2 種類の基底状態が支配的となる。

設問 6：端点同時確率の転送行列 隣接するスピンの条件付き確率は、直前が a のとき

$$Q_{ab} = \frac{e^{\beta J \delta_{ab}}}{t+1}, \quad Q = \frac{1}{t+1} \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}. \quad (8)$$

原題の行列式 $P_L = P_{L-1}Q$ は、右端に 1 スピン追加する操作を表している。開始端の確率は $1/2$ だから $P_1 = (1/2)I$ 、従って $P_L = (1/2)Q^{L-1}$ 。

設問 7：端点相関と相関長 Q の固有値は 1 と $\rho = (t-1)/(t+1)$ 、射影行列を用いば

$$Q^{L-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \rho^{L-1} & 1 - \rho^{L-1} \\ 1 - \rho^{L-1} & 1 + \rho^{L-1} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

従って

$$P_L(xx) = P_L(yy) = \frac{1 + \rho^{L-1}}{4}, \quad P_L(xy) = P_L(yx) = \frac{1 - \rho^{L-1}}{4}. \quad (10)$$

内積は一致したときにだけ 1 なので

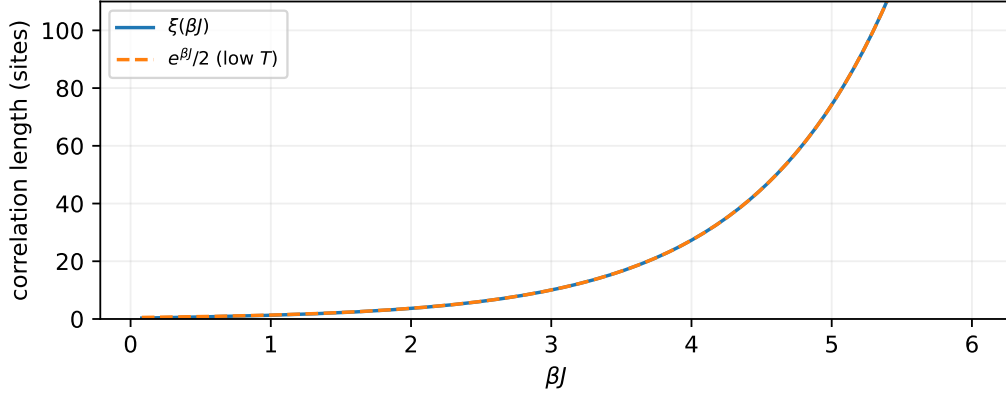
$$\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_L \rangle = P_L(xx) + P_L(yy) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \rho^{L-1}. \quad (11)$$

原題の形 $A + B \exp[-(L-1)/\xi]$ と比べて

$$A = B = \frac{1}{2}, \quad \xi = -\frac{1}{\ln \rho} = \left[\ln \coth \left(\frac{\beta J}{2} \right) \right]^{-1}. \quad (12)$$

ここで $\beta J > 0$ を仮定する。高温極限 $\beta J \downarrow 0$ では $\rho \sim \beta J/2$ 、従って $\xi \rightarrow 0$ （無限温度では $\rho = 0$ の極限で定義）。低温極限 $\beta J \rightarrow \infty$ では

$$\rho = 1 - 2e^{-\beta J} + O(e^{-2\beta J}), \quad \boxed{\xi \sim \frac{1}{2}e^{\beta J} \rightarrow \infty.} \quad (13)$$



補足：端点内積は高温でも $1/2$ に近づく。これはスピンの2つの直交した正方向しかとらず、平均スピン $\langle \mathbf{S} \rangle = (\hat{x} + \hat{y})/2$ が零でないため。連結相関 $\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_L \rangle - \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{S}_L \rangle = \rho^{L-1}/2$ は遠方で 0 に減衰する。

物理的な解釈

このモデルの励起は、隣り合うスピンの方向が変わる境界であり、そのコストは J である。有限温度では境界が希薄でも現れ、有限の相関長を与える。 $T \rightarrow 0$ の極限でのみ ξ は発散する。有限温度での通常の強磁性長距離秩序の発生とは区別する。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2018 年度

出題テーマ / 編集上の分類

古典理想気体・有限箱Bose気体

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

各辺が $L, L, 2L$ (体積 $V = L \times L \times 2L$) の直方体の中に質量が m の粒子が N 個あり、温度 T の熱平衡状態にあるとする。ボルツマン定数を k_B とする。粒子は互いに区別できないとする。ここで、 L, N は有限の値を持つものとする。粒子間の相互作用は考えず、系のハミルトニアンは、 i 番目の粒子の位置を (x_i, y_i, z_i) 、運動量を (p_i^x, p_i^y, p_i^z) として

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} [(p_i^x)^2 + (p_i^y)^2 + (p_i^z)^2] \quad (1)$$

で与えられるものとする。必要であれば以下の積分公式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0 \quad (2)$$

また、必要であれば、エントロピー $S(T)$ と定積熱容量 $C_V(T)$ の熱力学的関係

$$S(T_2) = S(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_V(T')}{T'} dT' \quad (3)$$

を用いてよい。

まず、粒子の運動を古典力学的に考える。

1. 粒子数を N に固定した場合、以下の問いに答えよ。

- (i) この系の内部エネルギーと定積熱容量を T, N の関数として求めよ。
- (ii) この系の圧力を T, V, N の関数として求めよ。
- (iii) ある温度 T_0 でのエントロピー $S(T_0)$ と、温度を $T_0/2$ に下げた時のエントロピー $S(T_0/2)$ との差を

$$\Delta S(T_0, T_0/2) \equiv S(T_0) - S(T_0/2) \quad (4)$$

と定義する。この量を求めよ。

2. 次に、粒子が壁を通して外界と出入りできる場合を考える。外界での粒子の化学ポテンシャル μ は温度変化しないものとする。以下の問いに答えよ。

- (i) 与えられた一定の体積、化学ポテンシャルのもとで、この系の温度 T_1 での粒子数の期待値と温度 T_2 での粒子数の期待値の比 $\langle N(T_1) \rangle / \langle N(T_2) \rangle$ を求めよ。
- (ii) 温度 T でのこの系の粒子数密度 $\langle N(T) \rangle / V$ と圧力 P の関係を求めよ。

以下では、粒子の運動を量子力学的に考える。

3. 系に N 個の粒子が閉じ込められている場合を考える。ここで、粒子は互いに区別できないボース粒子とする。体積 $V = L \times L \times 2L$ の容器に閉じ込められている 1 粒子のエネルギー固有値、固有関数は、 $L, L, 2L$ の直方体の各辺の方向の座標をそれぞれ x, y, z として

$$\mathcal{H}\Psi^{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = E(n_x, n_y, n_z)\Psi^{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) \quad (5)$$

を満たす。ただし、

$$\Psi^{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = \frac{\sin\left(\frac{n_x\pi}{L}x\right)}{\sqrt{L/2}} \frac{\sin\left(\frac{n_y\pi}{L}y\right)}{\sqrt{L/2}} \frac{\sin\left(\frac{n_z\pi}{2L}z\right)}{\sqrt{L}} \quad (6)$$

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \frac{\left[n_x^2 + n_y^2 + \left(\frac{n_z}{2}\right)^2\right]}{L^2}, \quad n_\alpha = 1, 2, \dots, \alpha = x, y, z \quad (7)$$

で与えられることを用いてよい。ここで $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。

- (i) この系の基底状態と第一励起状態のエネルギーを求めよ。
- (ii) $k_B T$ が基底状態と第一励起状態のエネルギー差の大きさに比べて十分小さい場合に、この系の内部エネルギーの温度依存性を求め、設問 1 で求めた結果と比較せよ。
- (iii) $T = 0$ での定積熱容量を求めよ。
- (iv) ある温度 T_0 でのエントロピー $S(T_0)$ と、温度を $T_0/2$ に下げた時のエントロピー $S(T_0/2)$ との差を

$$\Delta S(T_0, T_0/2) \equiv S(T_0) - S(T_0/2) \quad (8)$$

と定義する。 $T_0 \rightarrow 0$ の極限でのこの量の値を求めよ。

- (v) 低温でのエントロピーに関して設問 1(iii) で求めた結果と設問 3(iv) の結果を比較し、その違いをエントロピーと状態数の関係をあたえるボルツマンの原理の観点から説明せよ。ただし、半径 r の d 次元超球の表面積は $a_d r^{d-1}$ で与えられることを用いてよい。ここで a_d は r に依存しないある定数である。

2018 年度 第 2 問 解答・解説

模型と定義 体積 $V = 2L^3$ に閉じ込めた質量 m の粒子を考える。古典側では理想気体、量子側では非相互作用の同種 Bose 粒子である。 $\beta = 1/(k_B T)$ 、熱的 de Broglie 波長を

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

とする。ハミルトニアンに相互作用項はない。

問 1(i)：内部エネルギーと定積熱容量

古典の正準分配関数は、同一粒子の Gibbs 補正も含めて

$$Z_N = \frac{1}{N! h^{3N}} \int_V d^{3N} r \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N} p \exp \left[-\beta \sum_i \frac{p_i^2}{2m} \right] = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \right)^N.$$

$U = -\partial_\beta \ln Z_N$ から

$$U(T, N) = \frac{3}{2} N k_B T, \quad C_V(T, N) = \frac{3}{2} N k_B.$$

$1/N!$ は T に依存しないので、これらの導出には影響しない。

問 1(ii)：圧力

$F = -k_B T \ln Z_N$ 、 $P = -(\partial F / \partial V)_{T, N}$ から

$$PV = N k_B T.$$

長方形の辺長比は、壁の効果を無視する古典理想気体ではこの結果に影響しない。

問 1(iii)：温度を半分にしたときのエントロピー差

原題で与えられた恒等式 $dS = C_V dT/T$ と問 1(i) を用いると

$$\begin{aligned} \Delta S(T_0, T_0/2) &= S(T_0) - S(T_0/2) \\ &= \int_{T_0/2}^{T_0} \frac{\frac{3}{2} N k_B}{T'} dT' = \left[\frac{3}{2} N k_B \ln 2. \right] \end{aligned}$$

$T_0 > 0$ の値に依存しないことに注意する。

問 2(i)：化学ポテンシャル一定の場合の粒子数比

粒子を通す壁を介して外界と接し、外界の化学ポテンシャル μ は温度によらない。古典の大分配関数は

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(e^{\beta \mu} \frac{V}{\lambda_T^3} \right)^N = \exp \left(e^{\beta \mu} \frac{V}{\lambda_T^3} \right), \quad \langle N(T) \rangle = e^{\beta \mu} \frac{V}{\lambda_T^3}.$$

$\lambda_T^{-3} \propto T^{3/2}$ であるため

$$\frac{\langle N(T_1) \rangle}{\langle N(T_2) \rangle} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{\mu}{k_B} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right].$$

これは μ 自体を一定とした結果で、フガシティ $e^{\beta\mu}$ を一定にした結果とは異なる。

問 2(ii)：粒子数密度と圧力

大熱力学ポテンシャルは $\Omega = -k_B T \ln \Xi = -k_B T \langle N \rangle$ である。 $\Omega = -PV$ と比較すれば

$$\frac{\langle N(T) \rangle}{V} = \frac{P}{k_B T}.$$

問 3(i)：有限箱の Bose 気体の最低エネルギー

単粒子の準位を

$$\varepsilon_{n_x n_y n_z} = \varepsilon_L \left(n_x^2 + n_y^2 + \frac{n_z^2}{4} \right), \quad \varepsilon_L = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

とおく。単粒子基底は $(1, 1, 1)$ で $\varepsilon_0 = 9\varepsilon_L/4$ 。最小の励起は $n_z = 1 \rightarrow 2$ で、単粒子励起ギャップは

$$\Delta = \varepsilon_{112} - \varepsilon_{111} = \frac{3\varepsilon_L}{4} = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{8mL^2}.$$

Bose 粒子 $N \geq 1$ の全粒子が基底モードにある基底状態は Fock 状態として一意であり、第一励起状態は粒子 1 個のみを $(1, 1, 2)$ に移す。したがって

$$E_g = \frac{9}{4}N\varepsilon_L, \quad E_e = \frac{9}{4}N\varepsilon_L + \Delta.$$

注記：第一励起状態の多重度は N ではなく 1。同一 Bose 粒子をどれか一つ選ぶというラベルは物理状態を区別しない。

問 3(ii)：極低温での内部エネルギー

$k_B T \ll \Delta$ では二つの最低多体系状態だけを残すと

$$Z_N \simeq e^{-\beta E_g} (1 + e^{-\beta \Delta}), \quad U \simeq E_g + \frac{\Delta}{e^{\beta \Delta} + 1}.$$

つまり

$$U(T) = E_g + \Delta e^{-\Delta/(k_B T)} + O\left(e^{-2\Delta/(k_B T)}\right) \quad (\text{最低励起のみの近似}).$$

なお $O(e^{-2\beta\Delta})$ の記述は、 $N \geq 2$ の多体系で 2 個励起の準位も 2Δ に存在することを考慮した指数オーダーの目安である。基底・第一励起以外の準位を厳密に含めるなら、その縮退と励起エネルギーを足す。

問 3(iii) : $T = 0$ の定積熱容量

二準位近似の熱容量は

$$C_V \simeq k_B \frac{(\beta\Delta)^2 e^{\beta\Delta}}{(1 + e^{\beta\Delta})^2} \sim k_B (\beta\Delta)^2 e^{-\beta\Delta}.$$

よって有限体積・有限粒子数で

$$\lim_{T \downarrow 0} C_V(T) = 0.$$

問 3(iv) : $T_0 \rightarrow 0$ におけるエントロピー差

最低二準位近似では

$$\frac{S(T)}{k_B} \simeq \ln(1 + e^{-x}) + \frac{x}{1 + e^x}, \quad x = \frac{\Delta}{k_B T}.$$

$x \rightarrow \infty$ で $S(T) \sim k_B(1 + x)e^{-x} \rightarrow 0$ 。したがって

$$\lim_{T_0 \downarrow 0} \{S(T_0) - S(T_0/2)\} = 0.$$

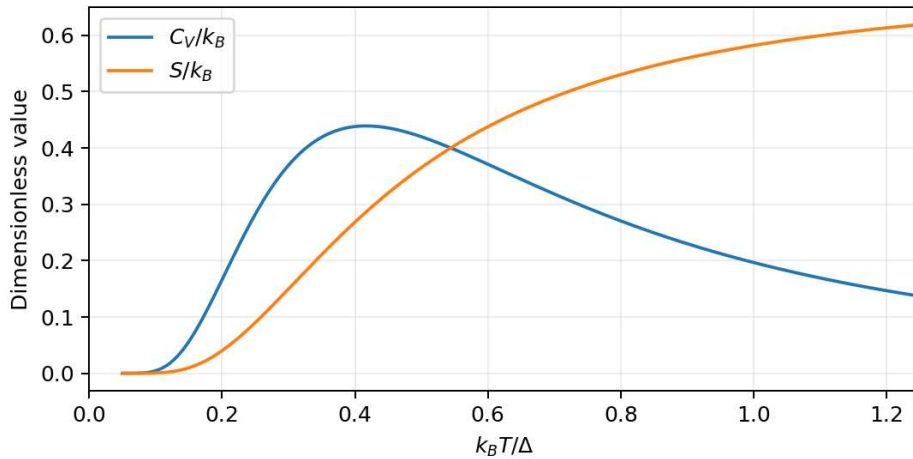


図 1：最低二準位近似に基づく低温の熱容量とエントロピー。

問 3(v) : 古典結果との比較と Boltzmann の原理

古典では $\Delta S = (3/2)Nk_B \ln 2$ が $T_0 \downarrow 0$ でも残るが、量子の有限箱では基底状態が一意でエントロピーは 0 に収束する。Boltzmann の原理 $S = k_B \ln W$ の観点では、古典の連続位相空間は $T \rightarrow 0$ の殻の体積を連続的に縮めるため、状態数を離散的に数えられず、古典近似の適用限界に達する。一方、量子ではエネルギー間隔が有限で、 $k_B T \ll \Delta$ では基底状態 1 個に確率が集中する。この極限では熱力学極限よりも先に $T \rightarrow 0$ を取っている点が重要である。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2017年度

出題テーマ / 編集上の分類

反強磁性Ising模型

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

温度 T の熱平衡状態にある大きさ $1/2$ のスピンを考える。スピンと外部磁場 H の相互作用はハミルトニアン $\mathcal{H}_1 = -\mu H \sigma$ によって記述される。ただし、 σ はスピンの向きに応じて $+1$ または -1 の値をとる変数(スピン変数)で、 μ はスピンの磁気モーメントの大きさを表す定数である。ボルツマン定数を k_B とし、以下の設問に答えよ。

1. 外部磁場 H のもとで、 $\sigma = +1$ となる確率 p_+ および $\sigma = -1$ となる確率 p_- を求めよ。
2. 外部磁場 H のもとで、 σ の期待値が $\langle \sigma \rangle = \tanh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)$ となることを示せ。

次に図1のような正方格子上で隣接スピン間に交換相互作用 J が働くイジング模型を考える。そのハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_2 = J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu H \sum_i \sigma_i$$

で与えられる。ここで、 $\sigma_i (= \pm 1)$ は格子点 i におけるスピン変数を表し、 $\sum_{\langle i,j \rangle}$ は隣接格子点の組についての和を表す。また、反強磁性相互作用 ($J > 0$) を仮定する。この模型を平均場近似の範囲内で取り扱うことを考える。

3. 正方格子は図1のように1つおきに A, B の2つの格子に分けることができる。平均場近似では、格子 A, B 上のスピンはそれぞれ

$$\mu H_{\text{eff,A}} = -zJ\langle \sigma_B \rangle + \mu H, \quad \mu H_{\text{eff,B}} = -zJ\langle \sigma_A \rangle + \mu H$$

で決まる有効磁場 $H_{\text{eff,A}}, H_{\text{eff,B}}$ を感じると仮定する。ここで $\langle \sigma_A \rangle, \langle \sigma_B \rangle$ は、それぞれ格子 A, B 上のスピン変数の期待値である。また、 z は隣接スピンの数で、正方格子では $z = 4$ である。この有効磁場のもとで、格子 A, B 上のスピン変数の期待値を計算すると、 $\langle \sigma_A \rangle$ と $\langle \sigma_B \rangle$ が満たすべき式(セルフ・コンシステント方程式)はある関数 $f(x)$ を用いて以下の形で表される。

$$\langle \sigma_A \rangle = f(\langle \sigma_B \rangle), \quad \langle \sigma_B \rangle = f(\langle \sigma_A \rangle).$$

$f(x)$ を求めよ。

4. $H = 0$ のとき、セルフ・コンシステント方程式が反強磁性秩序に対応する解 $\langle \sigma_A \rangle = -\langle \sigma_B \rangle \neq 0$ をもつための条件を考える。 $y = f(x)$ のグラフを考えることで、このような解は、ある転移温度 T_N よりも低温でのみ存在することがわかる。 T_N を求めよ。
5. セルフ・コンシステント方程式を利用して、 $T > T_N$ における1スピンあたりの帯磁率

$$\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{d}{dH} \left(\frac{\langle \sigma_A \rangle + \langle \sigma_B \rangle}{2} \right)$$

を求めよ。

次に図2のような正方格子上の隣接スピン間および対角線方向の隣接スピン間に、それぞれ交換相互作用 J, J' が働くイジング模型を考える。そのハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_3 = J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + J' \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu H \sum_i \sigma_i$$

で与えられる。ここで、 $\sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle}$ は図2の破線で示される対角線方向の隣接格子点の組についての和を表す。ただし、交換相互作用が $0 < J' < J$ という条件を満たしているとする。

6. 設問3と同様にして2つの格子 A, B を考え、平均場近似を適用して、 $H = 0$ のときのセルフ・コンシステント方程式を書き下せ。また、 $\langle \sigma_A \rangle = -\langle \sigma_B \rangle \neq 0$ となるような反強磁性秩序の転移温度を求めよ。さらに $J' \rightarrow J$ の極限で転移温度が0となることを示せ。

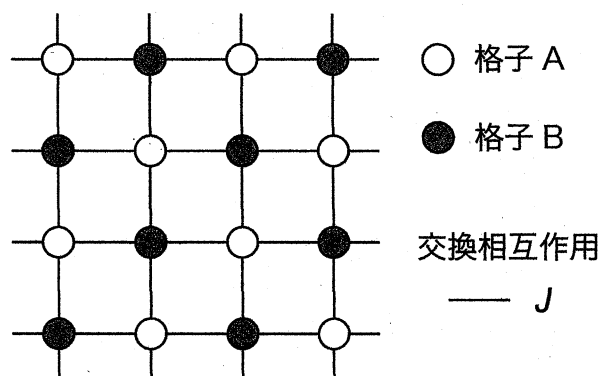
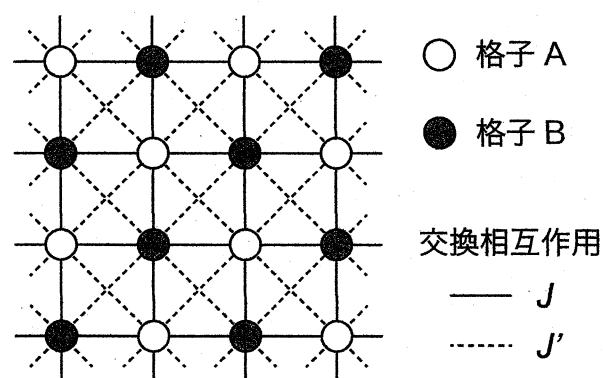


図1



2017 年度 第 2 問 解答・解説

模型と符号 $\sigma_i = \pm 1$, $\beta = 1/(k_B T)$ 。原題の交換項は $+J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$ であり、 $J > 0$ が反強磁性に対応する（通常の強磁性の $-J \sigma_i \sigma_j$ と符号が逆）。正方格子の最近接数 $z = 4$ 。

問 1：単スピンの確率

$\mathcal{H}_1 = -\mu H \sigma$ 、従って

$$Z_1 = e^{\beta \mu H} + e^{-\beta \mu H} = 2 \cosh(\beta \mu H), \quad p_{\pm} = \frac{e^{\pm \beta \mu H}}{2 \cosh(\beta \mu H)}.$$

問 2：単スピンの平均値

$$\langle \sigma \rangle = \frac{e^{\beta \mu H} - e^{-\beta \mu H}}{e^{\beta \mu H} + e^{-\beta \mu H}} = \tanh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right).$$

問 3：2 副格子の自己無撞着方程式

隣接する副格子の平均値を m_A, m_B とおく。副格子 A の有効場は $\mu H_{\text{eff},A} = \mu H - 4Jm_B$ であり、副格子 B は $\mu H_{\text{eff},B} = \mu H - 4Jm_A$ 。したがって

$$m_A = f(m_B), \quad m_B = f(m_A), \quad f(x) = \tanh\left(\frac{\mu H - 4Jx}{k_B T}\right).$$

ここで μ は 1 スピン当たりの磁気モーメントの大きさであり、 H は原題の外部磁場である。

問 4：反強磁性秩序と Néel 温度

$H = 0$ で $m_A = -m_B = m$ と仮定すると

$$m = \tanh(4\beta J m).$$

$m \rightarrow 0$ において右辺は $4\beta J m + O(m^3)$ 。零以外の解が現れる臨界条件は $4\beta J > 1$ だから

$$T_N = \frac{4J}{k_B}.$$

$T < T_N$ では $m > 0$ の解と、A・B を交換した $m < 0$ の解がある。

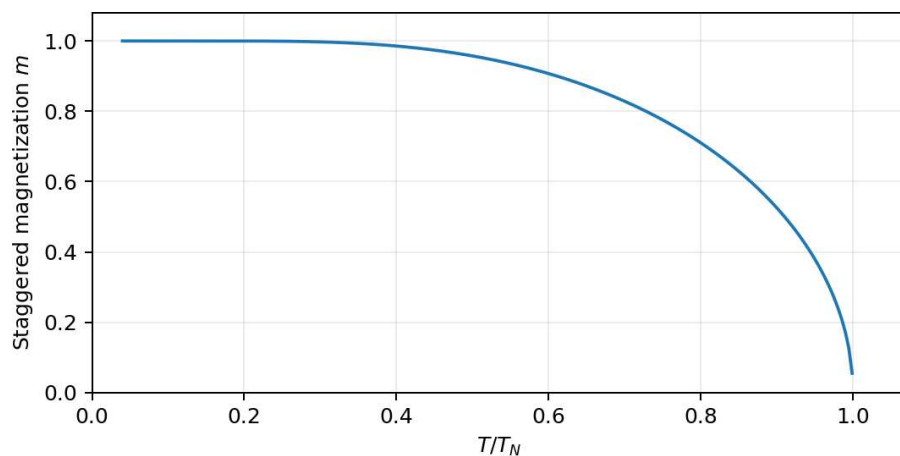


図 2 : $m = \tanh[(T_N/T)m]$ の非零解 (平均場近似)。

問 5 : 高温側の一様帯磁率

$T > T_N$ かつ十分小さい H では、反強磁性秩序はなく $m_A = m_B = m$ とおける。 $\tanh x \simeq x$ により

$$m = \beta(\mu H - 4Jm), \quad m = \frac{\beta\mu}{1 + 4\beta J}H.$$

原題の定義を使うと

$$\chi = \frac{d}{dH} \left(\mu \frac{m_A + m_B}{2} \right) \Big|_{H=0} = \frac{\beta\mu^2}{1 + 4\beta J} = \frac{\mu^2}{k_B T + 4J}, \quad T > T_N.$$

これは反強磁性の一様帯磁率であり、転移温度で発散する**交替帯磁率**とは異なる。

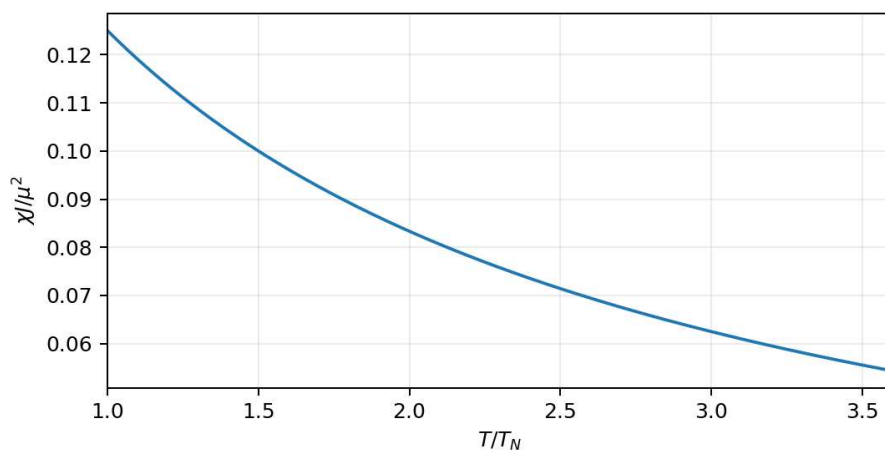


図 3 : $T > T_N$ の一様帯磁率の平均場予測。

問 6：対角方向の交換相互作用 J' の追加

対角方向の 4 近接は**同じ副格子**に属する。したがって新たな有効場は

$$\mu H_{\text{eff},A} = \mu H - 4Jm_B - 4J'm_A, \quad \mu H_{\text{eff},B} = \mu H - 4Jm_A - 4J'm_B.$$

自己無撞着方程式は

$$\begin{cases} m_A = \tanh [\beta(\mu H - 4Jm_B - 4J'm_A)], \\ m_B = \tanh [\beta(\mu H - 4Jm_A - 4J'm_B)]. \end{cases}$$

$H = 0$ で $m_A = -m_B = m$ を代入すると

$$m = \tanh[4\beta(J - J')m].$$

よって $0 < J' < J$ の範囲で

$$T_N(J, J') = \frac{4(J - J')}{k_B}.$$

$J' \rightarrow J^-$ で $T_N \rightarrow 0$ 。本設問の 2 副格子平均場の枠内では、対角方向の反強磁性交換が Néel 秩序を競合的に抑制することを表す。 $J' = J$ で起こり得る別種の秩序（縞秩序など）まで決定するものではない。

学習上のポイントと検算

1. 2018 年度：古典理想気体では $C_V = \frac{3}{2}Nk_B$ だが、有限箱の量子気体では $C_V \rightarrow 0$ 。 $T \rightarrow 0$ と熱力学極限は同一視しない。
2. 2018 年度：粒子透過壁では外界の**化学ポテンシャル一定**を条件に、 $\langle N \rangle \propto T^{3/2}e^{\mu/(k_B T)}$ とする。
3. 2017 年度：原題の $+J\sigma_i\sigma_j$ は反強磁性。平均場は A・B の 2 副格子で構築する。
4. 2017 年度：磁場ゼロで $m_A = -m_B$ 、一様微弱磁場への応答では $m_A = m_B$ の枝に着目する。
5. 2017 年度：対角交換 J' は A-A・B-B 結合であり、秩序温度を $J - J'$ に置換する。

備考：出題文の記号と仮定に準拠して整理した非公式解答である。グラフは解説用の別計算であり、原題の一部ではない。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2016 年度

出題テーマ / 編集上の分類

連成振動子とフォノンの低温比熱

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

自然長 a のバネと質量 m の質点からなる系が、温度 T の平衡状態にある場合について考える。バネ定数は $m\omega^2$ であり、 $\omega > 0$ とする。

まず、 N 個の質点がそれぞれ独立にバネと結合し、互いに独立な調和振動子系をなす場合を考える (図1)。系のハミルトニアンは、 j 番目の質点の位置を x_j 、運動量を p_j として

$$H = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{2m} p_j^2 + \frac{m\omega^2}{2} (x_j - a)^2 \right) \quad (1)$$

で与えられるとする。ただし、バネの質量は無視できるものとする。ボルツマン定数を k_B とし、以下の問に答えよ。

1. この系を古典力学的に考えた場合、質点1個当たりの内部エネルギー U 、比熱 C を求めよ。また、1番目の質点の位置の平均 $\langle x_1 \rangle$ 、位置の分散 $\langle x_1^2 \rangle - \langle x_1 \rangle^2$ を求めよ。必要なら、次の公式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (\alpha > 0) \quad (2)$$

2. この系を量子力学的に考えた場合、質点1個当たりの内部エネルギー U_Q 、比熱 C_Q を求めよ。また、1番目の質点の位置の平均、位置の分散を求めよ。温度が高い極限と低い極限において、比熱 C_Q と設問1の結果 C を比較せよ。必要なら、次の関係を用いてよい。量子力学での調和振動子 (位置座標 X 、運動量 P) の固有ベクトル $|n\rangle$ 、($n = 0, 1, 2, \dots$) の固有値は

$$H|n\rangle = \left(\frac{1}{2m} P^2 + \frac{m\omega^2}{2} X^2 \right) |n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \quad (3)$$

で与えられる。ここで固有ベクトル $|n\rangle$ は完全規格直交系をなすとする。また、位置の演算子 X に対して

$$X|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle), \quad n > 0, \quad X|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} |1\rangle \quad (4)$$

であるとしてよい。

次に、 N 個の質点を $N + 1$ 個のバネで 1 次元的に結合した場合について考える (図 2)。運動は 1 次元的であり、質点の位置をそれぞれ $x_1, x_2, \dots, x_N$ 、運動量を $p_1, p_2, \dots, p_N$ とする。系のハミルトニアンは

$$H = \frac{m\omega^2}{2}(x_1 - a)^2 + \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{m\omega^2}{2}(x_2 - x_1 - a)^2 + \frac{1}{2m}p_2^2 + \dots \\ + \frac{m\omega^2}{2}(x_N - x_{N-1} - a)^2 + \frac{1}{2m}p_N^2 + \frac{m\omega^2}{2}((N+1)a - x_N - a)^2 \quad (5)$$

で与えられる。

3. この系は N 個の独立な基準振動の和で表される。それぞれの基準振動の固有振動数が以下で与えられることを示せ。

$$\omega_\ell = \omega \sqrt{2 - 2 \cos \left(\frac{\ell}{N+1} \pi \right)}, \quad \ell = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

4. この系を古典力学的に考えた場合、質点 1 個当たりの比熱 C_1 を求めよ。
5. この系を量子力学的に考えた場合、質点 1 個当たりの比熱 C_{1Q} は、 N が非常に大きく、かつ低温の極限では温度のべきに比例する。つまり、 $C_{1Q} \simeq AT^b$ の形に表わされる。べき b と係数 A を求めよ。必要なら、次の公式を用いてよい。

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{6} \quad (7)$$

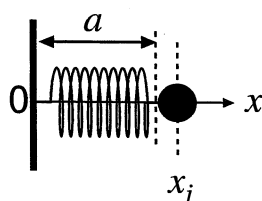


図 1: j 番目の調和振動子。

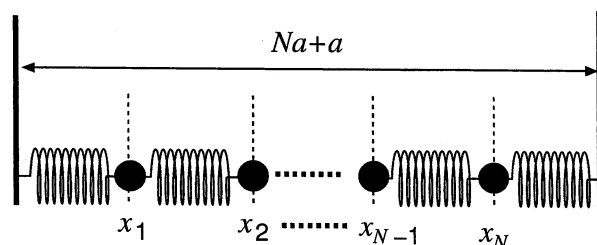


図 2: N 個の質点を $N + 1$ 個のバネで結合した 1 次元連成振動子系。両端は全体の自然長で固定されている。

2016 年度 第 2 問 独立解答・解説

基本設定 振動子の質量は m 、角振動数は ω 、自然長は a 。温度逆数 $\beta = (k_B T)^{-1}$ 、無次元量 $z = \beta \hbar \omega$ を用いる。

問 1：独立調和振動子の古典統計

1 粒子の Hamiltonian は $h = p^2/(2m) + m\omega^2(x - a)^2/2$ 。Gaussian 積分を独立に実行すると

$$Z_{1,\text{cl}} = \frac{1}{h_P} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\beta h} dp dx = \frac{2\pi}{\beta \omega h_P} = \frac{1}{\beta \hbar \omega},$$

ここでは $h_P = 2\pi\hbar$ とした。 $-\partial_\beta \ln Z_{1,\text{cl}}$ と $\partial_T U$ より

$$U = k_B T, \quad C = k_B.$$

対称な Gaussian 分布より平均は $\langle x_1 \rangle = a$ であり、二次モーメントは

$$\langle x_1^2 \rangle - \langle x_1 \rangle^2 = \frac{k_B T}{m\omega^2}.$$

運動量側・位置側のそれぞれに $k_B T/2$ が配分される。

問 2：独立調和振動子の量子統計

固有エネルギー $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ から

$$Z_{1,\text{q}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-z(n+1/2)} = \frac{e^{-z/2}}{1 - e^{-z}} = \frac{1}{2 \sinh(z/2)}.$$

従って

$$U_{\text{q}} = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^z - 1} \right) = \frac{\hbar\omega}{2} \coth \frac{z}{2}, \quad C_{\text{q}} = k_B \frac{z^2 e^z}{(e^z - 1)^2}.$$

$\langle n | X | n \rangle = 0$ 、 $\langle n | X^2 | n \rangle = (\hbar/m\omega)(n + 1/2)$ 。ゆえに

$$\langle x_1 \rangle = a, \quad \text{Var}(x_1) = \frac{\hbar}{2m\omega} \coth \frac{z}{2}.$$

$z \rightarrow \infty$ の極低温で $C_{\text{q}} \sim k_B z^2 e^{-z} \rightarrow 0$ 。古典の $C = k_B$ と異なり、有限の離散励起ギャップによって熱励起が凍結する。高温 $z \ll 1$ では $C_{\text{q}} \rightarrow k_B$ 、 $\text{Var } x \rightarrow k_B T/(m\omega^2)$ に一致する。

問 3：固定端連成振動子の基準モード

平衡位置は $x_j^{(0)} = ja$ 。変位 $q_j = x_j - ja$ 、端点 $q_0 = q_{N+1} = 0$ とすれば

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \sum_{j=1}^{N+1} (q_j - q_{j-1})^2.$$

運動方程式は

$$\ddot{q}_j = -\omega^2(2q_j - q_{j-1} - q_{j+1}).$$

正規直交モード $e_j^{(\ell)} = \sqrt{2/(N+1)} \sin(\ell\pi j/(N+1))$ ($\ell = 1, \dots, N$) を代入すると、固有値は

$$2 - e^{i\theta_\ell} - e^{-i\theta_\ell} = 2 - 2 \cos \theta_\ell, \quad \theta_\ell = \frac{\ell\pi}{N+1}.$$

固有角振動数は指定された通り

$$\omega_\ell = \omega \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\ell\pi}{N+1}} = 2\omega \sin \frac{\ell\pi}{2(N+1)}.$$

変換 $Q_\ell = \sum_j e_j^{(\ell)} q_j$ 、 $P_\ell = \sum_j e_j^{(\ell)} p_j$ は正準で、 $H = \sum_\ell [P_\ell^2/(2m) + m\omega_\ell^2 Q_\ell^2/2]$ に分離する。

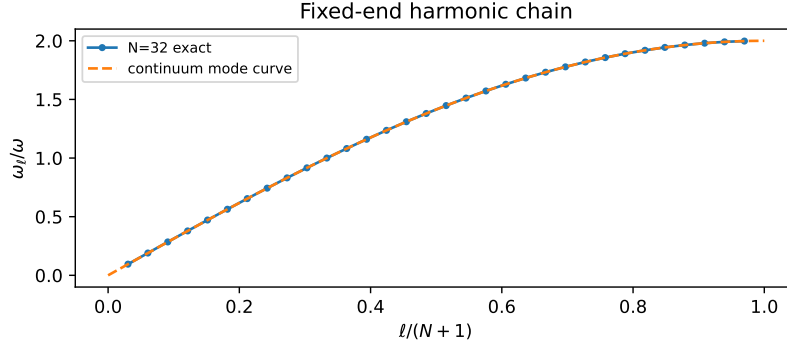


図 1：固定端連成振動子の正確な分散関係。

問 4：古典的な連成振動子の比熱

すべて $\omega_\ell > 0$ なので、各独立モードの古典分配関数は $Z_\ell = 1/(\beta\hbar\omega_\ell)$ である（規格化因子は U, C に影響しない）。したがって $U = Nk_B T$ 、質点 1 個あたりは

$$C_1 = k_B.$$

問 5：量子フォノンの低温比熱

量子モードは $\varepsilon_{n_\ell} = \hbar\omega_\ell(n_\ell + 1/2)$ を持つため

$$\frac{C_{1q}}{k_B} = \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^N \frac{x_\ell^2 e^{x_\ell}}{(e^{x_\ell} - 1)^2}, \quad x_\ell = \frac{\hbar\omega_\ell}{k_B T}.$$

$N \gg 1$ では小さい波数の分散が $\omega_\ell \simeq \omega\pi\ell/(N+1)$ 、密度は $d\ell/N \simeq d\Omega/(\pi\omega)$ である。 $\hbar\omega/N \ll k_B T \ll \hbar\omega$ の熱力学的低温領域では

$$\begin{aligned} C_{1q} &\simeq \frac{k_B}{\pi\omega} \int_0^\infty d\Omega \frac{(\beta\hbar\Omega)^2 e^{\beta\hbar\Omega}}{(e^{\beta\hbar\Omega} - 1)^2} \\ &= \frac{k_B^2 T}{\pi\hbar\omega} \int_0^\infty \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} dx = \boxed{\frac{\pi k_B^2}{3\hbar\omega} T}. \end{aligned}$$

よって $b = 1$, $A = \pi k_B^2/(3\hbar\omega)$ 。極限の順序に注意：有限 N を固定した $T \rightarrow 0$ では最低の $\omega_1 > 0$ のため $C_{1q} = O(T^{-2} e^{-\hbar\omega_1/(k_B T)})$ であって、線形則ではない。

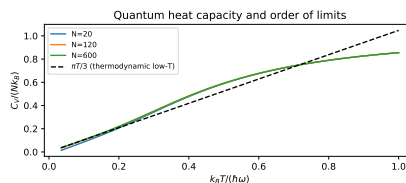


図 2：有限 N の熱容量と連続極限の線形低温漸近。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2015 年度

出題テーマ / 編集上の分類

高分子鎖と揺らぎ・応答

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第 2 問

高分子鎖について図 1 のようなモデル化を考えよう。高分子鎖の始点は、二次元正方格子の原点 $(x, y) = (0, 0)$ に固定されている。また、高分子鎖を構成するモノマー (単量体) の間をつなぐ手の長さは $\sqrt{2}$ で、それぞれの手は右斜上 45 度あるいは左斜上 45 度のいずれかの方向にのみ伸びることができるものとする。

y 軸方向の長さが L (モノマー数が $L+1$) の高分子鎖を考えると、その取りうる配位の総数は 2^L である。そのうち、終点が (x, L) である配位の数 $C(x, L)$ とすると、 $C(x, L)$ と $C(x, L+1)$ との間には、以下の漸化式が成り立つ。

$$C(x, L+1) = C(x-1, L) + C(x+1, L) \quad (1)$$

1. $C(x, L)$ が以下で与えられることを示せ。

$$C(x, L) = \begin{cases} \frac{L!}{((L-x)/2)!((L+x)/2)!} & (L+x) \text{ が偶数, かつ } |x| \leq L \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \quad (2)$$

2. x に関する $C(x, L)$ のフーリエ変換 $\tilde{C}(k, L)$

$$\tilde{C}(k, L) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{-ikx} C(x, L), \quad C(x, L) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \tilde{C}(k, L) dk \quad (3)$$

を導入する。式 (1) から $\tilde{C}(k, L)$ に関する漸化式を導け。

3. $L = 0$ における初期条件と上で求めた漸化式から、 $\tilde{C}(k, L)$ の表式を導け。
4. $k^2 L$ を一定に保ったままで、 L を十分に大きくすることを考える。 $\log \tilde{C}(k, L)$ を k に関して 2 次まで展開し、 $C(x, L)$ の漸近形を求めよ。必要であれば、ガウス積分の公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$ (ただし、 a は正の実数) を用いてよい。

終点のモノマーに電荷 q を与える。それ以外のモノマーは電氣的に中性とする。 x 軸の正の向きに大きさ E の静電場を印加した状況を考える。 y 軸方向の長さが L の系が、温度 T の熱浴に接し、熱平衡状態にあるとき、以下の設問に答えよ。ただし、ボルツマン定数を k_B とする。また、 L は設問 4 の近似が使えるほどは大きくないとする。

5. この系の分配関数を求めよ。
6. 終点のモノマーの x 軸方向の位置の期待値 $\langle x \rangle$ を T と E の関数として求めよ。
7. $E = 0$ における x の分散 $\langle x^2 \rangle_{E=0}$ と、 x の期待値の E に関する微係数 $\left. \frac{\partial \langle x \rangle}{\partial E} \right|_{E=0}$ との間
に比例関係が成り立つことを、 $C(x, L)$ の詳細な形を用いずに示せ。また、その比例係数を求めよ。

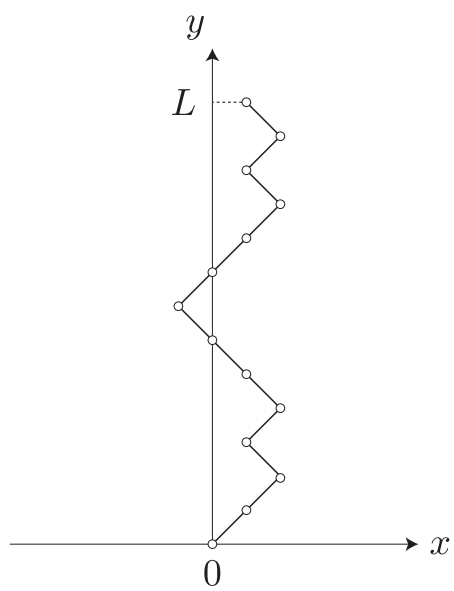


図 1: 高分子鎖のモデル

2015 年度 第 2 問 独立解答・解説

定義 L 本の斜めの結合は x 方向へ各 ± 1 進む。端点 $x \in \{-L, -L+2, \dots, L\}$ の配置数を $C(x, L)$ と書く。電場における一配置のエネルギーは $-qEx$ とする。

問 1：二項係数による配置数

右上がり を n_+ 、左上がり を n_- とすると $n_+ + n_- = L$ 、 $n_+ - n_- = x$ である。したがって $n_{\pm} = (L \pm x)/2$ は非負整数である必要がある。結合の並べ方から

$$C(x, L) = \binom{L}{(L+x)/2} = \frac{L!}{((L+x)/2)!((L-x)/2)!}$$

が許容格子点で成立し、それ以外では 0。総和は $\sum_x C(x, L) = 2^L$ 。

問 2：離散 Fourier 変換の漸化式

原題の $C(x, L+1) = C(x-1, L) + C(x+1, L)$ を変換すると、 $x \mapsto x \pm 1$ の変数変換により

$$\tilde{C}(k, L+1) = (e^{-ik} + e^{ik})\tilde{C}(k, L) = \boxed{2 \cos k \tilde{C}(k, L)}.$$

問 3：初期条件からの明示解

$L=0$ では $C(x, 0) = \delta_{x0}$ 、ゆえに $\tilde{C}(k, 0) = 1$ 。従って

$$\boxed{\tilde{C}(k, L) = (2 \cos k)^L}.$$

問 4：中心極限定理と格子の偶奇

$|k| = O(L^{-1/2})$ のとき

$$\log \tilde{C}(k, L) = L \log 2 + L \log \cos k = L \log 2 - \frac{Lk^2}{2} + O(Lk^4).$$

Fourier 逆変換の $k=0$ 近傍は Gaussian であるが、 $k = \pm\pi$ にも $|2 \cos k| = 2$ の寄与がある。したがって x と L の偶奇が一致する許容格子点で

$$C(x, L) \sim \frac{2^{L+1}}{\sqrt{2\pi L}} \exp\left(-\frac{x^2}{2L}\right), \quad x = O(\sqrt{L}).$$

偶奇が一致しなければ $C(x, L) = 0$ である。係数の 2 倍は、端点の取り得る x の格子間隔が 2 であることに対応する。これを無視すると Gaussian 近似の規格化を半分にしてしまう。

問 5：外部電場下の分配関数

$Z_L(E, T) = \sum_x C(x, L) e^{\beta q E x}$ を二項展開して

$$\boxed{Z_L(E, T) = (e^{\beta q E} + e^{-\beta q E})^L = [2 \cosh(\beta q E)]^L}.$$

$$F = -k_B T \ln Z_L = -L k_B T \ln[2 \cosh(\beta q E)].$$

問 6：端点位置の平均値

$\partial_{\beta q E} \ln Z_L = \langle x \rangle$ より

$$\langle x \rangle = L \tanh \left(\frac{qE}{k_B T} \right).$$

$E \rightarrow 0$ では $\langle x \rangle \simeq LqE/(k_B T)$ 、 $E \rightarrow +\infty$ では $\langle x \rangle \rightarrow L$ ($q > 0$)。

問 7：揺らぎ・応答関係（形状の詳細を使わない証明）

一般に $\partial_{\beta q E}^2 \ln Z = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ なので

$$\frac{\partial \langle x \rangle}{\partial E} = \beta q (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2).$$

$E = 0$ では反転対称性により $\langle x \rangle_0 = 0$ であるため

$$\left. \frac{\partial \langle x \rangle}{\partial E} \right|_{E=0} = \frac{q}{k_B T} \langle x^2 \rangle_{E=0}.$$

比例係数は $q/(k_B T)$ 。なお本モデルでは $\langle x^2 \rangle_{E=0} = L$ が厳密に成立する。この関係は線形応答を平衡揺らぎと結びつける揺動散逸関係の静的な例である。

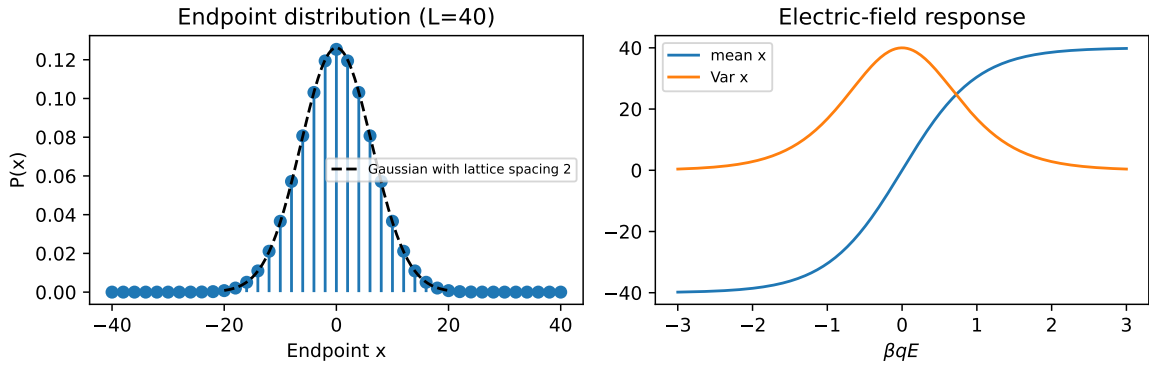


図 3：高分子端点の離散分布と電場に対する厳密な平均・分散。

復習ポイント 二項係数と Fourier 母関数、格子分布の中心極限定理、分配関数の対数微分、揺らぎ・応答の恒等式を関連付けて確認する。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2014 年度

出題テーマ / 編集上の分類

2次元Fermi気体・2バンド

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

xy 平面上の2次元空間内に閉じ込められたフェルミ粒子系のグランドカノニカル分布を考える。空間は、一辺の長さが L の正方形として周期境界条件を採用する。以下の設問ではスピンの自由度は考えない。

まず、質量 m の自由フェルミ粒子系を考える。

1. フェルミ粒子の持つ波数を $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ とし、1粒子の固有エネルギー $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ を求めよ。さらに、この固有エネルギーの低い方から順に N_0 番目までフェルミ粒子を詰めたとする。このときの固有エネルギーの最大の値を求めよ。ただし N_0 は十分大きな数とせよ。

2. このフェルミ粒子系の大分配関数

$$\Xi(T, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{\mathbf{k}}\}} e^{-\beta(E_N - \mu N)} \quad (1)$$

を $\mathbf{k}$ の取り得る値についての積の形に変形せよ。ここで $\beta = 1/(k_B T)$, k_B はボルツマン定数, T は絶対温度, μ は化学ポテンシャルである。また $n_{\mathbf{k}}$ は波数 $\mathbf{k}$ を持つ粒子の数を表し, $\{n_{\mathbf{k}}\}$ に関する和は, $N = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$ を満たすすべての可能な $\{n_{\mathbf{k}}\}$ の組み合わせについての和である。また, E_N は $\{n_{\mathbf{k}}\}$ に依存する全エネルギーで, $E_N = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}$ で与えられる。

3. グランドカノニカル分布において、全粒子数の期待値 $\bar{N}$ に関して

$$\bar{N} = \sum_{\mathbf{k}} f(\varepsilon_{\mathbf{k}}) \quad (2)$$

が成り立つことを示せ。ここで $f(\varepsilon_{\mathbf{k}})$ はフェルミ分布関数である。さらに, L が十分大きいとして, (2) 式の $\mathbf{k}$ に関する和をエネルギー積分の形に書き直して積分を実行せよ。

4. フェルミ分布関数の概形を用いて、低温の極限における比熱が温度 T に比例する理由を定性的に説明せよ。

次に、1つの波数 $\mathbf{k}$ に対して、エネルギーが負の状態とエネルギーが正の状態があるようなフェルミ粒子系を考える (図1)。エネルギーが負の分散関係と正の分散関係は、それぞれ

$$\varepsilon_{1\mathbf{k}} = -\Delta - \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2M}, \quad \varepsilon_{2\mathbf{k}} = \Delta + \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m} \quad (3)$$

であるとする。絶対零度では、負のエネルギー状態に粒子が完全に詰まっていて、正のエネルギー状態には粒子が存在しないとする。

5. $0 < k_B T \ll \Delta$ の温度領域において、粒子の分布がどのようなようになるかを定性的に説明せよ。
6. 負のエネルギー状態のフェルミ粒子の粒子数の期待値を $\bar{N}_1(T)$ と書く。ただし、2次元の波数 $\mathbf{k}$ の絶対値には上限 K があるとし、絶対零度では

$$\bar{N}_1(0) = \sum_{|\mathbf{k}| < K} 1$$

と書けるとする。設問5と同じ温度領域において、 μ を温度の関数として求めよ。ただし, K は十分大きいとしてよい。

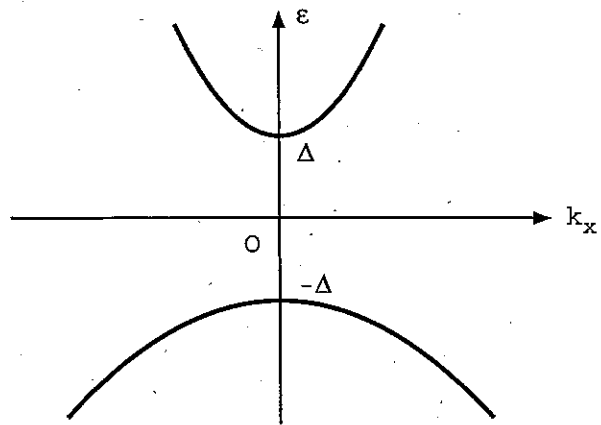


図 1: $k_y = 0$ での分散関係

2014 年度 第 2 問：詳解

2 次元 Fermi 気体とギャップを持つ 2 バンド模型

対象：原題の設定問 1–6。原題でスピン自由度は考えない。 L は正方形の一辺、 N_0 は粒子数、 m, M は有効質量、 $\Delta > 0$ はギャップ半幅である。

1. 自由 Fermi 気体の分散関係と Fermi エネルギー

周期境界条件より

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y), \quad \varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m}, \quad n_x, n_y \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

スピンを数えないので、 k -空間にある単位状態あたりの面積は $(2\pi/L)^2$ 。 $T = 0$ で Fermi 円の内側に N_0 個詰めると

$$N_0 \simeq \frac{\pi k_F^2}{(2\pi/L)^2} = \frac{L^2 k_F^2}{4\pi}, \quad \boxed{\varepsilon_F \simeq \frac{2\pi \hbar^2 N_0}{mL^2}}. \quad (2)$$

これは問題の「 N_0 が十分大きい」近似による最高占有準位である。

2. Fermi 粒子の大分配関数

占有数 $n_{\mathbf{k}} = 0, 1$ に限られるので

$$\Xi(T, \mu) = \sum_{\{n_{\mathbf{k}}\}} \exp \left[-\beta \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \right] \quad (3)$$

$$= \prod_{\mathbf{k}} \left(\sum_{n=0}^1 e^{-\beta n (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} \right) = \boxed{\prod_{\mathbf{k}} (1 + e^{-\beta (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)})}. \quad (4)$$

したがって $\bar{n}_{\mathbf{k}} = \beta^{-1} \partial_{\mu} \ln \Xi_{\mathbf{k}}$ より

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}. \quad (5)$$

3. 粒子数と状態密度

$\bar{N} = \beta^{-1} \partial_{\mu} \ln \Xi = \sum_{\mathbf{k}} f(\varepsilon_{\mathbf{k}})$ 。連続近似で

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{L^2}{(2\pi)^2} \int d^2 k = \frac{mL^2}{2\pi \hbar^2} \int_0^{\infty} d\varepsilon. \quad (6)$$

よって、 $g_2 = mL^2/(2\pi \hbar^2)$ と置けば

$$\bar{N} = g_2 \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} = \boxed{g_2 k_B T \ln (1 + e^{\mu/k_B T})}. \quad (7)$$

$T \rightarrow 0$, $\mu > 0$ で $\bar{N} = g_2 \mu$ を回復する。

4. 低温比熱が T に比例する理由と係数

Fermi 分布が $T = 0$ の階段関数から変化するのは Fermi 面の近く、 $|\varepsilon - \varepsilon_F| \sim k_B T$ に限られる。励起粒子数は T に比例し、各励起のエネルギーも $k_B T$ 程度だから、内部エネルギー増分は T^2 、比熱は T に比例する。

$$U = g_2 \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{g_2 \varepsilon_F^2}{2} + \frac{\pi^2 g_2}{6} (k_B T)^2 + \dots \quad (8)$$

N 一定では、定数状態密度ゆえ $\mu = \varepsilon_F + O(e^{-\varepsilon_F/k_B T})$ 。ゆえに

$$\boxed{C_V = \frac{\pi^2}{3} g_2 k_B^2 T}, \quad \boxed{\frac{C_V}{N} \simeq \frac{\pi^2}{3} k_B \frac{k_B T}{\varepsilon_F}}. \quad (9)$$

5. ギャップを持つ 2 バンドの低温励起

原題で与えられた分散関係は

$$\varepsilon_{1\mathbf{k}} = -\Delta - \frac{\hbar^2 k^2}{2M}, \quad \varepsilon_{2\mathbf{k}} = \Delta + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (10)$$

$T = 0$ では下部バンドが満たされ上部バンドは空。 $0 < k_B T \ll \Delta$ では、下部バンドの頂点 $-\Delta$ の近くに少数の正孔 (hole) が生じ、上部バンドの底 $+\Delta$ の近くに少数の電子が熱励起される。いずれも活性化型で、その数は $e^{-\Delta/k_B T}$ によって抑制される (詳細は設問 6)。

6. 粒子数保存から化学ポテンシャルを求める

下部バンドの波数上限を K 、その帯域幅を $W = \hbar^2 K^2/(2M)$ とする。2 次元状態密度を $g_- = ML^2/(2\pi\hbar^2)$ 、 $g_+ = mL^2/(2\pi\hbar^2)$ とおく。

$$N_e = g_+ k_B T \ln \left(1 + e^{-(\Delta - \mu)/k_B T} \right), \quad (11)$$

$$N_h = g_- k_B T \left[\ln \left(1 + e^{-(\Delta + \mu)/k_B T} \right) - \ln \left(1 + e^{-(\Delta + \mu + W)/k_B T} \right) \right]. \quad (12)$$

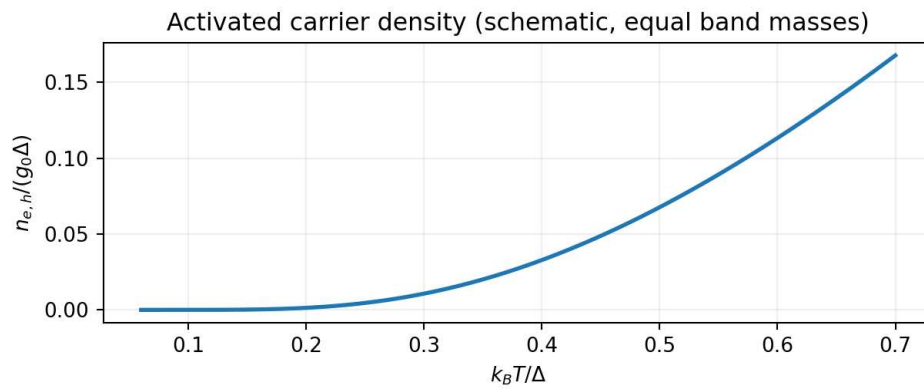
全粒子数を $\bar{N}_1(0)$ に保つ条件は $N_e = N_h$ である。 $k_B T \ll \Delta$, $W \gg k_B T$ により

$$N_e \simeq g_+ k_B T e^{-(\Delta - \mu)/k_B T}, \quad N_h \simeq g_- k_B T e^{-(\Delta + \mu)/k_B T}. \quad (13)$$

これらを等しくすると

$$\boxed{\mu(T) \simeq \frac{k_B T}{2} \ln \frac{M}{m}}. \quad (14)$$

$M = m$ なら $\mu \simeq 0$ 。同じギャップでも状態密度の非対称性により μ が中点から動くことに注意。



図：質量が等しい場合の励起キャリア密度の活性化を無次元化して表示。

検算： $g_+ \propto m$, $g_- \propto M$ の次元は $1/\text{energy}$ 。 N_e, N_h は粒子数であり、 μ はエネルギー単位を持つ。以上の式は原題の低温・大きな K の仮定の下での漸近式である。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2013 年度

出題テーマ / 編集上の分類

3次元理想Bose気体・断熱磁場変化

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

十分大きな体積 V の三次元領域に閉じ込められている理想ボース気体について以下の設問に答えよ。ただし、設問1から6においてパラメータ t を含んだ積分

$$\int_0^\infty dx \frac{x^t}{e^x - 1}$$

が $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ のとき収束することを用いてもよい。

1. 温度 T , 化学ポテンシャル μ のグランドカノニカル分布における大分配関数の表式

$$\Theta = \prod_i \Theta_i, \quad \Theta_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} \exp[-\beta(\epsilon_i - \mu)n_i], \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad (1)$$

を出発点にして、一粒子状態 i にある粒子数の統計力学的平均値が

$$f(\epsilon_i) = \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_i - \mu)] - 1} \quad (2)$$

で与えられることを示せ。ここで ϵ_i は i の一粒子エネルギー、 n_i は i にある粒子数を表す。 k_B はボルツマン定数を表すものとする。

スピン0の理想ボース気体を考える。体積 V が十分大きいので単位体積当たりの一粒子状態密度 $D(\epsilon)$ は、

$$D(\epsilon) = \begin{cases} A\epsilon^{\frac{1}{2}}, & \epsilon \geq 0 \\ 0, & \epsilon < 0 \end{cases}, \quad A = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\pi^2\hbar^3} \quad (3)$$

とおくことができる。ここで m はボース粒子の質量を表し、 $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものを表す。粒子数密度 (全粒子数 N を体積 V で割ったもの) を ρ で表し、 ρ' を

$$\rho' \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) = A \int_0^{\infty} d\epsilon \epsilon^{\frac{1}{2}} f(\epsilon) \quad (4)$$

と定義する。ある温度 T_c 以上では $\rho' = \rho$ が成り立つが、 T_c より低温ではボース・アインシュタイン凝縮が起きるため $\rho' < \rho$ となる。また T_c 以下の温度では化学ポテンシャル μ はゼロとなる。

2. ボース・アインシュタイン凝縮とはどのような現象か。40字程度で説明せよ。
3. T_c において平均粒子間距離 $\ell = \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$ と熱的ドブロイ波長 $\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}\right)^{\frac{1}{2}}$ が同程度になることを示せ (ヒント: $T = T_c$ のとき $\rho' = \rho$ かつ $\mu = 0$ である)。
4. $T < T_c$ における単位体積あたりの定積熱容量 $C_V = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_{N,V}$ の温度依存性を $C_V \propto T^\gamma$ と表したとき、 γ の値を求めよ。ここで E は単位体積あたりの内部エネルギーで

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) = A \int_0^{\infty} d\epsilon \epsilon^{\frac{3}{2}} f(\epsilon) \quad (5)$$

を表す。

5. $T < T_c$ における単位体積あたりのエントロピー S の温度依存性を $S \propto T^\nu$ と表したとき、 ν を求めよ。

一様磁場の下でのスピン 1 の理想ボース気体を考える。物理量 $\tilde{\rho}$ を

$$\tilde{\rho} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \tilde{D}(\epsilon) f(\epsilon), \quad \tilde{D}(\epsilon) \equiv D(\epsilon - \epsilon_z) + D(\epsilon) + D(\epsilon + \epsilon_z) \quad (6)$$

と定義すると、ボース・アインシュタイン凝縮の転移温度 $\tilde{T}_c$ 以上では $\tilde{\rho}$ は粒子数密度 ρ に等しいが、 $\tilde{T}_c$ より低温では $\tilde{\rho} < \rho$ となる。ここで $\epsilon_z (> 0)$ はゼーマンエネルギーを表す。

6. ゼーマンエネルギー ϵ_z を $\epsilon_{z,1} (\ll k_B T)$ から $\epsilon_{z,2} (\gg k_B T)$ まで断熱的に変化させたときの終状態の温度は始状態の温度より高いか低いかを、理由と共に述べよ。この断熱過程において常にボース・アインシュタイン凝縮は起きているものとしてよい。

2013 年度 第 2 問：詳解

3 次元理想 Bose 気体・凝縮・磁場の断熱操作

対象：原題の設問 1–6。 $\beta = 1/(k_B T)$, 粒子質量 m , 数密度 $\rho = N/V$ 。原題の状態密度は $D(\varepsilon) = A\sqrt{\varepsilon}$ ($\varepsilon \geq 0$)、 $A = m^{3/2}/(\sqrt{2}\pi^2\hbar^3)$ 。

1. Bose 分布の導出

1 粒子準位 i は任意個占有できるので $n_i = 0, 1, \dots$ 。収束条件 $\varepsilon_i - \mu > 0$ の下で

$$\Theta_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)n_i} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}}. \quad (1)$$

粒子数の平均は $f(\varepsilon_i) = \beta^{-1} \partial_{\mu} \ln \Theta_i$ より

$$\boxed{f(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1}}. \quad (2)$$

凝縮点では、最低準位の占有数を連続状態密度の積分とは別に扱う。

2. Bose–Einstein 凝縮 (約 40 字)

温度を下げると励起状態の収容粒子数が飽和し、余剰粒子が最低量子状態を巨視的に占有する現象。

3. 平均粒子間距離と熱的 de Broglie 波長

転移点は $\mu = 0$, $\rho' = \rho$ なので

$$\rho = A \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{e^{\beta_c \varepsilon} - 1} = A \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) (k_B T_c)^{3/2} \quad (3)$$

$$= \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_{T_c}^3}, \quad \lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}\right)^{1/2}. \quad (4)$$

ゆえに $\rho \lambda_{T_c}^3 = \zeta(3/2) \simeq 2.612$ 。 $\ell = (3/(4\pi\rho))^{1/3}$ を使うと

$$\boxed{\frac{\lambda_{T_c}}{\ell} = \left[\frac{4\pi}{3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{1/3} \simeq 2.22}, \quad (5)$$

したがって両者は同じ桁である。量子波の熱的広がり が 粒子間隔 と 重なることが凝縮の目安となる。

4. 凝縮相の比熱指数

$T < T_c$ で $\mu = 0$ 。内部エネルギー密度は

$$E = A \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} = A \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \zeta\left(\frac{5}{2}\right) (k_B T)^{5/2}. \quad (6)$$

原題で E は単位体積あたりの内部エネルギーである。従って

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{N,V} = \frac{5}{2} A \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \zeta\left(\frac{5}{2}\right) k_B (k_B T)^{3/2}. \quad (7)$$

$$\boxed{C_V \propto T^{3/2}, \quad \gamma = \frac{3}{2}.} \quad (8)$$

5. 凝縮相のエントロピー指数

非相互作用で自由粒子の圧力は $P = 2E/3$ 、 $\mu = 0$ 。熱力学関係 $TS = U + PV - \mu N$ より、単位体積あたりのエントロピーは

$$S = \frac{E + P}{T} = \frac{5E}{3T} = \frac{5}{3} A \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \zeta\left(\frac{5}{2}\right) k_B (k_B T)^{3/2}. \quad (9)$$

よって $\boxed{S \propto T^{3/2}, \quad \nu = 3/2.}$ 温度を 0 へ近づけると $S \rightarrow 0$ となり、第三法則と整合的である。

6. スピン 1 Bose 気体の断熱磁場変化

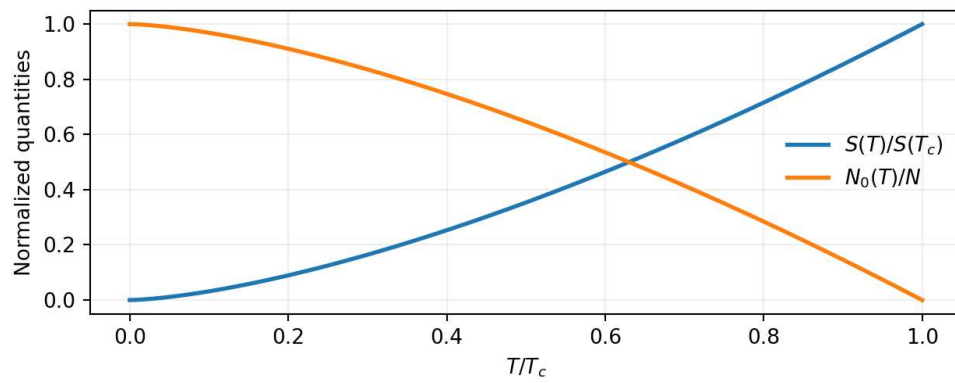
Zeeman エネルギーを $\varepsilon_z > 0$ として、原題の状態密度は

$$\tilde{D}(\varepsilon) = D(\varepsilon - \varepsilon_z) + D(\varepsilon) + D(\varepsilon + \varepsilon_z). \quad (10)$$

エネルギー底を揃えると、初期 $\varepsilon_{z1} \ll k_B T_i$ では **3** つのスピン準位がほぼ同等に熱励起される。一方、終状態 $\varepsilon_{z2} \gg k_B T_f$ では最も低い **1** つのスピン準位だけが励起状態のエントロピーに寄与する。 $T < \tilde{T}_c$ で凝縮が継続し、断熱操作なら $S_i = S_f$ 。問 5 より 1 種類の自由 Bose 気体のエントロピーは $S_1(T) = cT^{3/2}$ (c は体積などを含む正定数)。したがって極限で

$$3cT_i^{3/2} = cT_f^{3/2} \implies \boxed{T_f = 3^{2/3} T_i \simeq 2.08 T_i > T_i}. \quad (11)$$

答：終状態は高温。弱磁場で利用できたスピンの励起状態が強磁場で失われるため、エントロピー一定を保つには並進運動が高温になる必要がある。磁場が系に仕事をするので断熱でも温度は変化できる。上式は指定された $\varepsilon_{z1} \ll k_B T_i$, $\varepsilon_{z2} \gg k_B T_f$ の極限による値であり、中間磁場では滑らかな補正がある。



図： $T \leq T_c$ における凝縮粒子割合とエントロピーの温度依存（理想 3 次元 Bose 気体）。

検算：粒子数に対して $N_0/N = 1 - (T/T_c)^{3/2}$ 、次元解析で S と C_V は k_B/volume の次元を持つ（体積密度表示）。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2012 年度

出題テーマ / 編集上の分類

剛体回転子・オルト／パラ水素

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

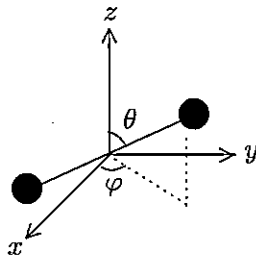
第2問

原子2個からなる分子の回転について以下の設問に答えよ。原子間隔は一定とする。分配関数、比熱、内部エネルギーは全て1分子あたりの量とする。Boltzmann 定数を k_B とし、記号 $\beta = 1/(k_B T)$ を用いてよい。

- まず2原子分子を下図の様な剛体回転子として古典的に扱う。下図で θ, φ は2原子分子の向きを極座標表示した際の極角と方位角である。これらに共役な正準運動量を p_θ, p_φ とし、回転子の中心に対する慣性モーメントを I とすると、回転のエネルギー E は以下で与えられる。

$$E = \frac{1}{2I} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right)$$

温度 T における回転運動の分配関数 Z を求めよ。計算の過程も示すこと。また比熱への回転運動の寄与 C を求めよ。



- 次に量子論的に扱うと、エネルギー準位は以下で与えられる。

$$E_\ell = \frac{\hbar^2}{2I} \ell(\ell+1) \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

ただし $\hbar = (\text{Planck 定数})/(2\pi)$ である。 E_ℓ の縮退度 $(2\ell+1)$ に注意して、温度 T における回転運動の分配関数 Z を表す式を与えよ。また、十分高温では Z が積分で近似できるとし、比熱への回転運動の寄与 C を求めよ。設問1の C の結果との関係を述べよ。

- 十分低温での回転運動の比熱 C を温度 T の関数として近似的に求めよ。

具体的な2原子分子として水素分子を考えよう。水素原子核には核スピンのあり、水素分子にはオルソ水素とパラ水素という核スピン異性体が存在する。二つの水素原子核の合成スピンの大きさは、オルソ水素では1、パラ水素では0である。また軌道部分の波動関数は、二つの水素原子核の入れ換えに関して式(1)の ℓ が偶数のとき対称、奇数のとき反対称である。

- オルソ水素とパラ水素の回転エネルギー準位として、式(1)の E_ℓ でどのような ℓ の値が許されるか、理由と共に答えよ。
- 十分高温の水素ガスにおけるオルソ水素分子の数 N_o とパラ水素分子の数 N_p の存在比 N_o/N_p はいくらか、理由と共に答えよ。
- 水素分子の場合、慣性モーメント I は

$$\frac{\hbar^2}{2I} = k_B \Theta, \quad \Theta \simeq 90 \text{ K}$$

で与えられる。十分高温で熱平衡にある水素ガスを急冷して 30 K にした。オルソ成分とパラ成分の間の遷移は遅いので、しばらくは設問5の存在比が保たれる。この状況での平均の内部エネルギーに対する回転運動の寄与を U とするとき、 U/k_B を有効数字2桁で求めよ。

2012 年度・第 2 問 2 原子分子の回転とオルト・パラ水素

解答の範囲：原題の設問 1–6。剛体回転子の古典・量子分配関数、核スピンの交換対称性、急冷後の内部エネルギー。

設問 1 古典剛体回転子

原子間隔一定の線形分子の向きは球面上の (θ, φ) で表される。与えられた Hamiltonian は

$$E = \frac{1}{2I} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right).$$

位相空間を $(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi)$ で積分する。原題の自由度を通常为正準状態密度 $h^{-2} = (2\pi\hbar)^{-2}$ で数えると

$$\begin{aligned} Z_{\text{cl}} &= \frac{1}{h^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^\infty dp_\theta dp_\varphi e^{-\beta E} \\ &= \frac{1}{h^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{2\pi I}{\beta} \sin \theta = \boxed{\frac{8\pi^2 I}{\beta h^2} = \frac{2Ik_B T}{\hbar^2}}. \end{aligned}$$

各運動量の二次項が $k_B T/2$ を寄与するため、 $U = k_B T$ 、よって

$$\boxed{C_{V,\text{rot}} = k_B}.$$

注意：同種原子の配向を同一視して対称数 $\sigma = 2$ を使う古典的規約では、 Z はさらに $1/2$ となる。しかし U と C_V は変化しない。原題の座標積分にはその規約が明示されていないため、上式は向きを区別して積分した結果である。

設問 2 量子回転子の分配関数・高温極限

$B = \hbar^2/(2I)$ 、 $\Theta = B/k_B$ とすると、準位 $E_\ell = B\ell(\ell+1)$ は $2\ell+1$ 重に縮退する。従って

$$\boxed{Z_{\text{rot}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{-\beta B\ell(\ell+1)}}.$$

平均と分散 $\langle \cdot \rangle$ をこの分布で計算すれば

$$U = \langle E \rangle = -\partial_\beta \ln Z, \quad \boxed{C_V = k_B \beta^2 (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2)}.$$

$k_B T \gg B$ のとき ℓ の和を積分に近似でき、 $z = \ell(\ell+1)$ とおけば

$$Z_{\text{rot}} \simeq \int_0^\infty (2\ell+1) e^{-\beta B\ell(\ell+1)} d\ell = \int_0^\infty e^{-\beta Bz} dz = \frac{1}{\beta B}.$$

したがって $U \simeq k_B T$ 、 $C_V \simeq k_B$ 。設問 1 の古典極限と一致する。

設問 3 十分な低温での熱容量

$T \ll \Theta$ では $\ell=0$ と $\ell=1$ が主要項である。 $E_0=0$ 、 $E_1=2k_B\Theta$ 、縮退度はそれぞれ 1, 3 なので

$$Z \simeq 1 + 3e^{-2\Theta/T}, \quad U \simeq 6k_B\Theta e^{-2\Theta/T}, \quad \boxed{C_V \simeq 12k_B \left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 e^{-2\Theta/T}}.$$

厳密な 2 準位近似なら $C_V/k_B = 3(2\Theta/T)^2 e^{-2\Theta/T} / (1 + 3e^{-2\Theta/T})^2$ である。 $T \rightarrow 0$ で指数関数的に減衰する。

設問4 オルト・パラ水素に許される回転量子数

陽子はスピン $1/2$ の同種フェルミオンであり、二核の交換で分子全体の状態は反対称でなければならない。電子・振動の基底状態を交換対称とすると、回転波動関数の交換固有値は $(-1)^\ell$ である。

核スピン状態	核スピン交換対称性	回転部分に必要な ℓ
オルト水素：三重項 $S_n = 1$	対称 (3 状態)	奇数 $\ell = 1, 3, \dots$
パラ水素：一重項 $S_n = 0$	反対称 (1 状態)	偶数 $\ell = 0, 2, \dots$

設問5 十分高温での存在比

核スピン重みと回転量子数の偶奇制限を入れた分配関数は

$$Z_o = 3 \sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ \ell \text{ odd}}} (2\ell + 1) e^{-\Theta \ell(\ell+1)/T}, \quad Z_p = \sum_{\substack{\ell \geq 0 \\ \ell \text{ even}}} (2\ell + 1) e^{-\Theta \ell(\ell+1)/T}.$$

$T \gg \Theta$ では偶数 ℓ と奇数 ℓ の状態和が漸近的に等しくなるので

$$\lim_{T/\Theta \rightarrow \infty} \frac{N_o}{N_p} = \frac{Z_o}{Z_p} = 3.$$

設問6 高温から 30 K へ急冷した後の内部エネルギー

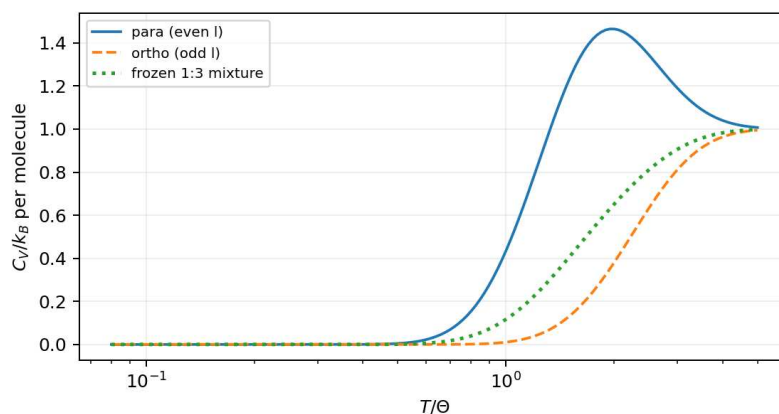
$\Theta \simeq 90 \text{ K}$ 、 $T = 30 \text{ K}$ 。オルト・パラ変換は遅く、存在比は高温時の $N_o : N_p = 3 : 1$ に凍結される。ただし各成分の回転分布は急冷後の温度に平衡化すると読む。パラ水素の最低回転準位は $\ell = 0$ で $E_p \simeq 0$ 。オルト水素は $\ell = 1$ が最低で

$$E_o \simeq B 1(1+1) = 2k_B \Theta \simeq 180 k_B \text{ K}.$$

従って 1 分子あたり回転内部エネルギーは

$$\frac{U}{k_B} \simeq \frac{3}{4}(2\Theta) + \frac{1}{4}(0) = \frac{3}{2}\Theta \simeq 1.35 \times 10^2 \text{ K} \simeq 1.4 \times 10^2 \text{ K} \quad (\text{有効数字 2 桁}).$$

補正はパラの $\ell = 2$ への励起 ($\exp(-6\Theta/T) = e^{-18}$) など、ここでは極めて小さい。



図：同一成分内が熱平衡にある場合の回転熱容量。横軸 T/Θ 。存在比を固定した混合物は熱容量の加重平均となる。

検算： $\ell \leq 44$ の準位和による評価は $U/k_B = 135.0000103 \text{ K}$ で、近似式と一致する。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2011 年度

出題テーマ / 編集上の分類

三角スピン模型・Brillouin関数

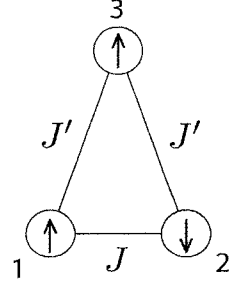
次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

温度 T の熱浴中にあるスピン系に、外部から z 方向に磁場 $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ がかけられている。このスピン系は大きさが S の3個の量子スピン $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ を3角形の3つの頂点に配置したもの（図参照）で構成されている。この系のハミルトニアン $\mathcal{H}$ は、 μ をスピンの磁気モーメントとして、次のように与えられるとする。

$$\mathcal{H} = -JS_1 \cdot \mathbf{S}_2 - J'\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 - J'\mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_1 - \mu\mathbf{H} \cdot (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3)$$



まず、 $J = J' = 0$ の場合について、以下の設問に答えよ。

1. この系の分配関数 Z を求めよ。ただし、ボルツマン定数を k_B とし、 $\beta = 1/(k_B T)$ という記法を用いてもよい。

2. z 方向の磁化 M を求めよ。解答は

$$B_S(x) = \frac{2S+1}{2S} \coth\left(\frac{2S+1}{2S}x\right) - \frac{1}{2S} \coth\left(\frac{1}{2S}x\right)$$

で定義されるブリュアン関数 $B_S(x)$ を用いて表せ。また、 $\chi \equiv \lim_{H \rightarrow 0} (M/H)$ で定義される帯磁率 χ を求めよ。なお、 $\coth(y) = (e^y + e^{-y})/(e^y - e^{-y})$ であり、また、 x が小さい時、

$$B_S(x) \approx \frac{S+1}{3S}x$$

であることに注意せよ。

3. 全系の比熱 C_v を求めよ。解答は $B'_S(x) (\equiv \frac{dB_S(x)}{dx})$ を用いて表せ。さらに、高温極限 ($k_B T \gg \mu H$) での C_v を求めよ。

次に、 $S = 1/2$, かつ、 $J \neq 0, J' = 0$ の場合について、以下の設問に答えよ。

4. まず、 $H = 0$ の場合に、全系のエネルギー固有値とその縮重度を求めよ。さらに、それを参考にして $H \neq 0$ の場合の分配関数 Z を求めよ。
5. J の正負に注意しながら、 $k_B T \ll |J|$ における z 方向の磁化 M を求めよ。解答はブリュアン関数 ($B_{1/2}, B_1$ など) を用いて表せ。

最後に、 $S = 1/2$, かつ、 $J = J' \neq 0$ の場合について、次の設問に答えよ。

6. まず、 $H = 0$ の場合に、全系のエネルギー固有値とその縮重度を求めよ。さらに、それを参考にして、 $H \neq 0$ の場合の $k_B T \ll |J|$ における z 方向の磁化 M を求めよ。解答は J の正負に注意して、ブリュアン関数を用いて表せ。

2011 年度・第2問 三角スピン模型と Brillouin 関数

解答の範囲：原題の設問 1-6。スピンは無次元量 (S_z 固有値 $m = -S, \dots, S$) とし、 $x = \beta\mu H$ と置く。

設問 1 相互作用のない 3 スピンの分配関数

$J = J' = 0$ では $\mathcal{H} = -\mu H \sum_{i=1}^3 S_i^z$ 。1 スピンの分配関数を

$$z_S(x) = \sum_{m=-S}^S e^{xm} = \frac{\sinh[(2S+1)x/2]}{\sinh(x/2)}$$

と書くと、3 スピンは独立なので

$$Z = z_S(x)^3.$$

$x \rightarrow 0$ では連続極限 $z_S(0) = 2S+1$ を用い、 $Z(0) = (2S+1)^3$ 。

設問 2 磁化と零磁場帯磁率

熱平均の磁化は

$$M = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial H} = 3\mu \frac{\partial \ln z_S(x)}{\partial x}.$$

問題で指定された Brillouin 関数

$$B_S(y) = \frac{2S+1}{2S} \coth\left(\frac{2S+1}{2S}y\right) - \frac{1}{2S} \coth\left(\frac{y}{2S}\right)$$

を使えば $\partial_x \ln z_S(x) = SB_S(Sx)$ だから

$$M = 3\mu S B_S\left(\frac{\mu SH}{k_B T}\right).$$

$B_S(y) \sim [(S+1)/(3S)]y$ より

$$\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{M}{H} = \frac{\mu^2 S(S+1)}{k_B T}.$$

3 個の独立スピンを含む系全体の帯磁率であり、1 スピン当たりではこれを 3 で割る。

設問 3 磁場一定での熱容量

内部エネルギーは $U = -HM = -3\mu SH B_S(y)$ 、 $y = \mu SH/(k_B T)$ 。従って

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H = 3k_B y^2 B'_S(y).$$

高温極限では $B'_S(0) = (S+1)/(3S)$ より

$$C_V \simeq \frac{\mu^2 H^2 S(S+1)}{k_B T^2} \quad (k_B T \gg \mu|H|).$$

$H = 0$ で相互作用がなければ、各スピンの全準位が縮退するため $C_V = 0$ である。

設問 4 $S = 1/2, J \neq 0, J' = 0$: 準位と分配関数 $T = S_1 + S_2$ と置くと

$$S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{2}\{T(T+1) - \frac{3}{2}\}.$$

$H = 0$ では、 $T = 1$ の三重項のエネルギーは $-J/4$ (スピン 3 も含め 6 重)、 $T = 0$ の一重項は $3J/4$ (スピン 3 も含め 2 重)。ゼーマン分裂を入れると

$$Z = 2 \cosh \frac{x}{2} \left[e^{\beta J/4} (1 + 2 \cosh x) + e^{-3\beta J/4} \right].$$

$H = 0$ で $Z = 2(3e^{\beta J/4} + e^{-3\beta J/4})$ となり、 $J \rightarrow 0$ で 8 状態に戻る。

設問 5 強い交換相互作用下での磁化

$k_B T \ll |J|$ かつ $\mu|H| \ll |J|$ を仮定し、低エネルギーの結合スピンのみを残す。

- $J > 0$ (強磁性) : $T = 1$ 三重項と自由なスピン 3 が残る。 $y_1 = \beta\mu H, y_{1/2} = \beta\mu H/2$ とすれば

$$M \simeq \mu B_1(y_1) + \frac{\mu}{2} B_{1/2}(y_{1/2}).$$

- $J < 0$ (反強磁性) : スピン 1 と 2 は一重項 $T = 0$ を作り、スピン 3 のみが磁化する。

$$M \simeq \frac{\mu}{2} B_{1/2}(y_{1/2}).$$

注意：反強磁性の場合、 $\mu|H|$ が $|J|$ に達すると一重項と三重項の準位交差が起こり得る。低温条件 $k_B T \ll |J|$ だけで上記の磁化式を任意の強磁場まで外挿してはいけない。

設問 6 $S = 1/2, J = J' \neq 0$ を含む一般の三角形：準位と低温磁化

原題の結合 J (辺 12) と J' (辺 23,31) について、 $T = S_{12} \in \{0, 1\}$ と全スピン $F = |T - 1/2|, \dots, T + 1/2$ を導入する。

$$S_3 \cdot (S_1 + S_2) = \frac{1}{2}(F(F+1) - T(T+1) - \frac{3}{4}).$$

無磁場での厳密な準位と縮退度は

T	F	E	縮退度
0	1/2	$3J/4$	2 (doublet A)
1	1/2	$-J/4 + J'$	2 (doublet B)
1	3/2	$-J/4 - J'/2$	4 (quartet Q)

場 H があれば各多重項で $E \mapsto E - \mu H m_F$ 。 $z_F(x) = \sum_{m=-F}^F e^{xm}$ とすると、有限温度で厳密に

$$Z = e^{-\beta(3J/4)} z_{1/2}(x) + e^{-\beta(-J/4+J')} z_{1/2}(x) + e^{-\beta(-J/4-J'/2)} z_{3/2}(x).$$

従って一般の磁化は

$$M = \mu \frac{\partial \ln Z}{\partial x} \quad (x = \beta\mu H).$$

$H = 0$ でエネルギー最小の多重項が他から十分離れていて $\mu|H| \ll \Delta$ 、 $k_B T \ll \Delta$ のとき

$$M \simeq \begin{cases} \frac{\mu}{2} B_{1/2}(x/2), & \text{基底が doublet A または B,} \\ \frac{3\mu}{2} B_{3/2}(3x/2), & \text{基底が quartet Q.} \end{cases}$$

特に原題の $J = J'$ では

$$E_A = E_B = 3J/4, \quad E_Q = -3J/4.$$

従って $J = J' > 0$ なら quartet Q が基底、 $J = J' < 0$ なら 2 組の doublet が縮退した基底で、磁化はそれぞれ上の $F = 3/2$ と $F = 1/2$ の式に従う。縮退点近傍では単一多重項へ射影せず、厳密な Z を使うこと。

検算

$S_i^a = \sigma_i^a/2$ の 8 次元行列から $H = 0$ の固有値を直接対角化した。 J, J' の異なる符号を含む 4 組で上表の固有値と一致（最大絶対誤差 2.5×10^{-16} ）。Brillouin 関数についても直接 Boltzmann 和と一致した。

解法の要点：相互作用を対角化するときには S_{12}^2 と S_{tot}^2 を使うこと、場による Zeeman 分裂はその後で加えること、低温極限ではギャップと磁場の大小関係を確認することが重要である。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2010年度

出題テーマ / 編集上の分類

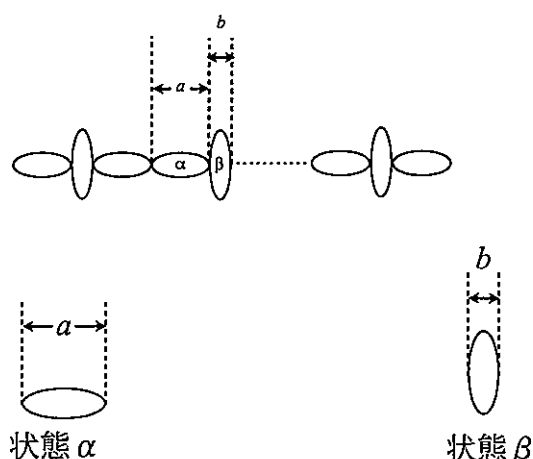
2状態鎖状分子とエントロピー

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

図のように N 個の単量体が連結された直線的な鎖状分子を考える。各単量体は図のように自由に変形し、長さ a の状態 α か長さ b の状態 β のいずれかを、隣りあう単量体とは独立にとることができる。ただし、 $a > b$ とする。また、各単量体の2つの状態 α 、 β が持つエネルギーは、 f を定数として、それぞれ $-fa$ 、 $-fb$ であるとする。すなわち、鎖状分子の全長を L とすると、全エネルギーは $E = -fL$ となる。ただし、設問6以外では $f > 0$ とする。



- 鎖状分子が、与えられた全エネルギーについてのミクロカノニカル分布に従う状態にあると考える。状態 α をとる単量体が N_α 個、状態 β をとる単量体が N_β 個とする。ただし、 $N_\alpha + N_\beta = N$ である。このとき、鎖状分子のエントロピー S をボルツマン定数 k_B および N_α, N_β を用いて表せ。

以下では、単量体の個数 N が大きい極限を考える。単量体1個あたりの物理量は、この極限で一定値に収束する。これ以降の設問に対しては、 N によらない形で答えること。

- 設問1と同じミクロカノニカル分布について、単量体1個あたりのエネルギー $\epsilon = E/N$ の関数として、単量体1個あたりのエントロピー $s = S/N$ を求め、グラフの概形を図示せよ。なお、大きな整数 $M \gg 1$ に対して成立する Stirling の公式 $\log M! \sim M \log M - M$ を用いてもよい。ここで $\log x$ は x の自然対数を意味する。

以下では、鎖状分子が温度 T の熱平衡状態にあるとする。

- 絶対零度および温度無限大それぞれの場合について、鎖状分子の単量体1個あたりのエントロピー s を求めよ。
- 温度 T を与えたとき、鎖状分子の単量体1個あたりの長さは T の関数 $l(T)$ となる。温度の上昇とともに、鎖状分子の長さは増大するか減少するか、その物理的理由とともに答えよ。また、 $l(T=0)$ と $l(T=\infty)$ の値を求めよ。

5. この系の、温度 T における単量体 1 個あたりの熱容量を $c(T)$ とする。積分

$$\int_0^\infty \frac{c(T)}{T} dT$$

の値を求めよ。

6. 単量体の 2 つの状態 α, β の持つエネルギーが等しい、すなわち $f = 0$ のとき、鎖状分子の単量体 1 個あたりの長さを求めよ。

2010 年度 第 2 問 独立解答・解説

記号と条件 $a > b$, $\Delta = a - b > 0$, $f > 0$. 長さ a の状態を α 、長さ b の状態を β とする。 $N_\alpha + N_\beta = N$ 、全エネルギー $E = -f(aN_\alpha + bN_\beta)$ 。以下、 $N \gg 1$ 。

問 1：指定した状態数に対するエントロピー

どの単量体が状態 α になるかを選ぶので、ミクロ状態数は

$$W(N_\alpha, N_\beta) = \binom{N}{N_\alpha} = \frac{N!}{N_\alpha! N_\beta!}.$$

従って Boltzmann の原理から

$$S = k_B \log W = k_B \log \frac{N!}{N_\alpha! N_\beta!}.$$

長さエネルギーは $L = aN_\alpha + bN_\beta$ 、 $E = -fL$ なので、 $f > 0$ のもとでは、エネルギーを固定することが個数 N_α の固定に対応する。

問 2：エネルギー密度の関数としてのエントロピー

$p = N_\alpha/N$ 、 $\varepsilon = E/N$ 、 $s = S/N$ とおくと

$$\varepsilon = -f[b + \Delta p], \quad p = \frac{-\varepsilon/f - b}{\Delta} \in [0, 1].$$

Stirling の公式より

$$s(\varepsilon) = -k_B [p \ln p + (1-p) \ln(1-p)], \quad -fa \leq \varepsilon \leq -fb.$$

端点 $p = 0, 1$ では $s = 0$ 、中央 $p = 1/2$ では $s = k_B \ln 2$ が最大。 $ds/d\varepsilon = 1/T$ であり、 $p > 1/2$ の低エネルギー側は正温度、 $p < 1/2$ の高エネルギー側は負温度をもつ（エネルギー上限があるため）。

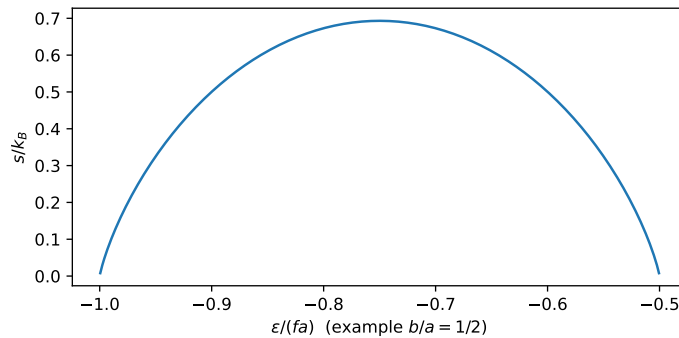


図 1： $s(\varepsilon)$ の典型的な形状（図示のため $b/a = 1/2$ を採用）。

問 3：絶対零度と無限大温度のエントロピー

正温度の正準分布で $T \rightarrow 0^+$ なら α だけが占有され、 $p \rightarrow 1$ 、 $s \rightarrow 0$ 。 $T \rightarrow \infty$ では $p \rightarrow 1/2$ で 2 状態が等確率となる。よって

$$s(0^+) = 0, \quad s(\infty) = k_B \ln 2.$$

有限 N の場合にも、 $T \rightarrow 0^+$ は唯一の全 α 状態、 $T \rightarrow \infty$ は 2^N 状態の等重率である。

問 4：平均長とその温度変化

単量体 1 個の分配関数は

$$z = e^{\beta f a} + e^{\beta f b} = 2e^{\beta f(a+b)/2} \cosh\left(\frac{\beta f \Delta}{2}\right), \quad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

α 状態を取る確率は $p_\alpha = e^{\beta f a}/z = 1/(1 + e^{-\beta f \Delta})$ 。したがって

$$\ell(T) = a p_\alpha + b(1 - p_\alpha) = \frac{a+b}{2} + \frac{\Delta}{2} \tanh\left(\frac{f \Delta}{2k_B T}\right).$$

$f > 0$, $T > 0$ で ℓ は温度上昇に伴い減少する。大きな長さ a の状態はより低エネルギーで好まれるが、高温では短い状態 b も同程度に励起されるためである。

$$\ell(0^+) = a, \quad \ell(\infty) = \frac{a+b}{2}.$$

問 5： $\int_0^\infty c(T)/T \, dT$

平均エネルギーは $u = \langle E \rangle/N = -f\ell$ 。 $x = f\Delta/(2k_B T)$ とおくと

$$c(T) = \frac{du}{dT} = k_B x^2 \operatorname{sech}^2 x.$$

熱力学関係 $ds = c \, dT/T$ より

$$\int_0^\infty \frac{c(T)}{T} \, dT = s(\infty) - s(0) = k_B \ln 2.$$

直接積分でも $c/T \, dT = -k_B x \operatorname{sech}^2 x \, dx$ 、 $\int_0^\infty x \operatorname{sech}^2 x \, dx = \ln 2$ 。有限 N では 1 粒子当たりの量として同じ結果である。

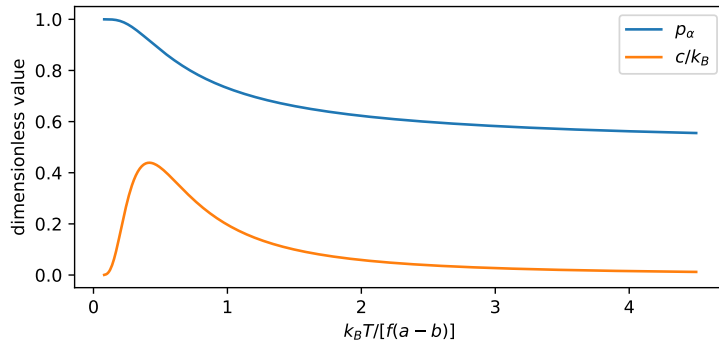


図 2： p_α と熱容量。横軸は $k_B T/[f(a-b)]$ 。

問 6：2 状態が等エネルギーの場合 $f = 0$

$f = 0$ では長さにかかわらず全状態が等エネルギーとなり、任意の $T > 0$ で $p_\alpha = p_\beta = 1/2$ 。したがって

$$\ell(T) = \frac{a+b}{2} \quad (f = 0).$$

注意：この場合 $c(T) \equiv 0$ なので、問 5 の積分は 0 である。 $f > 0$ を保って積分後 $f \rightarrow 0^+$ とする極限 ($k_B \ln 2$) とは交換できない。 $f = 0$ の基底状態は 2^N 重に縮退し、残余エントロピー $k_B \ln 2$ / 単量体を持つ。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2009年度

出題テーマ / 編集上の分類

Fermi・Bose統計と大分配関数

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

フェルミ気体、ボース気体に関して、以下の設問に答えよ。

1. フェルミオンとボソンの例をそれぞれ一つ挙げよ。
2. 1粒子のとり、異なる2つの軌道波動関数 $\varphi_a(\mathbf{r})$ と $\varphi_b(\mathbf{r})$ が存在するとして、2個の同種粒子が、それぞれ φ_a または φ_b の状態をとるときの2粒子波動関数を考える。フェルミオン2個の場合、ボソン2個の場合のそれぞれに対して、要請される対称性に言及し、可能な波動関数の形を全て示せ。粒子1の位置を $\mathbf{r}_1$ 、粒子2の位置を $\mathbf{r}_2$ とせよ。各粒子のスピンについては、各フェルミオンのスピンの大きさは $1/2$ であり、粒子1の上向きスピン状態を α_1 、下向きスピン状態を β_1 、粒子2についてはそれぞれ α_2, β_2 とせよ。各ボソンのスピンの大きさは 0 とせよ。波動関数の規格化はしなくてよい。

次に、粒子のスピンは無視して、以下の設問に答えよ。

3. 1粒子のとり軌道波動関数は、3次元自由空間における固有状態とする。一辺の長さが L の箱に対して周期的境界条件を採用して、1粒子の固有状態および対応する固有エネルギーを求めよ。これから、状態密度 $D(E)$ (エネルギーが E と $E+dE$ の間にある状態の数が $D(E)dE$ となるような量) を求めよ。ただし、各粒子の質量を $m(>0)$ とし、最低エネルギー準位をエネルギーの原点とし、また L は十分大きいとせよ。
4. 同種粒子 N 個からなる理想気体を、設問3で考えた箱の中に入れる。温度 $T=0$ においてどのような状態をとるか、フェルミ気体、ボース気体のそれぞれの場合について述べ、全系のエネルギーを求めよ。系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sum_{\ell=1}^N \frac{p_{\ell}^2}{2m}$$

(p_{ℓ} は ℓ 番目の粒子の運動量) であり、 N は十分大きいとせよ。

大正準集合 (grand canonical ensemble) における大分配関数 $\Xi(T, \mu)$ は、

$$\Xi(T, \mu) = \sum_N \sum_j e^{-\beta(E_j - \mu N)}$$

で与えられる。ただし、 T は温度、 μ は化学ポテンシャル、 $\beta = 1/(k_B T)$ 、 k_B はボルツマン定数、 E_j は N 個の粒子からなる系の j 番目のエネルギー準位 (ここでは N によらないと仮定する)。

5. 理想フェルミ気体、理想ボース気体のそれぞれについて、大分配関数を1粒子状態に関する積の形 ($\Xi = \prod_i \Xi_i$) で求めよ。ただし、各粒子はエネルギー準位 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ をもつ1粒子状態に入り、 $E_j = \sum_i n_i \varepsilon_i$ (ここで、 n_i は i 番目の1粒子状態に入る粒子数、 j はここでは $n_1, n_2, \dots$ の組を指定する番号) とせよ。

6. 理想気体の大正準集合においては、 i 番目の1粒子状態に入る粒子数が n_i 個である統計力学的確率分布は

$$\frac{e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)n_i}}{\sum_n e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)n}}$$

で与えられる。ここで、分母の和は、各状態に対して許される全ての粒子数の値にわたってとる。これを用いて、統計力学的平均値 $\langle n_i \rangle$ を、理想フェルミ気体、理想ボース気体のそれぞれについて求めよ。また、得られた理想フェルミ気体に対する分布の概形を、エネルギー ε_i の関数として、 $T = 0$ および $0 < k_B T \ll \mu$ に対して描け。

3次元の理想ボース気体は低温においてボース・アインシュタイン凝縮する。

7. 全ての1粒子状態 i に対して $\langle n_i \rangle$ が正であるためには、理想ボース気体の化学ポテンシャル μ はどのような条件を満たさなければならないかを述べよ。最低エネルギー準位を0とせよ。また、理想ボース気体に対する $\langle n_i \rangle$ を、エネルギー ε_i の関数として $\mu = 0$ および $\mu \neq 0$ に対して概形を描け。ボース・アインシュタイン凝縮している場合、 μ の値はいくらになるべきかを、理由とともに述べよ。

2009 年度 第 2 問 独立解答・解説

設定 大問の問 3 以降ではスピンを無視する。単一粒子準位 ε_i 、 $\varepsilon_{\min} = 0$ 、 $\beta = (k_B T)^{-1}$ 、 $z = e^{\beta\mu}$ とする。特記なければ 3 次元・自由粒子。

問 1：Fermi 粒子と Bose 粒子の例

Fermi 粒子の例は**電子**、Bose 粒子の例は**光子**。電子は半整数スピンで反交換統計、光子は整数スピンで交換統計に従う。ただし後続の「質量 $m > 0$ の理想 Bose 気体」は光子気体とは別の模型である。

問 2：同種粒子 2 個の波動関数

粒子 1, 2 の位置を $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ とする。軌道波動関数 ϕ_a, ϕ_b が異なれば、交換対称・反対称な空間部分は

$$\Phi_{\pm} = \phi_a(\mathbf{r}_1)\phi_b(\mathbf{r}_2) \pm \phi_b(\mathbf{r}_1)\phi_a(\mathbf{r}_2).$$

Fermi 粒子の場合、全波動関数は粒子の交換で負号を得なければならない。 α を上向き、 β を下向きスピンとして、許される 4 状態は

$$\begin{aligned} \Phi_+ [\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2] \quad (\text{singlet}), \\ \Phi_- \alpha_1\alpha_2, \quad \Phi_- [\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2], \quad \Phi_- \beta_1\beta_2 \quad (\text{triplet}). \end{aligned}$$

いずれも規格化前の表式であり、全体定数や上の $\sqrt{2}$ は省略している。スピン 0 の Bose 粒子は空間部分が対称でなければならない、許されるのは Φ_+ である。両粒子が同じ軌道にいるときは $\Phi_- = 0$ である。

問 3：自由粒子の状態密度

周期的境界条件では $\mathbf{k} = 2\pi\mathbf{n}/L$ 、 $\varepsilon = \hbar^2 k^2/(2m)$ 。スピンを数えない場合、半径 k の球内の状態数は

$$N_1(\varepsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k^3}{3} = \frac{V}{6\pi^2} \left(\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} \right)^{3/2}, \quad V = L^3.$$

微分すると、単位エネルギー当たりの状態密度

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$

有限箱では離散準位なので、この式は L が十分大きく準位を連続近似できるときの式である。

問 4：絶対零度における基底状態と全エネルギー

Fermi 気体は Pauli の排他原理により $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F$ の 1 粒子状態を低い方から占有する。したがって

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} D(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{V k_F^3}{6\pi^2}, \quad \varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (6\pi^2 N/V)^{2/3},$$

$$E_F(T=0) = \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{3}{5} N \varepsilon_F.$$

理想 Bose 気体ではすべての粒子が最低準位 $\varepsilon_0 = 0$ に入り、

$$E_B(T=0) = 0.$$

問 5：大分配関数を 1 粒子状態に関する積で表す

占有数 n_i は Fermi 粒子では $0, 1$ 、Bose 粒子では $0, 1, 2, \dots$ を取り、非相互作用なので総和は状態ごとに因数分解する：

$$\Xi_F(T, \mu) = \prod_i \sum_{n_i=0}^1 e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)n_i} = \prod_i (1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}),$$

$$\Xi_B(T, \mu) = \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)n_i} = \prod_i (1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)})^{-1}.$$

Bose 側の幾何級数が収束するには全 i で $\mu < \varepsilon_i$ 、有限系で基底準位が 0 なら $\mu < 0$ が必要。

問 6：Fermi 分布の導出と概形

与えられた確率分布を $n_i = 0, 1$ で平均すると

$$\langle n_i \rangle_F = \frac{e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}}{1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}.$$

$T \rightarrow 0$ 、 $\mu \rightarrow \varepsilon_F > 0$ では $\langle n_i \rangle = \Theta(\varepsilon_F - \varepsilon_i)$ ($\varepsilon_i = \varepsilon_F$ の点では値 $1/2$)。有限温度では $\varepsilon \simeq \mu$ を幅 $O(k_B T)$ で滑らかに変化する。

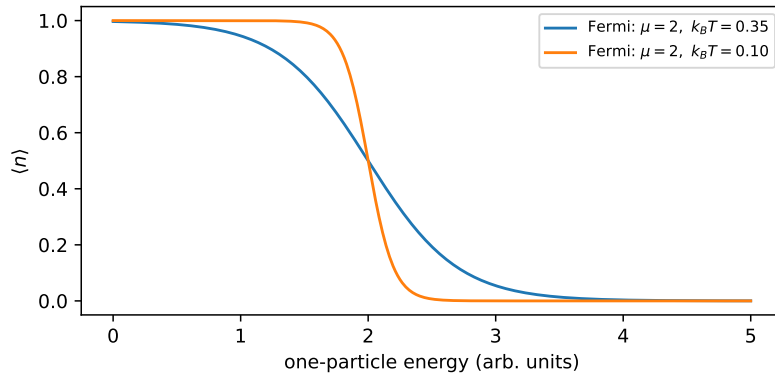


図 3：Fermi 分布。温度が下がると Fermi 面近傍の遷移が鋭くなる。

問 7：Bose 分布と化学ポテンシャルの制約

幾何分布 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = (1 - r)^{-1}$ 、 $r = e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}$ より

$$\langle n_i \rangle_B = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1}.$$

正の占有数を全 $\varepsilon_i \geq 0$ で得るには、有限系で $\mu < 0$ が必要。 $\mu = 0$ では $\varepsilon_0 = 0$ の占有数が発散するため、凝縮相の熱力学極限でのみ $\mu \rightarrow 0^-$ として解釈し、凝縮粒子数 N_0 は励起状態から分離して取り扱う。 $\mu > 0$ は分母の符号や発散の点で不適切。

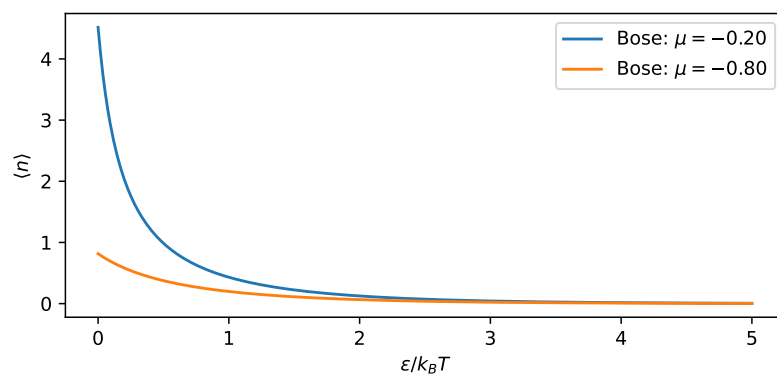


図 4：正の温度での Bose 分布 ($\mu < 0$)。 $\mu \rightarrow 0^-$ で低エネルギー占有が急増。

確認事項・入試演習の着眼点

- 2010 年度： $f > 0$ のもとでの $T \rightarrow 0^+$ と、最初から $f = 0$ とした系は縮退度が異なる。
- 2009 年度：粒子の交換対称性（問 2）と粒子数占有の対称性（問 5-7）を混同しない。
- 状態密度の係数はスピン縮退を数えるかどうかで 2 倍変わる。原題は問 3 以降スピンを無視する。
- Bose 凝縮時に「化学ポテンシャルは 0」は熱力学極限の略記であり、有限系の厳密な大正準分布では $\mu < 0$ 。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2008 年度

出題テーマ / 編集上の分類

3状態分子と揺らぎ・応答

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

ある分子 N 個からなる系を考える。それぞれの分子は3つの状態をとる。そのうちの2つの状態のエネルギーは縮退しており、そのエネルギーの値を0とする。残りの1つの状態のエネルギーを ε とする。それぞれの分子は互いに独立とする。この系が温度 T の熱平衡状態にあると仮定して以下の設問に答えよ。

1. この系の内部エネルギーを求めよ。
2. この系のエントロピーを求めよ。また、 $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon < 0$ のそれぞれの場合について、 $T = 0$ でのエントロピーを求め、それらの値が異なる理由を説明せよ。

エネルギーが ε の状態にある分子の数を N_ε とする。以下の設問で必要ならば、二項分布の公式

$$(x + y)^N = \sum_{m=0}^N {}^N C_m x^{N-m} y^m$$

を利用してよい。

3. 熱平衡状態での N_ε の分布関数 $P(N_\varepsilon)$ を求めよ。
4. 熱平衡状態での N_ε の平均値 $\langle N_\varepsilon \rangle$ を求めよ。次に、ある温度 $T = T_1$ において、 $\langle N_\varepsilon \rangle$ が ε によってどのように変化するかについて考える。特に、 ε が $\pm\infty$ に近づく場合の振る舞いや $\varepsilon = 0$ 付近の様子に注意して、 $\langle N_\varepsilon \rangle$ を ε の関数として概形を図示せよ。また、温度が $T = 2T_1$ の場合の $\langle N_\varepsilon \rangle$ の概形も合わせて図示せよ。
5. 熱平衡状態における N_ε の分散 $\langle N_\varepsilon^2 \rangle - \langle N_\varepsilon \rangle^2$ を求めよ。
6. $\langle N_\varepsilon \rangle$ の ε に対する応答関数

$$\chi = \frac{\partial \langle N_\varepsilon \rangle}{\partial \varepsilon}$$

を求めよ。また、 χ を $\langle N_\varepsilon^2 \rangle - \langle N_\varepsilon \rangle^2$ を用いて表せ。

2008 年度 第 2 問 独立解答・詳解

題材：3 状態分子。1 分子のエネルギーは $0, 0, \varepsilon$ (分子相互作用なし)。 N 個の区別できる分子が温度 T のカノニカル平衡にある。

準備： $\beta = (k_B T)^{-1}$ とし

$$z_1 = 2 + e^{-\beta\varepsilon}, \quad Z_N = z_1^N, \quad p_\varepsilon = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{2 + e^{-\beta\varepsilon}} = \frac{1}{1 + 2e^{\beta\varepsilon}}. \quad (1)$$

ここで p_ε は 1 分子がエネルギー ε の状態にいる確率である。 ε は正・零・負のいずれも許す。

設問 1：内部エネルギー 分配関数の対数微分より

$$U = -\frac{\partial \log Z_N}{\partial \beta} = N\varepsilon p_\varepsilon = \frac{N\varepsilon}{1 + 2e^{\beta\varepsilon}}. \quad (2)$$

エネルギーが負の状態を含んでも有限状態モデルなので平衡は定義できる。

設問 2：エントロピーと $T = 0$ Helmholtz 自由エネルギー $F = -Nk_B T \log z_1$ より

$$S = k_B (\log Z_N + \beta U) \quad (3)$$

$$S = Nk_B \left[\log(2 + e^{-\beta\varepsilon}) + \frac{\beta\varepsilon}{1 + 2e^{\beta\varepsilon}} \right]. \quad (4)$$

温度を正の側から零に下げると、

$$S(0) = \begin{cases} Nk_B \log 2 & (\varepsilon > 0), \\ Nk_B \log 3 & (\varepsilon = 0), \\ 0 & (\varepsilon < 0). \end{cases} \quad (5)$$

$\varepsilon > 0$ では零エネルギー基底状態が 2 重縮退し、 $\varepsilon = 0$ では 3 重縮退する。 $\varepsilon < 0$ ではエネルギー ε が一意の基底状態となる。従って $T \rightarrow 0$ と $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限の順序には注意が必要である。

設問 3：励起状態数の分布 $N_\varepsilon = n$ とすると状態数は $\binom{N}{n} 2^{N-n}$ 。従って

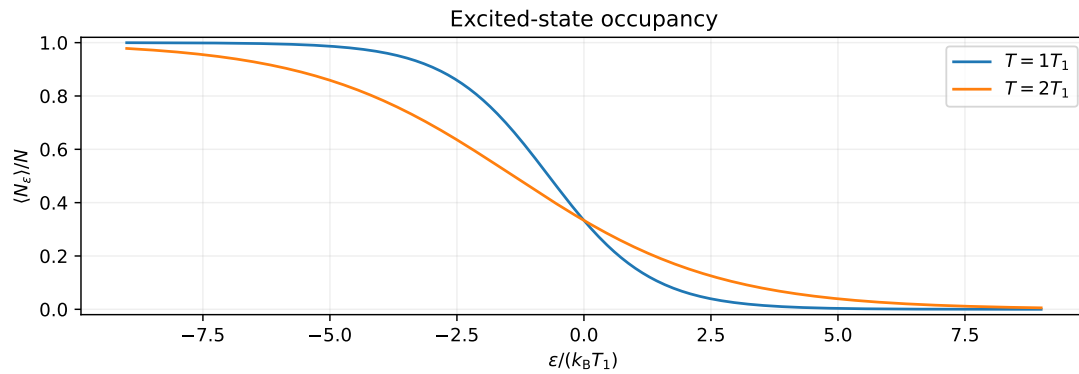
$$P(N_\varepsilon = n) = \binom{N}{n} \frac{e^{-\beta\varepsilon n} 2^{N-n}}{(2 + e^{-\beta\varepsilon})^N} = \binom{N}{n} p_\varepsilon^n (1 - p_\varepsilon)^{N-n}. \quad (6)$$

これは二項分布であり、全確率は二項定理により 1 となる。

設問 4：平均粒子数・グラフ 二項分布の平均として

$$\langle N_\varepsilon \rangle = N p_\varepsilon = \frac{N}{1 + 2e^{\varepsilon/(k_B T)}}. \quad (7)$$

$\varepsilon \rightarrow +\infty$ で 0、 $\varepsilon \rightarrow -\infty$ で N 、 $\varepsilon = 0$ で $N/3$ 。温度を T_1 から $2T_1$ にすると、同じ点 $\varepsilon = 0$ を通り、変化する領域の幅が 2 倍になる。単調減少性は $\partial_\varepsilon \langle N_\varepsilon \rangle = -N\beta p_\varepsilon (1 - p_\varepsilon) < 0$ より従う。



設問 5：粒子数の分散 二項分布から

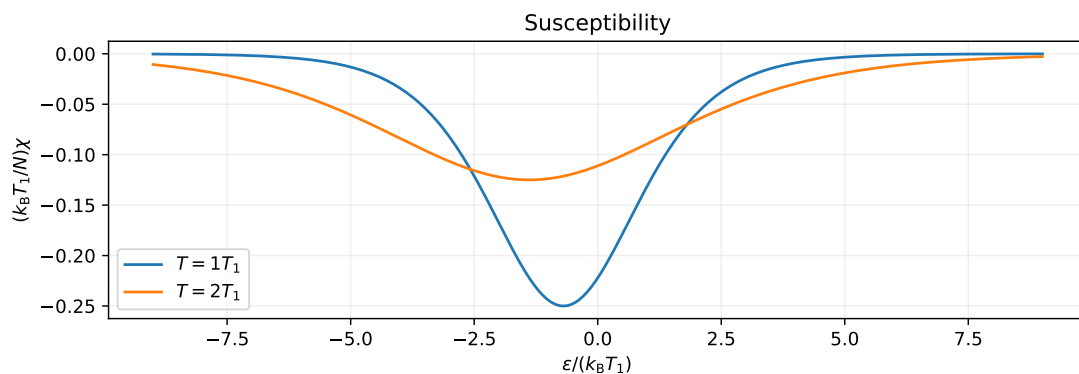
$$\text{Var}(N_\epsilon) = \langle N_\epsilon^2 \rangle - \langle N_\epsilon \rangle^2 = N p_\epsilon (1 - p_\epsilon) = \frac{2N e^{\beta\epsilon}}{(1 + 2e^{\beta\epsilon})^2}. \quad (8)$$

独立な N 個の Bernoulli 指示変数の分散の和としても導ける。

設問 6： ϵ に対する応答 $\chi = \partial \langle N_\epsilon \rangle / \partial \epsilon$ は

$$\chi = -\beta N p_\epsilon (1 - p_\epsilon) = -\frac{\text{Var}(N_\epsilon)}{k_B T}. \quad (9)$$

χ はこの定義では非正となる（磁化率のような正の応答係数と符号の規約が異なる）。これはカノニカル分布の揺らぎ-応答恒等式である。



統計力学・量子統計 | 年度別問題

2007年度

出題テーマ / 編集上の分類

相互作用スピン対の磁化率

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

スピン $1/2$ の粒子が大きさ H の磁場の下におかれると、ゼーマン効果によって、そのエネルギー準位は $-\mu H, +\mu H$ (μ は正の定数) に分裂する。このような粒子 N 個が大きさ H の一様な磁場の下におかれ、温度 T に保たれている系を考え、これをカノニカル分布によって取り扱う。最初は粒子間に相互作用がないとして、以下の設問に答えよ。ただし、 $\beta = (k_B T)^{-1}$ (k_B はボルツマン定数) を用いてもよい。

1. この系の自由エネルギー F を求めよ。
2. 磁場に平行方向の磁化 M と、 $H \rightarrow 0$ での磁化率 χ を求めよ。ただし磁化は $M = -\partial F / \partial H$ 、磁化率は $\chi = \partial M / \partial H$ で定義される。

次に、 N 個の粒子が2個ずつ $N/2$ 組の対になり、対を組んだ粒子間にはそれぞれのスピンの内積に比例する相互作用が働く場合を考える。異なる対に含まれる粒子間には相互作用が働かないとする。磁場の方向を z 方向とすれば、一つの対のハミルトニアンは、対に含まれる2粒子のスピンの演算子 s_1, s_2 とその z 成分 s_{1z}, s_{2z} を用いて、

$$\mathcal{H} = V \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 - 2\mu(s_{1z} + s_{2z})H$$

と書くことができる。 V は相互作用の大きさと符号を表すパラメータである。このとき以下の設問に答えよ。

3. ハミルトニアン $\mathcal{H}$ のエネルギー固有値を求めよ。
4. $N/2$ 組の対からなる系全体の自由エネルギー F を求めよ。
5. 磁場に平行方向の磁化 M と、 $H \rightarrow 0$ での磁化率 χ を求めよ。
6. 設問5で求めた磁化率の低温極限 ($k_B T / |V| \ll 1$) での振舞いを調べ、それが V の符号によって定性的に異なる理由を簡単に説明せよ。

2007 年度 第 2 問 独立解答・詳解

題材：磁場 H 中のスピン $1/2$ 粒子 N 個。スピンの成分 s_z の固有値は $\pm\frac{1}{2}$ とし、磁気エネルギーは $-2\mu H s_z$ 。後半は 2 個ずつ $N/2$ 対に組み、対内に $V \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$ の交換相互作用を導入する。 N は偶数とする。

設問 1：相互作用なしの自由エネルギー 1 粒子の準位は $-\mu H, +\mu H$ 。従って

$$z_1 = e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H} = 2 \cosh(\beta\mu H), \quad Z_0 = z_1^N, \quad \boxed{F_0 = -Nk_B T \log[2 \cosh(\beta\mu H)]}. \quad (10)$$

設問 2：磁化と弱磁場磁化率 $M = -\partial_H F_0$, $\chi_0 = \partial_H M|_{H=0}$ より

$$\boxed{M_0 = N\mu \tanh(\beta\mu H), \quad \chi_0 = N\beta\mu^2 = \frac{N\mu^2}{k_B T}}. \quad (11)$$

すなわち独立スピンは Curie 則に従う。

設問 3：一対のエネルギー固有値 合成スピン $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ を導入すると

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2} [S(S+1) - \frac{3}{2}], \quad \mathcal{H} = \frac{V}{2} [S(S+1) - \frac{3}{2}] - 2\mu H S_z. \quad (12)$$

三重項 $S = 1, m = 1, 0, -1$ と一重項 $S = 0, m = 0$ であり、

$$\boxed{\begin{aligned} E_{1,1} &= V/4 - 2\mu H, & E_{1,0} &= V/4, \\ E_{1,-1} &= V/4 + 2\mu H, & E_{0,0} &= -3V/4. \end{aligned}} \quad (13)$$

例えば $|1, 0\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$, $|0, 0\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ である。

設問 4：相互作用ありの自由エネルギー 各対は独立なので

$$z_2 = e^{3\beta V/4} + e^{-\beta V/4} [1 + 2 \cosh(2\beta\mu H)], \quad \boxed{F = -\frac{N}{2} k_B T \log z_2}. \quad (14)$$

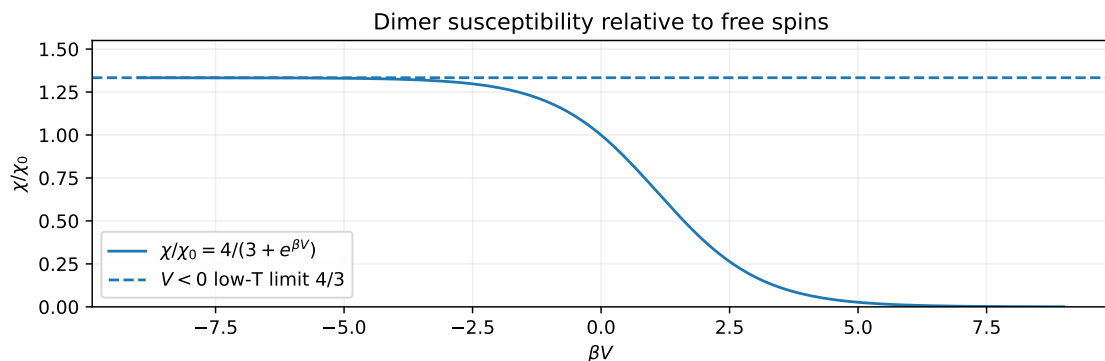
$V = 0$ では $z_2 = [2 \cosh(\beta\mu H)]^2$ となり、設問 1 へ戻る。

設問 5：磁化と弱磁場磁化率 $-\partial_H F$ を微分すると

$$M = \frac{N}{2} \frac{4\mu e^{-\beta V/4} \sinh(2\beta\mu H)}{z_2}, \quad (15)$$

$$\boxed{\chi = \frac{\partial M}{\partial H} \Big|_{H=0} = \frac{4N\beta\mu^2}{3 + e^{\beta V}}}. \quad (16)$$

従って自由スピンの磁化率に対する比は $\chi/\chi_0 = 4/(3 + e^{\beta V})$ 。



設問 6：低温の符号依存性 $\beta|V| \gg 1$ において

$$\chi \sim \begin{cases} 4N\mu^2(k_B T)^{-1}e^{-V/(k_B T)} & (V > 0), \\ \frac{4}{3}N\mu^2(k_B T)^{-1} & (V < 0). \end{cases} \quad (17)$$

$V > 0$ （反強磁性的結合）では非磁性一重項が一意的基底状態で、三重項励起へのギャップが V あるため応答が指数的に抑制される。 $V < 0$ （強磁性的結合）では磁性三重項が基底状態で、低温にもその 3 重縮退が残るため Curie 型に発散する。なお $V = 0$ は独立スピンの χ_0 である。

検証・編集上の注記

この解答は公式模範解答ではない。2008 年度の零温縮退、応答の符号、2007 年度の $s_z = \pm 1/2$ 規約と V の符号を明示した。原題は提供 PDF の画像を改変せず別ページに掲載した。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2006 年度

出題テーマ / 編集上の分類

黒体放射とPlanck分布

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

一辺の長さが L の立方体の箱があつて、絶対温度 T の熱浴に接しているとする。箱の中に存在する電磁波が熱浴と熱平衡になっている場合を考える。ただし、ボルツマン定数を k_B とし、 $\hbar = h/2\pi$ とする。

1. 箱の中の異なる角振動数を持つ電磁波は、お互いに独立に振る舞うと考えられる。さらに、ある角振動数 ω を持つ電磁波は、同じ角振動数を持つ量子力学的な調和振動子として扱うことができる。絶対温度 T の場合に、角振動数 ω の調和振動子の分配関数を求めよ。
2. 設問1の調和振動子の平均エネルギーを求めよ。さらに、非常に低温の場合と非常に高温の場合に、平均エネルギーはどのような温度依存性を持つか調べ、その結果について物理的内容を簡潔に説明せよ。
3. 電磁波は箱の中で定在波を作る。壁の位置で節を作るとして、電磁波の波数 $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ のとり得る値を求めよ。
4. 波数 $\vec{k}$ を持つ電磁波の角振動数は、 $k = |\vec{k}|$ として $\omega = ck$ で与えられる。ここで c は光速である。箱内の電磁波の持つ全エネルギーは、すべてのとり得る角振動数についての和として書ける。このとき、全エネルギー E を

$$E = \int_0^\infty \varepsilon(k) dk$$

という形に表したときの $\varepsilon(k)$ を求めよ。ただし、箱の一辺の長さ L は十分長いとして、固有振動についての和を積分の形にしてよい。また、零点振動のエネルギーは無視せよ。(電磁波は横波であり、横波の偏光の方向が2通りあることも考慮せよ。)

5. 全エネルギー E が、どのような温度のべき乗則に従うか求めよ。
6. 非常に低温の場合に、設問4で得られた $\varepsilon(k)$ が極大になる $k_{\max}$ の表式を求めよ。絶対温度が 2.7 K のとき、 $k_{\max}$ の波数を持つ電磁波の波長を求めよ。ただし $\hbar = 1.0 \times 10^{-34}\text{ Js}$ 、 $c = 3.0 \times 10^8\text{ m/s}$ 、 $k_B = 1.4 \times 10^{-23}\text{ J/K}$ を用いて、有効数字2桁で答えよ。

2006 年度 第 2 問 解答・詳解

黒体放射と電磁場の統計力学

原題の設定：一辺 L の立方体に閉じ込められた電磁波が、温度 T の熱浴と平衡にある。電磁場を独立な調和振動子の集まりとして扱い、 $V = L^3$ 、 $\beta = (k_B T)^{-1}$ とおく。

1. 設問 1 角振動数 ω の一つの量子調和振動子の固有エネルギーは

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

である。したがって分配関数は等比級数によって

$$Z_\omega = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

と求まる。零点エネルギー $\hbar\omega/2$ を基準から除いた分配関数は $Z_\omega^{\text{th}} = (1 - e^{-\beta\hbar\omega})^{-1}$ である。

2. 設問 2 平均エネルギーは $\langle E_\omega \rangle = -\partial_\beta \ln Z_\omega$ なので

$$\langle E_\omega \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}.$$

$x = \beta\hbar\omega$ と書けば、低温 $x \gg 1$ では

$$\langle E_\omega \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega e^{-x} + O(e^{-2x}),$$

高温 $x \ll 1$ では

$$\langle E_\omega \rangle = k_B T + \frac{(\hbar\omega)^2}{12k_B T} + O(T^{-3}).$$

低温では基底状態に凍結し、高温では古典的な等分配則（1 モードにつき $k_B T$ ）に近づく。以降、熱放射の総エネルギーには温度非依存の零点エネルギーを含めない。

3. 設問 3 立方体の壁が電磁波の節になるため、各方向の許される波数は

$$k_i = \frac{\pi n_i}{L} \quad (i = x, y, z), \quad n_i = 1, 2, 3, \dots$$

となる（厳密な電磁場の境界条件では、偏光に応じて零成分を含むモードの例外があるが、 L が十分大きい場合の体積に比例する状態密度には影響しない）。

4. 設問 4 波数格子の間隔は π/L で、正の八分体内の球殻 $k \sim k + dk$ に入る格子点数は

$$\frac{1}{8}(4\pi k^2 dk) \left(\frac{L}{\pi} \right)^3.$$

電磁波の二つの横偏光を掛けると、モード数は

$$dN_{\text{modes}} = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk.$$

1 モードの熱エネルギー $\hbar ck / (e^{\beta\hbar ck} - 1)$ を掛ければ

$$\varepsilon(k) = \frac{V\hbar c}{\pi^2} \frac{k^3}{e^{\beta\hbar ck} - 1}, \quad E_{\text{th}} = \int_0^\infty \varepsilon(k) dk.$$

ここで $\varepsilon(k)$ は波数 k 当たりの全箱エネルギーであり、体積当たりの密度ではない。

5. 設問 5 $x = \beta\hbar ck$ とおくと

$$E_{\text{th}} = \frac{V(k_B T)^4}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

級数展開 $1/(e^x - 1) = \sum_{n \geq 1} e^{-nx}$ を用い、 $\int_0^\infty x^3 e^{-nx} dx = 6/n^4$ であるから

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = 6\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}.$$

ゆえに

$$E_{\text{th}} = \frac{\pi^2 V}{15 \hbar^3 c^3} (k_B T)^4 \propto T^4.$$

これが Stefan-Boltzmann 則の体積エネルギー表示である。

6. 設問 6 $\varepsilon(k)$ の最大を求めるため $x = \hbar ck/(k_B T)$ を導入する。

$$\frac{d}{dx} \frac{x^3}{e^x - 1} = 0 \iff \boxed{3(1 - e^{-x}) = x}.$$

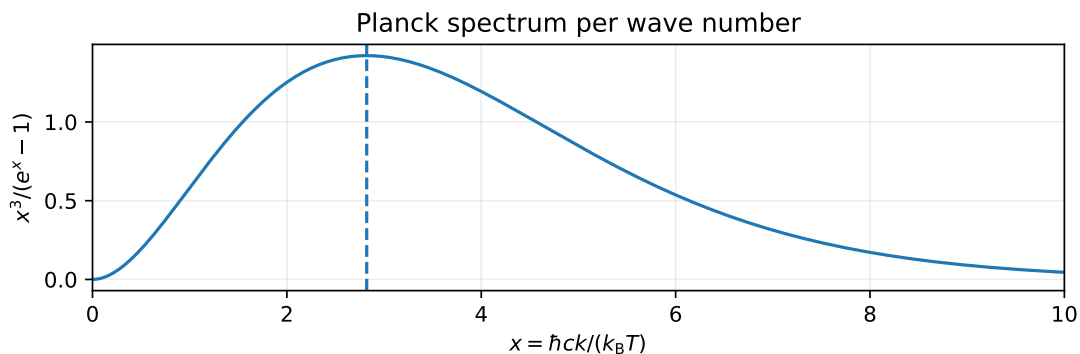
$x > 0$ の非自明解は $x_* = 2.821439\dots$ 。したがって

$$\boxed{k_{\max} = \frac{x_* k_B T}{\hbar c}}, \quad \boxed{\lambda_{\max} = \frac{2\pi}{k_{\max}} = \frac{2\pi \hbar c}{x_* k_B T}}.$$

原題の数値 $\hbar = 1.0 \times 10^{-34}$ J s, $c = 3.0 \times 10^8$ m/s, $k_B = 1.4 \times 10^{-23}$ J/K, $T = 2.7$ K を代入すると

$$\boxed{\lambda_{\max} \simeq 1.8 \times 10^{-3} \text{ m (有効数字 2 桁)}}.$$

注意：波長当たりのスペクトルを最大化した位置と、波数当たりの $\varepsilon(k)$ を最大化して $\lambda = 2\pi/k$ に写した位置は異なる。本問では後者を答える。



図：波数スペクトルの無次元形。横軸 $x = \beta \hbar ck$ 、最大は $x_* = 2.821439\dots$ 。

検算： $\int_0^\infty x^3/(e^x - 1) dx = \pi^4/15$ 、 x_* の数値解、および指定された物理定数での $\lambda_{\max}$ を独立に確認した。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2005年度

出題テーマ / 編集上の分類

自由電子気体と熱電子放出

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

金属中の伝導電子系をフェルミ・ディラック統計に従う自由電子気体と見なす単純なモデルを考える。図1に示したように、金属内部を表す一辺 L の立方体の箱の中はポテンシャルがゼロで、外部は $V(>0)$ になっているものとする。この中に N 個の電子が存在する。このとき以下の設問に答えよ。ただし、電子の質量を m 、ボルツマン定数を k_B 、 $\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数) とする。なお、設問2以降では、 L および N が十分に大きいとし、エネルギー準位の分布はほぼ連続と見なしてよい。

1. V が十分に大きいものとし、波動関数 $\psi(x, y, z)$ に周期的境界条件

$$\psi(x+L, y, z) = \psi(x, y, z), \quad \psi(x, y+L, z) = \psi(x, y, z), \quad \psi(x, y, z+L) = \psi(x, y, z),$$

を適用することによって、箱の中の電子状態を表わす固有関数と固有エネルギーを求めよ。

2. 状態密度 $g(\varepsilon)$ を求めよ。状態密度とは、エネルギーが ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ の範囲にある単位体積あたりの電子状態の数を $g(\varepsilon)d\varepsilon$ と表したときの $g(\varepsilon)$ である。
3. 温度 $T = 0$ における化学ポテンシャル (フェルミ準位) μ_0 と、電子の数密度 $n = N/L^3$ との関係を求めよ。
4. 温度 $T > 0$ では高いエネルギー状態にも有限の確率で電子が分布するので、一部の電子は表面から外部 (真空中) に飛び出すことができる。表面に垂直で外向きの方向を $+z$ 軸として、単位面積から単位時間に外部に流れ出す電子の数 J_n を、フェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$ 、電子の z 方向の速度 v_z を含む三次元波数空間での積分として表せ。その際、三次元波数空間の積分範囲を明示せよ。
5. $k_B T \ll (V - \mu)$ (ただし μ は有限温度での化学ポテンシャル) という近似のもとで設問4の積分を実行することにより、表面から単位時間、単位面積あたりに外部に流れ出す電子の数が

$$J_n = \frac{4\pi m(k_B T)^2}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{V - \mu}{k_B T}\right)$$

となることを示せ。

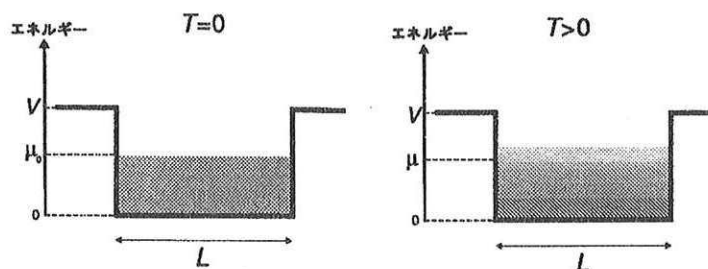


図1

2005 年度 第 2 問 解答・詳解

自由電子気体と熱電子放出

原題の設定：一辺 L の立方体の内部では電子のポテンシャルエネルギーをゼロとし、外部では $V > 0$ とする。電子は質量 m 、スピン $1/2$ を持ち、内部では自由な Fermi 気体と近似する。 $n = N/L^3$ とおく。

1. 設問 1 周期境界条件 $\psi(\mathbf{r} + L\mathbf{e}_i) = \psi(\mathbf{r})$ から

$$\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad k_i = \frac{2\pi n_i}{L}, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

を得る。各波数にスピンによる 2 重縮退がある。

2. 設問 2 体積 $V_{\text{box}} = L^3$ のとき波数空間の 1 状態は $(2\pi/L)^3$ を占める。スピン 2 重縮退を含め、半径 k の球内の単位体積当たり状態数は

$$\frac{N(k)}{L^3} = 2 \frac{\frac{4\pi}{3} k^3}{(2\pi)^3} = \frac{k^3}{3\pi^2}.$$

$\varepsilon = \hbar^2 k^2 / (2m)$ より

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{L^3} \frac{dN}{d\varepsilon} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$

これは単位体積・単位エネルギー当たりの状態密度である。

3. 設問 3 $T = 0$ では $\varepsilon \leq \mu_0$ を占有するので

$$n = \int_0^{\mu_0} g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m\mu_0}{\hbar^2} \right)^{3/2}.$$

ゆえに $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$ 、

$$\mu_0 = E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}.$$

4. 設問 4 外部への脱出には、境界面に垂直な運動エネルギーが障壁の高さを超える必要がある。したがって

$$\frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} > V, \quad k_z > 0, \quad \text{すなわち} \quad k_z > \frac{\sqrt{2mV}}{\hbar}.$$

Fermi 分布 $f(\varepsilon) = [e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1]^{-1}$ を用いると、単位時間・単位面積当たり外部へ出る電子数は

$$J_n = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^2} dk_x dk_y \int_{\sqrt{2mV}/\hbar}^{\infty} dk_z \frac{\hbar k_z}{m} \frac{1}{e^{\beta[\hbar^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)/(2m) - \mu]} + 1}.$$

因子 2 はスピン縮退、 $\hbar k_z/m$ は表面法線方向の速度である。なお、真空側の速度・透過係数を精密に扱う模型とは異なり、原題は電子が外部へ放出される単純模型を用いている。

5. 設問 5 $k_B T \ll V - \mu$ のとき、積分に寄与する領域では

$$f(\varepsilon) \simeq \exp[-\beta(\varepsilon - \mu)].$$

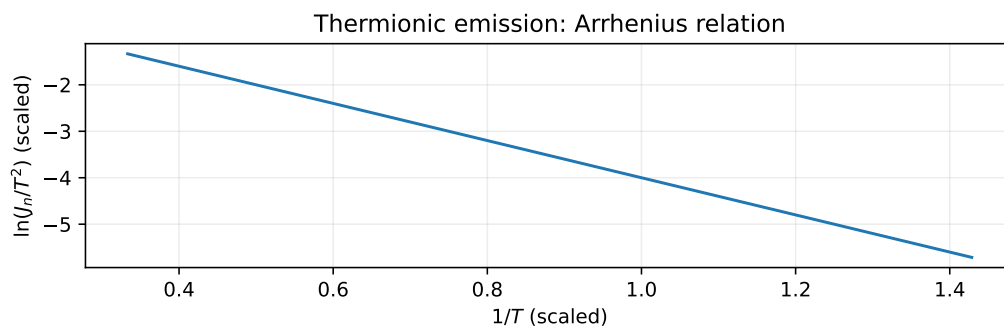
$p_i = \hbar k_i$ と変数を換えると

$$\begin{aligned} J_n &\simeq \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} e^{\beta\mu} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p_x^2 / (2m)} dp_x \right)^2 \int_{\sqrt{2mV}}^{\infty} \frac{p_z}{m} e^{-\beta p_z^2 / (2m)} dp_z \\ &= \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} e^{\beta\mu} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right) \left(\frac{e^{-\beta V}}{\beta} \right). \end{aligned}$$

したがって熱電子放出の法則

$$J_n = \frac{4\pi m (k_B T)^2}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left[-\frac{V - \mu}{k_B T}\right]$$

を得る。主な温度依存は $T^2 \exp[-(V - \mu)/(k_B T)]$ であり、 $V - \mu$ は仕事関数に相当する。原題の答えは電子の個数流束で、電流密度は電子電荷の絶対値 e を掛けたものである。



図： $\ln(J_n/T^2)$ と $1/T$ は直線（概念図）。傾きは $-(V - \mu)/k_B$ 。

検算：3次元状態密度の規格化、Gauss 積分、外部放出積分の下限と prefactor を独立に照合した。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2004 年度

出題テーマ / 編集上の分類

2状態鎖状分子・張力・Gibbs自由エネルギー

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第2問

図のように N 個の単量体が連結された直線的な鎖状分子を考える。各単量体は図のように自由に変形し、長さ a の状態 α (エネルギー: $+\epsilon$) か長さ b の状態 β (エネルギー: $-\epsilon$) のいずれかを、隣りあう単量体とは独立にとることができるとする。

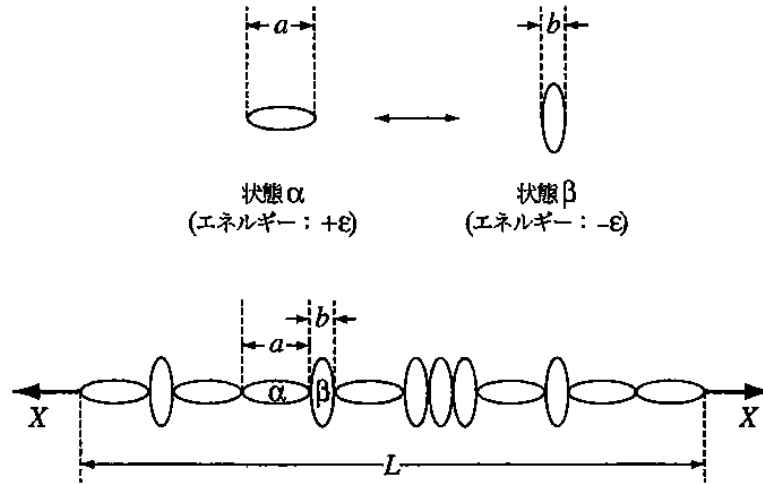


図 1:

鎖状分子が孤立した状態にあって、熱平衡に達している場合 (ミクロカノニカル分布) を考える。

1. N_α 個が α 、 N_β 個が β の状態にいる場合を考える ($N = N_\alpha + N_\beta$)。鎖状分子の長さ L とエネルギー E_L を求めよ。また、この状態の熱力学的重率 $W(N_\alpha, N_\beta)$ を求め、鎖状分子のエントロピー S が次のようになることを示せ。

$$S = -k_B \left\{ N_\alpha \log \frac{N_\alpha}{N} + N_\beta \log \frac{N_\beta}{N} \right\} \quad (1)$$

ここで、 k_B はボルツマン定数である。Stirling の公式、 $\log n! = n \log n - n$ ($n \gg 1$) を用いてよい。また、 $\log$ は自然対数とする。

つぎに、鎖状分子が温度 T の熱浴に接していて、一定の温度状態におかれている場合 (カノニカル分布) を考える。

2. 熱浴の状態密度を $\Omega(E_B)$ とする。鎖状分子と熱浴からなる全系のエネルギーを E_T 、状態 l にある鎖状分子のエネルギーを E_l とすれば ($E_T = E_B + E_l$)、等重率の原理により、状態 l の実現確率 $P(E_l)$ は、 l が指定された場合の微視的状态の数 $\Omega(E_T - E_l)\delta E$ に比例する。

$$P(E_l) \propto \frac{\Omega(E_T - E_l)\delta E}{\Omega(E_T)\delta E} \quad (2)$$

このことから、カノニカル分布では、状態 l の実現確率 $P(E_l)$ は、 $\exp(-E_l/k_B T)$ に比例することを示せ。ただし、熱浴は鎖状分子にくらべて十分大きいものとする。また、熱浴の温度が $T = (\partial S / \partial E)^{-1}|_{E=E_T}$ で表せることに留意せよ。

3. 一つの単量体の分配関数 Z_1 を示し、さらに鎖状分子の分配関数 Z_N を導け。
4. 分配関数 Z_N より、Helmholtz の自由エネルギー F 、エントロピー S 、系の内部エネルギー E を求めよ。
5. 比熱 C を求め、温度の関数として図示せよ。ただし縦軸を C/Nk_B とし、横軸を $k_B T/\epsilon$ とせよ。

つぎに、鎖状分子を温度 T の状態においたまま、一定の張力 X で両端を引っ張り、長さ L となった場合を考える。このとき、この系では、熱力学第一法則 $TdS = dE - XdL$ が成立している。(N 個の単量体からなる系を、非常に大きな N_T 個からなる系の部分系と考えると、熱浴は $N_T - N$ 個からなる非常に大きな系と考えることができる。)

6. 鎖状分子がエネルギー E_L で長さ L の状態にある確率 $p(E_L, L)$ は、熱浴を含む全系のエネルギーを E_T 、長さを L_T とすると、熱浴の状態密度 $\Omega(E_B) = \Omega(E_T - E_L, L_T - L)$ を用いて

$$p(E_L, L) \propto \frac{\Omega(E_T - E_L, L_T - L)\delta E}{\Omega(E_T, L_T)\delta E} \quad (3)$$

と書ける。 E_T, L_T に比べて E_L, L が十分に微視的な量であることを利用して、

$$p(E_L, L) \propto \exp \left\{ \frac{1}{k_B T} (-E_L + XL) \right\} \quad (4)$$

であることを示せ。

7. 系の分配関数

$$Y = \sum_{N_\alpha=0}^N W(N_\alpha, N_\beta) p(E(N_\alpha, N_\beta), L(N_\alpha, N_\beta)) \quad (5)$$

について、 N_α に関する和を計算し、 $N, T, X, a, b, +\epsilon, -\epsilon$ を用いて表せ。

8. 分配関数より Gibbs の自由エネルギー G を求め、そこから鎖状分子の長さ L と張力 X に関する関係式を求めよ。

2004 年度第 2 問 | 独立解答

状態 α は長さ a 、エネルギー $+\epsilon$ 、状態 β は長さ b 、エネルギー $-\epsilon$ とする。 $N_\alpha + N_\beta = N$ 、 $\beta_T \equiv 1/(k_B T)$ と記す。

設問 1：配置数、長さ、エネルギーとエントロピー

独立な N 個の構成要素に N_α 個の α と N_β 個の β を配置する数は二項係数である：

$$W(N_\alpha, N_\beta) = \frac{N!}{N_\alpha! N_\beta!}, \quad (1)$$

$$L = aN_\alpha + bN_\beta = bN + (a - b)N_\alpha, \quad (2)$$

$$E = \epsilon N_\alpha - \epsilon N_\beta = \epsilon(2N_\alpha - N). \quad (3)$$

Boltzmann の関係 $S = k_B \ln W$ に Stirling 近似を用いて

$$S \simeq -k_B \left(N_\alpha \ln \frac{N_\alpha}{N} + N_\beta \ln \frac{N_\beta}{N} \right).$$

ここで $n_\alpha = N_\alpha/N$ と置けば $S/N = -k_B [n_\alpha \ln n_\alpha + (1 - n_\alpha) \ln(1 - n_\alpha)]$ であり、 $n_\alpha = 1/2$ で最大になる。境界では $0 \ln 0 \equiv 0$ 。

設問 2：熱浴の状態数から Boltzmann 因子へ

熱浴のエントロピー $S_B(E_B) = k_B \ln \Omega(E_B)$ を、総エネルギー E_T の近くで展開する：

$$\ln \Omega(E_T - E_l) = \ln \Omega(E_T) - \frac{E_l}{k_B} \left. \frac{\partial S_B}{\partial E_B} \right|_{E_T} + O(E_l^2) \quad (4)$$

$$= \text{定数} - \frac{E_l}{k_B T} + O(E_l^2). \quad (5)$$

従って微小系の各微視状態の確率は $P_l \propto e^{-\beta_T E_l}$ 。熱浴が巨大であることにより二次以上の項を無視する。

設問 3：一分子と全分子の分配関数

$$Z_1 = e^{-\beta_T \epsilon} + e^{\beta_T \epsilon} = 2 \cosh(\beta_T \epsilon), \quad Z_N = Z_1^N = [2 \cosh(\beta_T \epsilon)]^N.$$

構成要素は互いに区別可能な鎖上の位置を占めているので、独立状態の和に追加の $1/N!$ は付けない。

設問 4：自由エネルギー、エントロピー、内部エネルギー

$x \equiv \epsilon/(k_B T)$ とすると

$$F = -N k_B T \ln(2 \cosh x), \quad (6)$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta_T} \ln Z_N = -N \epsilon \tanh x, \quad (7)$$

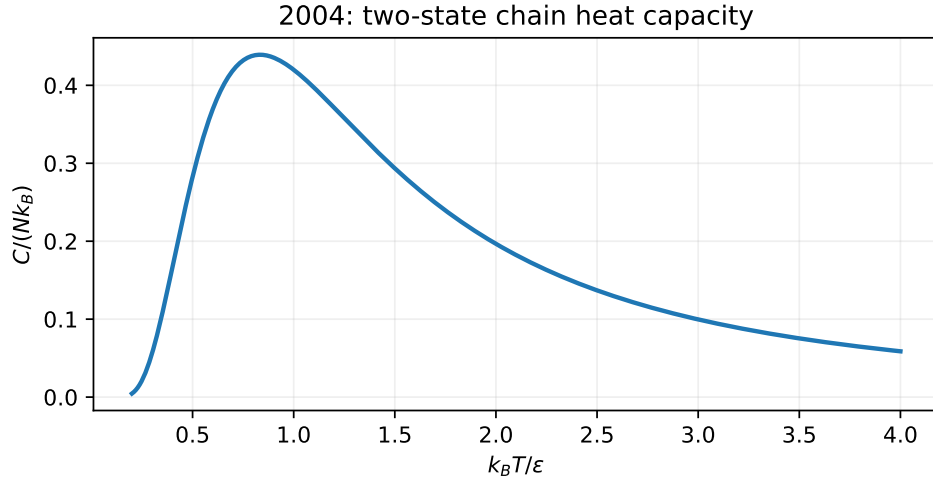
$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_N = N k_B [\ln(2 \cosh x) - x \tanh x]. \quad (8)$$

$T \rightarrow 0^+$ では $E \rightarrow -N\epsilon$ 、 $S \rightarrow 0$ 、高温では $E \rightarrow 0$ 、 $S \rightarrow N k_B \ln 2$ となる。

設問 5：熱容量の温度依存

$$C = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_N = N k_B \frac{x^2}{\cosh^2 x}, \quad x = \frac{\epsilon}{k_B T}.$$

高温 $x \ll 1$ では $C/(Nk_B) \simeq x^2$ 、低温 $x \gg 1$ では $C/(Nk_B) \simeq 4x^2 e^{-2x}$ 。最大値は $x \tanh x = 1$ の正の解 $x \simeq 1.200$ に対応する。



設問 6：張力付き系の一般化された Boltzmann 因子

問題で与えられた熱力学第一法則 $T dS = dE - X dL$ から

$$dS_B = \frac{dE_B - X dL_B}{T}.$$

熱浴との保存関係 $dE_B = -dE_L$ 、 $dL_B = -dL$ を用いれば、浴の状態数の展開から

$$p(E_L, L) \propto \exp \left[-\frac{E_L - XL}{k_B T} \right]$$

が得られる。張力 X の符号は問題の $T dS = dE - X dL$ に従う。

設問 7：張力付き分配関数

構成要素 α, β の有効エネルギーは順に $\epsilon - Xa$ 、 $-\epsilon - Xb$ である。よって

$$Y = \sum_{N_\alpha=0}^N \frac{N!}{N_\alpha!(N-N_\alpha)!} e^{-\beta T[\epsilon(2N_\alpha-N) - X(aN_\alpha + b(N-N_\alpha))]} \quad (9)$$

$$= \left[e^{\beta T(Xa - \epsilon)} + e^{\beta T(Xb + \epsilon)} \right]^N. \quad (10)$$

設問 8：Gibbs 自由エネルギーと張力—伸長関係

$$G(T, X) = -k_B T \ln Y = -N k_B T \ln \left[e^{\beta T(Xa - \epsilon)} + e^{\beta T(Xb + \epsilon)} \right], \quad (11)$$

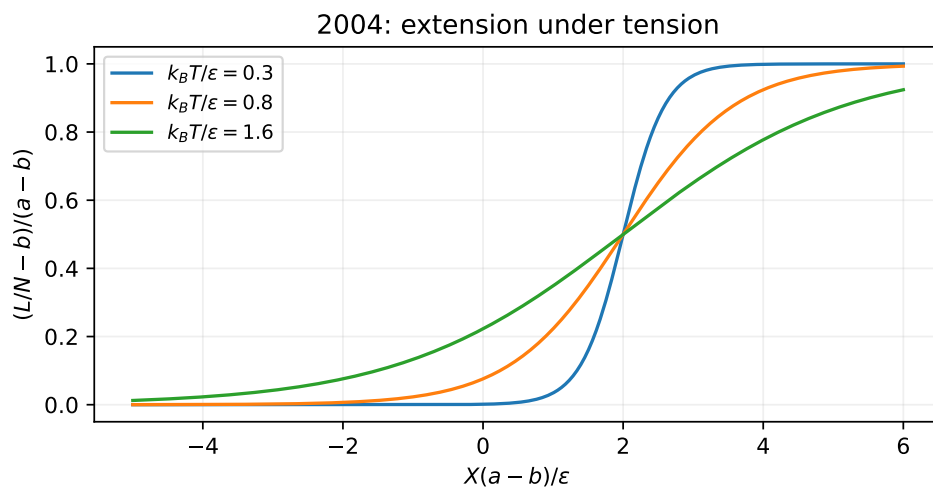
$$L = - \left(\frac{\partial G}{\partial X} \right)_T = N \frac{a e^{\beta T(Xa - \epsilon)} + b e^{\beta T(Xb + \epsilon)}}{e^{\beta T(Xa - \epsilon)} + e^{\beta T(Xb + \epsilon)}}. \quad (12)$$

整理すると

$$\frac{L}{N} = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \tanh\left(\frac{X(a-b) - 2\epsilon}{2k_B T}\right).$$

さらに等温での力学的応答は

$$\left(\frac{\partial L}{\partial X}\right)_T = \frac{N(a-b)^2}{4k_B T} \operatorname{sech}^2\left(\frac{X(a-b) - 2\epsilon}{2k_B T}\right) \geq 0.$$



統計力学・量子統計 | 年度別問題

2003 年度

出題テーマ / 編集上の分類

二元合金・平均場・Landau展開・相分離

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

問題2

イオン半径のほぼ等しい2種の元素 A、B を高温で溶かして均一に混ぜ合わせ、その後急冷して、温度 T で合金 (固溶体) を作る。元素 A、B は濃度比によらず格子定数が一定の単純立方格子を作ると仮定する。また、原子 A と A、B と B が最近接で隣り合うときの相互作用エネルギーは等しくその大きさを a 、A と B が最近接で隣り合うときの相互作用エネルギーの大きさを b であるとし、これ以外には相互作用は働かないとする。A どうし、B どうしが隣り合う方が、A、B が隣り合うよりもエネルギーが低く、 $a < b$ が満たされているとする。ただし、合金中の A、B の原子数濃度は等しいとする。

1. 格子点 i が A 原子で占められているときを $\sigma_i = 1$ 、B 原子で占められているときを $\sigma_i = -1$ とする変数 σ_i を使うと、この合金のモデルのハミルトニアンは

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} (P\sigma_i\sigma_j + Q)$$

という形に書けることを示し、 P と Q を a 、 b を用いてあらわせ。ただし、 $\langle i,j \rangle$ は最近接格子点の組である。ここで今の場合、A、B が50%ずつなので、対称性から化学ポテンシャルの項 $-\mu \sum_i \sigma_i$ は必要ないことを注意しておく。

2. この系の場合、 σ_i の平均値 $p = \langle \sigma_i \rangle$ の値はいくつか。
3. ハミルトニアンの中の相互作用を表す項 $\sigma_i\sigma_j$ を定数 m を用いて、 $(\sigma_i + \sigma_j)m - m^2$ と置き換える近似を行ない

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} [P\{(\sigma_i + \sigma_j)m - m^2\} + Q]$$

と表わす。 m を設問2で決まっている σ_i の一様な平均値 $m = p = \langle \sigma_i \rangle = \langle \sigma_j \rangle$ で与えるならば、この近似は相互作用の相手を平均値で置き換えることになり、「平均場近似」と呼ばれる。しかし、ここではより一般に m をパラメタと考える。すなわち、上記の近似での平均値 m が設問2で与えられる系全体の平均値 p と関係なく与えられるとしたときに、上記のハミルトニアンで与えられる系の分配関数 Z と自由エネルギー F

を m 、 N 、 a 、 b および温度 T の関数として表わせ。ただし系の全格子点数は N であり、周期的境界条件下にあるとしてよい。以下、ボルツマン定数を k_B とする。

4. 設問3で求めた自由エネルギー F を m が小さいと考えて m の4次まで展開した表式は $F = u + vm^2 + wm^4$ と書ける。 u 、 v 、 w を N 、 T 、 a 、 b を用いて表わせ。
5. もしも m が自由に選べて、設問4で展開して4次まで求めた自由エネルギーが最小になる m が実現されたとすると、 m は温度の関数としてどのようにふるまうか。 $k_B T > 2(b-a)$ の範囲でおおざっぱに m と T の関係を表わすグラフも書け。
6. 設問4で求めた自由エネルギーの表式を用いて、この系の温度を下げてくるときに、この合金系の熱平衡状態でどのような相転移が生ずるか、説明せよ。ただしA、Bの組成比が決まっているときに、物体全体では σ_i の平均値 m の値は設問2の値で決まっていて固定されていることに注意せよ。

2003 年度第 2 問 | 独立解答

A 原子が $\sigma_i = +1$ 、B 原子が $\sigma_i = -1$ 。最近接の同種対エネルギーは a 、異種対は b であり $a < b$ 。単純立方格子の最近接配位数を $z = 6$ 、 $d \equiv b - a > 0$ と置く。系全体の原子数比は $A : B = 1 : 1$ に固定される。

設問 1 : Ising 型ハミルトニアンへの書換え

$\sigma_i \sigma_j = 1$ (同種対) でエネルギー a 、 -1 (異種対) で b だから

$$P + Q = a, \quad -P + Q = b \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{a-b}{2} = -\frac{d}{2}, \quad Q = \frac{a+b}{2}}.$$

従って $H = \sum_{\langle i,j \rangle} (P \sigma_i \sigma_j + Q)$ 。同種原子が隣り合う方が低エネルギーとなるため $P < 0$ で、強磁性的な Ising 模型に対応する。組成固定 $\sum_i \sigma_i = 0$ により化学ポテンシャル差の項は不要。

設問 2 : 均一系での平均値

元素 A と B が同数であるから

$$p = \langle \sigma_i \rangle = P(A) - P(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{0}.$$

この式は系全体の組成比の拘束を示す。次の平均場計算で導入される m は、局所的な均一相を仮定した変分パラメータであり、相分離の各領域では非零になり得る。

設問 3 : 平均場分配関数と自由エネルギー

近似 $\sigma_i \sigma_j \mapsto m(\sigma_i + \sigma_j) - m^2$ と $\# \text{bonds} = zN/2 = 3N$ を用いて

$$H_{\text{MF}} = zPm \sum_{i=1}^N \sigma_i + \frac{zN}{2}(Q - Pm^2).$$

独立な格子点上のスピンを総和すると

$$Z_{\text{MF}}(m) = \exp \left[-\beta_T \frac{zN}{2} (Q - Pm^2) \right] [2 \cosh(\beta_T z P m)]^N, \quad (13)$$

$$F_{\text{MF}}(m) = \frac{zN}{2} (Q - Pm^2) - N k_B T \ln [2 \cosh(\beta_T z P m)]. \quad (14)$$

$P = -d/2$ 、 $z = 6$ を代入すれば

$$\boxed{\frac{F_{\text{MF}}(m)}{N} = \frac{3(a+b)}{2} + \frac{3d}{2} m^2 - k_B T \ln \left[2 \cosh \frac{3dm}{k_B T} \right]}.$$

この式の m による停留条件は $m = \tanh(3dm/k_B T)$ である。

設問 4 : Landau の四次展開

$\ln \cosh x = x^2/2 - x^4/12 + O(x^6)$ を用いる :

$$F_{\text{MF}}(m) = N (u + vm^2 + wm^4 + O(m^6)),$$

$$\boxed{u} = \frac{3(a+b)}{2} - k_B T \ln 2, \quad (15)$$

$$\boxed{v} = \frac{3d}{2} - \frac{9d^2}{2k_B T} = \frac{3d}{2} \left(1 - \frac{3d}{k_B T} \right), \quad (16)$$

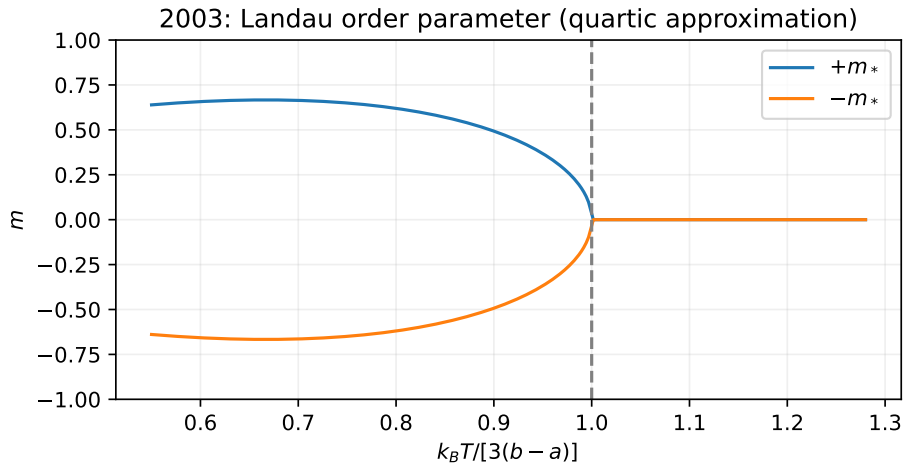
$$\boxed{w} = \frac{(3d)^4}{12(k_B T)^3} = \frac{27d^4}{4(k_B T)^3} > 0. \quad (17)$$

設問 5：四次近似の極小点と温度依存

$F'_m = 2Nvm + 4Nwm^3 = 0$ より候補は $m = 0$ と $m^2 = -v/(2w)$ 。 $v \geq 0$ では $m = 0$ が極小、 $v < 0$ では $m = 0$ は極大で

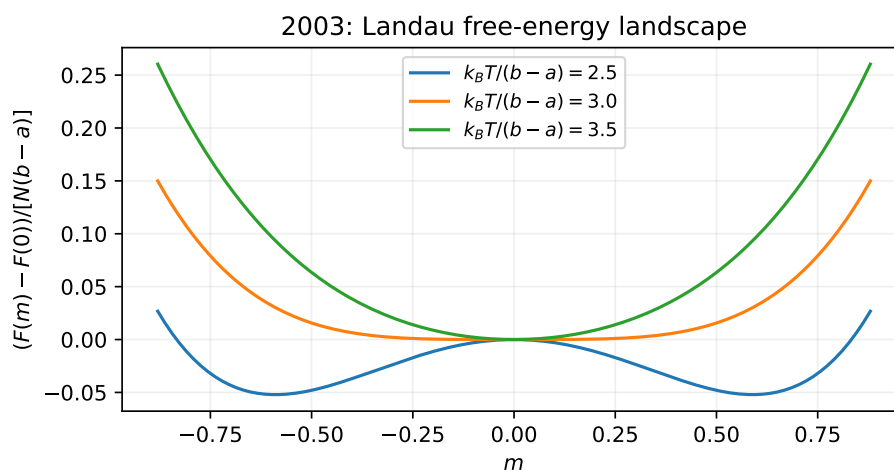
$$\boxed{m_* = \pm \sqrt{\frac{-v}{2w}} = \pm \frac{k_B T}{3d} \sqrt{\frac{3d - k_B T}{d}}} \quad (k_B T < 3d).$$

臨界温度は $\boxed{T_c = 3(b-a)/k_B}$ 。設問の $k_B T > 2d$ という範囲では、 $2d < k_B T < 3d$ が非零解を持つ範囲である。この四次近似は臨界点の近くで $|m| \ll 1$ のとき最も信頼できる。



設問 6：相転移・相分離の物理的意味

温度を下げて T_c を横切ると、 $m = 0$ の均一相は不安定になり、局所的には $m = +m_*$ と $m = -m_*$ の二つの組成偏りを持つ相が有利になる。ところが原題では $N_A = N_B$ が固定されるため、**試料全体の $\langle \sigma \rangle$ は常に 0 である**。したがって実際の意味は A 豊富な相と B 豊富な相の**相分離**であり、対称な条件では二相が同じ体積割合で共存する。境界面の自由エネルギーは熱力学極限で体積項より小さい。均一な非零 m を全試料に当てはめると組成拘束に反するので注意。



復習のための重要公式

Boltzmann 分布: $P_l \propto e^{-\beta_T E_l}$,

張力固定: $P(E, L) \propto e^{-\beta_T (E - XL)}$,

自由エネルギー: $F = -k_B T \ln Z$, $G = -k_B T \ln Y$,

熱容量: $C = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_N$,

平均場の臨界点: $v(T_c) = 0$, $T_c = 3(b - a)/k_B$.

備考: 本書は 2004 年度・2003 年度の第 2 問を資料に基づいて解いた独立の非公式解答である。
 原題にない数学的補足 (秩序変数の解釈、近似の有効域、感受率) は解説として追加した。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2002年度

出題テーマ / 編集上の分類

鎖状高分子・エントロピー弾性と電場

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

問題 2

図のように、矢印で表される要素 N 個が x 方向に繋がった鎖状分子を考える。各要素はそれぞれ長さ b で、矢印の先端に電荷 $Q (> 0)$ をもつ。各要素は、矢印が $+x$ 方向に向くか、 $-x$ 方向に向くかの二つの状態のみ取りうるものとする。これを、 i 番目要素の状態変数 μ_i を導入し、 $\mu_i = +1$ または -1 で表す。1 番目要素の矢印の始点が点 $O (x = 0)$ に固定されていて、大きさ E の電場 ($E \geq 0$) が $+x$ の向きにかけられているものとする。また、この鎖状分子は温度 T の熱浴に接しているものとする。

電荷は外部電場 E とだけ相互作用し、電荷間の相互作用は無視できるものとする。また、 x と垂直方向への分子の広がりは無視できるものとし、ボルツマン定数を k_B として、以下の問に、解答に至る道筋を添えて答えよ。

1. まず、 $E = 0$ の場合を考える。

- (a) 分子の端点の位置 x_N の関数としてこの分子のエントロピー S を求めよ。ただし、 $L = bN$ とし、 $N, x_N/b \gg 1$ であるとして、必要であれば Stirling の公式、すなわち、 $x \gg 1$ のとき

$$\log x! \sim x \log x - x + \dots$$

を用いよ。

- (b) 端点位置を x_N に保つために、この端点に加えなければならない力 X と x_N との関係を導け。

- (c) $N \gg x_N/b (\gg 1)$ の場合、 X と x_N との関係式は近似的にどのように与えられるか。 x_N を外力 X に対する分子の伸びとみたとき、この分子はどのような弾性体と言えるか。

2. 次に、 $E > 0$ の場合を考える。

- (a) E が与えられたもとでのこの鎖状分子の分配関数 Z_N を、変数 $A \equiv bQE/k_BT$ を用いて表せ。

- (b) i 番目要素の μ_i の平均値 $\langle \mu_i \rangle$ を求めよ。

- (c) この鎖状分子の長さの平均値 $\langle x_N \rangle$ について、電場が十分小さい極限、 $NA \ll 1$ 、での表式を求めよ。 $\langle x_N \rangle$ を外力の総和 NQE に対する分子の伸びとみたとき、前問 1(c) との関連を論ぜよ。

2002 年度 第 2 問 電場中の鎖状高分子

原題：平成 14 年度『物理学』問題 2 (原本 4 頁)。変数は原題の $N, b, Q, E, T, \mu_i, x_N$ を使用する。 $x_N = b \sum_{i=1}^N \mu_i$ 。以下は大学非公認の独立解答。

1. 電場がない場合

(a) 配置数とエントロピー 上向き要素を N_+ 、下向きを N_- とすると、

$$N_+ + N_- = N, \quad N_+ - N_- = \frac{x_N}{b}, \quad N_{\pm} = \frac{1}{2} \left(N \pm \frac{x_N}{b} \right).$$

従って、実現できる x_N に対して

$$W(x_N) = \binom{N}{N_+}, \quad S(x_N) = k_B \ln \frac{N!}{N_+! N_-!}.$$

x_N/b と N は同じ偶奇で、 $|x_N| \leq Nb$ を満たす必要がある。 $N_{\pm} \gg 1$ として Stirling 近似を使い、 $m = x_N/(Nb)$ と置けば

$$\begin{aligned} \frac{S(x_N)}{Nk_B} &\simeq -\frac{1+m}{2} \ln \frac{1+m}{2} - \frac{1-m}{2} \ln \frac{1-m}{2} \\ &= \ln 2 - \frac{m^2}{2} - \frac{m^4}{12} + O(m^6). \end{aligned}$$

(b) 端点を保持する力 内部エネルギーが x_N に依存しないなら、Helmholtz 自由エネルギーは $\mathcal{F}(x_N, T) = -TS(x_N)$ (x_N に依存しない定数は省略)。端点変位に共役な外力 X は

$$X = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_N} \right)_T = -T \frac{\partial S}{\partial x_N} = \frac{k_B T}{2b} \ln \frac{Nb + x_N}{Nb - x_N} = \frac{k_B T}{b} \operatorname{artanh} \left(\frac{x_N}{Nb} \right).$$

右向きに伸ばす $x_N > 0$ の場合 $X > 0$ 。復元力はこの反対符号である。

(c) Hooke 則と弾性の原因 $|x_N| \ll Nb$ のとき

$$X = \frac{k_B T}{Nb^2} x_N + O(x_N^3), \quad \kappa_{\text{entropic}} = \frac{k_B T}{Nb^2}.$$

温度に比例し、鎖の要素数に反比例するエントロピー弾性である。要素は伸びても相互作用エネルギーを蓄えるのではなく、配向の自由度が失われるために復元力が生じる。

2. 一様な電場 $E > 0$ を加えた場合

(a) 分配関数 原題の一要素の電場エネルギーは $-QE b \mu_i$ 。 $A = QE b / (k_B T)$ とおけば

$$Z_N(E, T) = \sum_{\mu_i = \pm 1} \exp \left(A \sum_{i=1}^N \mu_i \right) = \prod_{i=1}^N (e^A + e^{-A}) = [2 \cosh A]^N.$$

(b) 配向の平均

$$\langle \mu_i \rangle = \frac{e^A - e^{-A}}{e^A + e^{-A}} = \tanh A \quad (i = 1, \dots, N).$$

(c) 鎖長の平均と (1c) との比較

$$\langle x_N \rangle = Nb \tanh A, \quad \langle x_N \rangle \simeq \frac{NQE b^2}{k_B T} \quad (NA \ll 1 \Rightarrow A \ll 1).$$

(1c) では $X = k_B T x_N / (Nb^2)$ だから $X = QE$ とすれば同じ式が得られる。これは分配関数の電場エネルギーが $-QE x_N$ 、すなわち x_N に共役な力は QE であるためである。

原題の「外力の総和 NQE 」に関する注意： 各電荷に働く力を単純に足せば NQE だが、各力は鎖の異なる位置に作用する。総和を端点位置 x_N に共役な力とみなすことはできない。実際に $F_{\text{tot}} = NQE$ と書けば $\langle x_N \rangle \simeq F_{\text{tot}} b^2 / (k_B T)$ となり、(1c) の $Nb^2 / (k_B T)$ とは異なる。与えられた一要素エネルギーを忠実に使う限り、共役な力は QE であり、この差を無視して両者が一致するとしてはならない。

検算と復習

磁場の代わりに電場 E を入れた独立スピンの分配関数に等しく、

$$\frac{\partial \ln Z_N}{\partial A} = N \tanh A = \frac{\langle x_N \rangle}{b}, \quad \text{Var}(x_N) = Nb^2 \text{sech}^2 A.$$

特に $E = 0$ における線形応答は $\partial_E \langle x_N \rangle = NQb^2/(k_B T)$ で、上記の一次近似と一致する。

統計力学・量子統計 | 年度別問題

2001年度

出題テーマ / 編集上の分類

周期1次元Ising模型・分配関数

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

[問題2]

スピンが一次元格子上的各点にあり、格子点の数が N (N は偶数) の模型を考察する。そのハミルトニアンは

$$H = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1},$$

とする。ここで周期的境界条件を課し、 σ_{N+1} は σ_1 を意味するものとし、かつ σ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) は ± 1 の値をとるものとする。この模型の各状態は $(\uparrow\downarrow\uparrow\dots)$ のようなスピンの配置によってあらわされる。

1. この模型の状態数は全部でいくつか。
2. J が正の場合と負の場合について基底状態のスピン配置を書け。
3. 前問の場合、基底状態エネルギーとその縮重度を求めよ。

以下では J が正の場合のみを考える。

4. 第一励起状態のスピン配置を書け。そのエネルギーと縮重度を求めよ。
5. すべてのエネルギー固有値とその縮重度を求めよ。ただし二項係数

$${}_N C_M \equiv \frac{N!}{M!(N-M)!},$$

を用いよ。

6. 前問の結果を用いて、この系の分配関数を求めよ。ただし温度は T とし、ボルツマン定数は k_B とする。必要に応じて

$$(1+x)^N = \sum_{M=0}^N {}_N C_M x^M,$$

を使ってよい。

7. N が無限大の極限での 1 格子点当たりの自由エネルギーが

$$-k_B T \ln \left[2 \cosh \left(\frac{J}{k_B T} \right) \right]$$

であらわされることを示せ。

8. 前問の結果を用いて、1 格子点当たりのエネルギーとエントロピーを求めよ。高温でのエントロピーの漸近的振る舞いを求めよ。

2001 年度 第 2 問 周期 1 次元 Ising 模型

原題：平成 13 年度『物理学』問題 2 (原本 3 頁)。 N は偶数、 $\sigma_i = \pm 1$ 、周期境界 $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ 、 $H = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1}$ 。

1. 基底状態は強磁性か $J > 0$ なら隣接スピンの向きが等しいほどエネルギーが低くなるので強磁性、 $J < 0$ なら隣接スピンの逆向きほど低くなるので反強磁性である。 $J = 0$ なら全配向が縮退する。

2. 基底状態の配向 $J > 0$ なら $++++\cdots +$ と $-----$ の 2 通り。 $J < 0$ なら $+-+-\cdots$ と $-+-+-\cdots$ の 2 通り (N 偶数のため周期境界と両立する)。

3. 基底エネルギーと縮退度 $J \neq 0$ なら $E_0 = -N|J|$ 、縮退度は 2。 $J = 0$ は $E_0 = 0$ 、縮退度 2^N 。

以下は原題に従い $J > 0$ とする。

4. 第 1 励起状態 隣接スピンの向きが異なる場所 (domain wall) 1 個につき、整列状態と比べてエネルギーは $2J$ 増す。周期鎖では壁の個数は偶数だから、最小の励起は壁 2 個である。すなわち連続する ℓ 個 ($1 \leq \ell \leq N-1$) だけ反転した塊とその平行移動。

$$E_1 = -NJ + 4J, \quad g_1 = 2 \binom{N}{2} = N(N-1).$$

後者は壁となる 2 本の結合を選び、基準となる 1 個のスピンの符号を 2 通りから選ぶことで得られる。

5. 全準位と縮退度 壁の個数を M とすると、 M は $0, 2, \dots, N$ の偶数に限られる (N 偶数)。各壁の結合には $\sigma_i \sigma_{i+1} = -1$ 、それ以外には $+1$ を代入すれば

$$E_M = -J(N-2M), \quad g_M = 2 \binom{N}{M}, \quad M = 0, 2, \dots, N.$$

縮退度の和は $2 \sum_{M \text{ even}} \binom{N}{M} = 2^N$ となり、状態数の総和を再現する。

6. 分配関数 $K = J/(k_B T)$ 、 $\beta = (k_B T)^{-1}$ として

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{M \text{ even}} 2 \binom{N}{M} e^{\beta J(N-2M)} \\ &= (e^K + e^{-K})^N + (e^K - e^{-K})^N \\ &= \left[(2 \cosh K)^N + (2 \sinh K)^N \right]. \end{aligned}$$

$N = 2, 4, 6, 8$ の場合に全 2^N 配置を直接列挙して一致を検証した。

7. 熱力学極限の自由エネルギー

$$\frac{\mathcal{F}_N}{N} = -k_B T \left\{ \ln(2 \cosh K) + \frac{1}{N} \ln [1 + (\tanh K)^N] \right\}.$$

有限温度では $0 < \tanh K < 1$ だから第 2 項は消失し、

$$f(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{F}_N}{N} = -k_B T \ln \left[2 \cosh \left(\frac{J}{k_B T} \right) \right].$$

この模型には $T > 0$ の有限温度相転移はない。

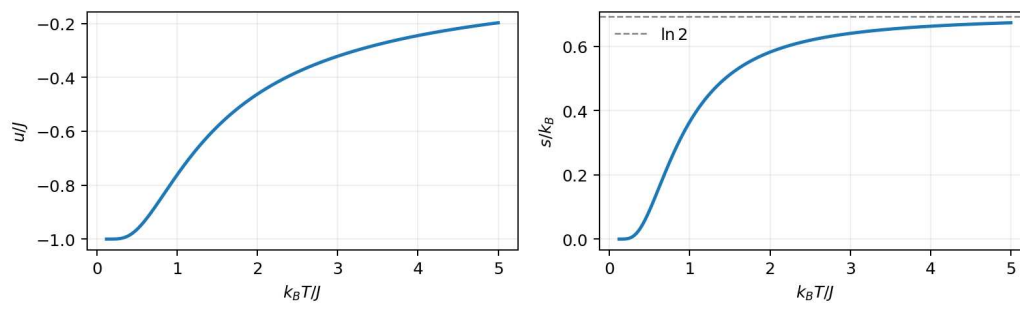
8. 内部エネルギーとエントロピー $u = \partial_\beta(\beta f)$ 、 $s = (u - f)/T$ を使うと

$$u(T) = -J \tanh K, \quad s(T) = k_B [\ln(2 \cosh K) - K \tanh K].$$

$T \rightarrow 0^+$ で $u \rightarrow -J$ 、 $s \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$ を先に取る)。高温では $K \ll 1$ で、

$$s(T) = k_B \ln 2 - \frac{J^2}{2k_B T^2} + O(T^{-4}).$$

高温極限で各スピンが独立な 2 状態となるため $s \rightarrow k_B \ln 2$ である。



左：無次元内部エネルギー u/J 。右：無次元エントロピー s/k_B 。いずれも熱力学極限。有限 N の残差は $N^{-1} \log(1 + \tanh^N K)$ で定量化される。

電磁気学・古典力学 25年度収録への増補

2001～2026年度（2021年度を除く）を対象とした改訂版です。

前の合冊版には2014～2026年度の12年度が収録されていました。

今回、2008～2013年度の既存の原題・独立解答を追加しました。

さらに2001～2007年度の提供原題PDFから問題を抽出し、独自解答を増補しました。

2004年度は第3問（電磁気）と第4問（中心力・重力散乱）の2大問を掲載。

したがって、今回の収録は25年度分・計26大問です。

原題と独自解答は分けて掲載し、原題の番号は改変していません。

資料の由来と検査区分

2014～2026：既存の合冊版の問題・解答を保持

2008～2013：旧18年度合冊版から原題・独自解答を複製

2001～2007：ユーザー提供H13phys.pdf～H19phys.pdfから原題を収録

2001～2007年度の独自解答を新規に制作

本誌の解答は公式模範解答ではありません。

数式・物理的仮定は独立検算対象ですが、完全な外部査読は未実施です。

出典の公式過去問一覧：

<https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/about/147/>

二次利用条件：

<https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/wp-content/uploads/2025/03/EntranceExam2ndUse.pdf>

東京大学大学院 理学系研究科
物理学専攻修士課程 入学試験

電磁気学・古典力学

問題・詳解集

年度降順・更新合冊版

2026 年度 → 2014 年度

第 1-6 巻 / 12 年度分

収録の原則

各年度の第 3 問を、大学院入試の原題、独立解答の順に収録した。問題本文と解答は別にし、数式の導出と境界条件・近似条件を明記する。2021 年度は原題未収録のため除外する。

重要な校注（2014 年度）

原題の Maxwell-Faraday の式には通常と異なる符号が印字されている。原題自体は改変せず、解答で通常の負号を使う理由と影響を記載した。

利用上の注意 これらは非公式の独立解答であり、東京大学が公表した模範解答ではない。今回新規に作成した 2015・2014 年度を除く既刊分の全小問を、今回再査読したものではない。

年度別目次

年度	主題	原題開始頁
2026	荷電質点・磁場・回転する管	3
2025	静電場・Poisson 方程式・鏡像法	8
2024	Rayleigh 散乱・光ピンセット	16
2023	双極子・四重極子・相互作用	20
2022	電磁波・Fresnel 係数・全反射	25
2020	同軸ケーブル・TEM モード	28 新規収
2019	重力波による連星運動の減衰	33
2018	電気双極子の放射・干渉	37
2017	二重振子・固有モード移行	41
2016	相対論的ロケット・固有加速度	46
2015	運動する電荷・Lorentz 変換	51
2014	導体の表皮効果・電力反射率	54

録 2 年度の詳細

- **2015 年度**：6 設問。線電荷密度，Lorentz 変換，運動する点電荷の電磁場。原題 1 頁＋独立解答 2 頁。
- **2014 年度**：6 設問。平面波の分散，表皮深さ，反射率，電気伝導による散逸。原題 1 頁＋独立解答 2 頁。

読み方 年度ごとに「原題→解答」を配置し，PDF のしおりから年度・原題・解答へ移動できる。2015・2014 年度の原題は提供された PDF の該当ページを直接転載した。

物理的条件 2014 年度の解答では $e^{-i\omega t}$ を採用し，標準的な Maxwell–Faraday の負号を用いる。良導体近似 $\omega\epsilon_m \ll \sigma_m$ はその近似が指定された設問で用いる。

電磁気学・古典力学 | 年度別問題

2026年度

出題テーマ / 編集上の分類

荷電質点・磁場・回転する管

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第3問

図1のように、鉛直な回転軸に水平に固定された管の内部に、質量の異なる2つの質点（それぞれ質量 m , M とする）を質量の無視できる長さ $2a$ の棒でつないだ物体をおく。質量 M の質点のみ、電荷 Q ($Q > 0$) をもつものとする。回転する管が通過する領域には、磁束密度の大きさが B の一様な磁場が鉛直下向きにかけられているものとする。図1のように、2つの質点を結ぶ棒の向きに x 軸をとり、回転軸に対する棒の中心の座標を x とする。管内部において、物体は x 方向と垂直な向きに運動しないものとし、管は十分に長く、物体が管から飛び出すことはないものとする。また、管の質量・太さ・厚み、および管と物体との摩擦は、いずれも無視できるものとする。重力加速度の大きさを g とする。

はじめ、回転軸に対してトルクを与え、上から見て反時計回りに一定の角周波数 ω で管を回転させる場合を考える。以下の設問に答えよ。

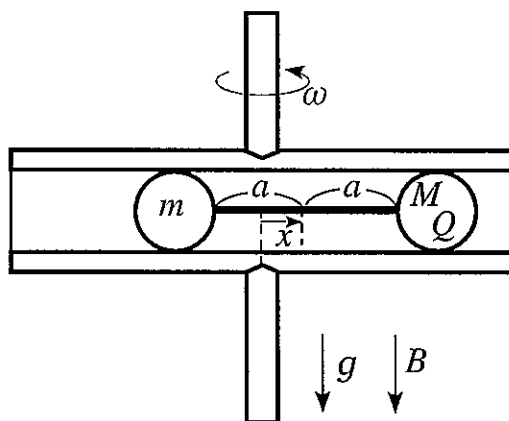


図1: 回転軸に固定された管の中の2つの結合された質点。

1. 管が一定の角周波数 ω で回転しているとき、物体は管内部で動かなかった。このときの物体の x 軸上の位置 x_0 を m , M , a , ω , Q , B , g の中から必要なものを用いて表せ。
2. 問1のとき、回転軸の周りの物体の角運動量の大きさを m , M , ω , B , a , x_0 の中から必要なものを用いて表せ。
3. 管の回転を停止し、問1とは異なる x 軸上の位置に物体を移動させてから再び管を角周波数 ω で回転させたところ、物体は x 方向に単振動を始めた。このような振る舞いを示すために必要な m , M に対する必要十分条件を求めると共に、単振動の角周波数を a , m , M , Q , B , ω の中から必要なものを用いて表せ。

つぎに、図2のように、管を支柱の上におき、管が水平面となす角を $\theta(t)$ とする。 $t=0$ において $\theta=0$ で静止している状態から、管が水平面に対してゆっくり傾いていく運動を考える。管は支柱の上で滑らないものとする。時刻 t における物体の x 軸上の位置を $x(t)$ とする。 $t=0$ において物体も管に対して静止しており、 $x=0$ 、 $\frac{dx}{dt}=0$ とする。問4, 5, 6では、 $B=0$ とし、管が水平面内では回転しないものとせよ。以下の設問に答えよ。

4. 支点を通り、 x 軸に垂直な軸の周りの物体の慣性モーメントを m , M , a , Q , x の中から必要なものを用いて表せ。
5. $|\theta| \ll 1$, かつ $|x| \ll a$ である場合を考える。このとき、 $\cos \theta \simeq 1$ かつ $a \pm x \simeq a$ と近似して、管の θ 方向の運動方程式を解き、 $\theta(t)$ を Q , m , M , g , a , t の中から必要なものを用いて表せ。
6. 問5のとき、 x 方向の物体の運動方程式を解き、時刻 t における x を Q , m , M , g , a , t の中から必要なものを用いて表せ。ただし、 $\sin \theta \simeq \theta$ と近似してよい。
7. 磁束密度の大きさ B がゼロでない場合、管は鉛直面内で傾き始めると共に、水平面内において回転を始める。時刻 $t=0$ での管の水平面内の向きを基準として、時刻 t における水平面内の管の回転角を $\phi(t)$ で表すものとする。このとき、 $|\theta| \ll 1$, $|x| \ll a$ の場合に、 $\phi(t) \propto t^n$ と表される。 n の値を求めよ。

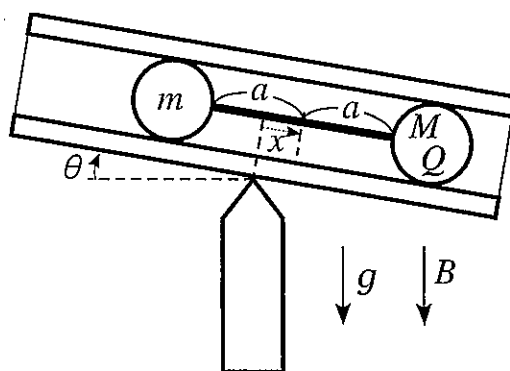


図2: 支柱の上におかれた管の内部の2つの結合された質点。管の質量・太さ・厚みは、いずれも無視できるものとする。

2026 年度 第3問 荷電質点と回転・傾斜する管

出典：R8Master.pdf, 第3問, 冊子5-6頁 (PDF 6-7頁)。問題本文と図は直前の原題ページに掲載。

記号： $m, M > 0$ を2質点の質量, $a > 0$ を棒の半長, x を棒の中心の軸方向座標, $Q > 0$ を右端質点の電荷, $B > 0$ を鉛直下向きの磁束密度とする。

$$s_m = x - a, \quad s_M = x + a, \quad \mathcal{M} = m + M, \quad \delta = M - m.$$

質点は管の横断方向には拘束されるが, 棒全体として管の軸方向に滑る。以下では管からの摩擦や管自体の質量を無視する。

問1：等速回転中の定常位置 x_0

角速度 $\omega > 0$ の水平回転で, 棒の右端の速度は $\mathbf{v}_M = \omega(x+a)\mathbf{e}_\varphi$ である。 $\mathbf{B} = -B\mathbf{e}_z$ よりローレンツ力の管軸方向成分は

$$(Q\mathbf{v}_M \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_r = -QB\omega(x+a).$$

したがって重心に必要な向心加速度を含む軸方向の運動方程式は

$$\mathcal{M}\ddot{x} = \omega^2[m(x-a) + M(x+a)] - QB\omega(x+a). \quad (1)$$

定常位置では $\ddot{x} = 0$ であるから

$$(\mathcal{M}\omega - QB)x_0 + a(\delta\omega - QB) = 0.$$

結論：
$$x_0 = a \frac{QB - \delta\omega}{\mathcal{M}\omega - QB} \quad (\mathcal{M}\omega \neq QB).$$

$\mathcal{M}\omega = QB$ では $m > 0$ なら定数項は $-2m\omega a \neq 0$ となり, 定常解はない。磁場の向きと上から見た回転方向が反転すれば, $QB\omega$ の符号に注意する。

問2：回転軸の周りの角運動量

質点の速度は接線方向に $\omega s_m, \omega s_M$ である。機械的角運動量は

$$L_z = \omega\{m(x_0 - a)^2 + M(x_0 + a)^2\}.$$

結論：
$$|L_z| = \omega[\mathcal{M}(x_0^2 + a^2) + 2\delta ax_0].$$

求めるのは物体の機械的角運動量であり, 外部磁場のベクトルポテンシャルに由来する正準角運動量と同一視しない。

問3：軸方向の微小振動と必要十分条件

式(1)を $x = x_0 + \eta$ として整理すると

$$\ddot{\eta} + \left(\frac{QB\omega}{\mathcal{M}} - \omega^2\right)\eta = 0.$$

$$\text{結論: } \boxed{\mathcal{M}\omega < QB} \iff \boxed{\Omega = \sqrt{\frac{QB\omega}{m+M} - \omega^2}} > 0.$$

この条件は $\omega, Q, B > 0$ のもとで必要十分である。等号なら加速度は零の自由運動であり、厳密な単振動ではない。不等号が逆なら平衡からのずれは指数関数的に増幅する。

問4：水平軸の周りの慣性モーメント

図2と同様に右端が下がる時計回りの傾きを正の角 θ として、管を水平な支点のまわりで傾ける。この回転軸からの距離は両質点について $|x \mp a|$ なので

$$\boxed{I(x) = m(x-a)^2 + M(x+a)^2 = \mathcal{M}(x^2 + a^2) + 2\delta ax.}$$

注意：ここから問6までは $B = 0$ であり、管の水平面内の回転も起こらない。

問5：管の傾斜角 $\theta(t)$ の初期短時間展開

重力ポテンシャルと運動エネルギーは

$$U = -g[\mathcal{M}x + \delta a] \sin \theta, \quad K = \frac{1}{2}\mathcal{M}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I(x)\dot{\theta}^2.$$

角度 θ の Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dt}(I(x)\dot{\theta}) = +g(\mathcal{M}x + \delta a) \cos \theta. \quad (2)$$

初期条件 $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = x(0) = \dot{x}(0) = 0$ と $I(0) = \mathcal{M}a^2$ を代入すると

$$\ddot{\theta}(0) = +\frac{\delta g}{\mathcal{M}a}.$$

$$\text{結論: } \boxed{\theta(t) = +\frac{(M-m)g}{2(m+M)a} t^2 + O(t^6)}.$$

問題文の「 $\cos \theta \simeq 1$ 」「 $a \pm x \simeq a$ 」の近似に対応する。 $M = m$ なら初期条件の対称性から傾きは生じない。

問6：滑り座標 $x(t)$ の短時間展開

x の Euler-Lagrange 方程式は

$$\mathcal{M}\ddot{x} = \frac{1}{2}I'(x)\dot{\theta}^2 + \mathcal{M}g \sin \theta = [\mathcal{M}x + \delta a]\dot{\theta}^2 + \mathcal{M}g \sin \theta. \quad (3)$$

これは傾斜による重力成分に加えて、支点からの距離に応じた遠心項を含む。 $x\dot{\theta}^2$ は高次だが、 $\delta a\dot{\theta}^2$ は最低次の t^2 に寄与する。

$$\dot{\theta} = +\frac{\delta g}{\mathcal{M}a}t + O(t^5), \quad \sin \theta = +\frac{\delta g}{2\mathcal{M}a}t^2 + O(t^6).$$

これを式(3)へ代入すると

$$\ddot{x} = \frac{\delta g^2}{\mathcal{M}a} \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta^2}{\mathcal{M}^2} \right) t^2 + O(t^6).$$

$x(0) = \dot{x}(0) = 0$ を使って二回積分すれば

結論：
$$x(t) = \frac{(M-m)g^2}{12(m+M)a} \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{M-m}{m+M} \right)^2 \right] t^4 + O(t^8).$$

近似で遠心項 $\delta a \dot{\theta}^2$ を落とすと、この係数を誤る。図の右端が重ければ初期短時間で $x > 0$ となる。

問7：磁場があるときの水平面内の回転角の時間べき

管の方位角を ϕ とする。半径方向の座標は $s_i = x \mp a$ で、水平面への射影は $s_i \cos \theta$ である。 B は鉛直下向きであるから、対称ゲージを用いた Lagrangian は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \mathcal{M} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I(x) (\dot{\theta}^2 + \cos^2 \theta \dot{\phi}^2) + g(\mathcal{M}x + \delta a) \sin \theta \\ & - \frac{QB}{2} (x+a)^2 \cos^2 \theta \dot{\phi}. \end{aligned}$$

ϕ が循環座標なので

$$p_\phi = I(x) \cos^2 \theta \dot{\phi} - \frac{QB}{2} (x+a)^2 \cos^2 \theta = \text{一定}.$$

初期静止条件から $p_\phi = -QBa^2/2$ であり、厳密に

$$\dot{\phi} = \frac{QB}{2I(x)} [(x+a)^2 - a^2 \sec^2 \theta]. \quad (4)$$

問5,6の最低次展開では $\theta = O(t^2)$, $x = O(t^4)$ なので、式(4)の括弧内は一般に $O(t^4)$ である。ゆえに

$$\phi(t) \propto t^5 \quad (\text{一般的な非対称質量の場合}).$$

より正確には、上記の展開を代入して

$$\phi(t) = \frac{QB(M-m)m(3m-M)g^2}{60(m+M)^4 a^2} t^5 + O(t^7). \quad (5)$$

例外： $m = M$ では運動自体が開始しない。また $M = 3m$ では式(5)の先頭係数が相殺されるため、 $n = 5$ と断定できず、より高次の Taylor 展開が必要である（この場合の先頭次数は9）。原題は質量が異なることのみを仮定しているので、厳密にはこの例外に言及すべきである。

電磁気学・古典力学 | 年度別問題

2025年度

出題テーマ / 編集上の分類

静電場・Poisson方程式・鏡像法

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第3問

以下の設問に答えよ。ただし解答は MKSA 単位系を用いて記せ。

(A) 静電ポテンシャルが満たすポアソン方程式について考える。

1. 静電ポテンシャルの基本方程式であるポアソン方程式

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

をマクスウェル方程式と静電ポテンシャル ϕ の定義式から導け。ただし、 ρ は電荷密度、 ε_0 は電気定数 (真空の誘電率)、 Δ はラプラシアン ($\Delta = \nabla^2 = (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2 + (\partial/\partial z)^2$) である。

2. ポアソン方程式の解 ϕ_1 が与えられたとき、 $\phi_2 = \phi_1 + f$ が同じポアソン方程式の解となるためには $\Delta f = 0$ でなくてはならない。これに留意して、ある領域 V 内における電荷密度分布 ρ 、その表面 S における静電ポテンシャル $\phi|_S$ が与えられると空間 V 内の静電ポテンシャルが一意に決定することを示せ。

必要ならば以下の数学公式は証明なしに使ってよい。ある領域 V 内で定義されたスカラー関数 g に関して、 V の表面を S として

$$\iiint_V g \Delta g \, dV = \iint_S (g \nabla g) \cdot d\mathbf{S} - \iiint_V (\nabla g)^2 \, dV \quad (2)$$

が成り立つ。

(B) 図 1 のように、半空間 $x \leq 0$ を導体で満たし、接地した場合を考える。導体以外の $x > 0$ は真空とする。

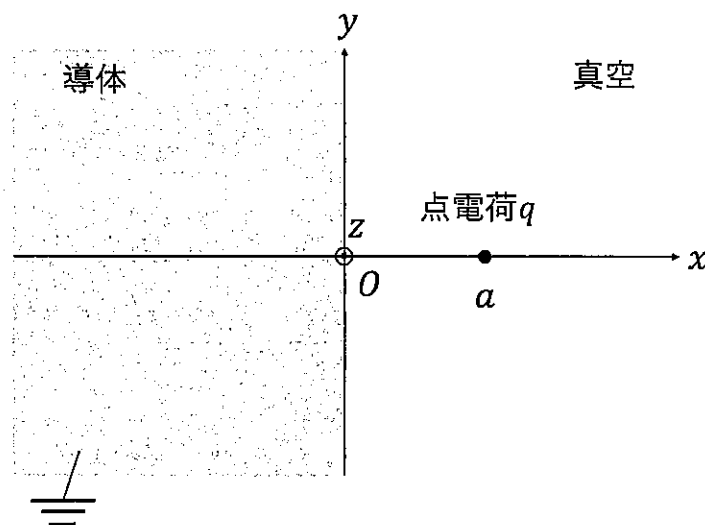


図 1: 導体の前に点電荷を置く。

3. $a = (a, 0, 0)$ の位置に点電荷 q を置いたとき, $x \geq 0$ の位置 r における静電ポテンシャル $\phi(r)$ を求めたい。このとき, $\phi(r)$ が満たすべき微分方程式と境界条件を書け。ただし, $a > 0$ とする。
4. 問 3 の解である静電ポテンシャル $\phi(r)$ を $x \geq 0$ において具体的に表せ。鏡像法を用いて解答して良いが, この場合は, どのような鏡像電荷をどこに置いたのかを記すこと。
さらに, 解答した $\phi(r)$ が問 3 で解答した微分方程式と境界条件を満たしていることを示し, 唯一の解であることを説明せよ。この際, 必要ならば

$$\iiint_V \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dV = -4\pi \quad (3)$$

が原点を含む, 任意の小さな領域 V に対して成り立つことは証明なしで使って良い。ただし, $r = |r|$ である。

(C) 次に, 電気双極子について考えよう。

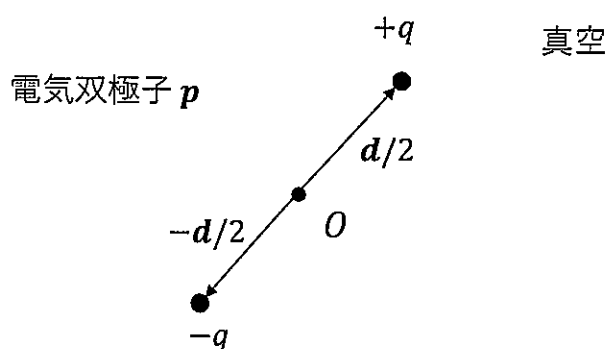


図 2: 真空中の位置 $d/2$ に点電荷 $+q$, 位置 $-d/2$ に点電荷 $-q$ を置く。

5. 図 2 のように位置 $d/2$ に点電荷 $+q$, 位置 $-d/2$ に点電荷 $-q$ を置く。電気双極子モーメント $p = qd$ を一定に保ちつつ $|d| \rightarrow 0$ とすることにより原点 O に置いた電気双極子を定義できる。

全空間を真空とした場合, この電気双極子が位置 r に作る電場 $E(r)$ が以下の式で与えられることを示せ。

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{p} \right) \quad (4)$$

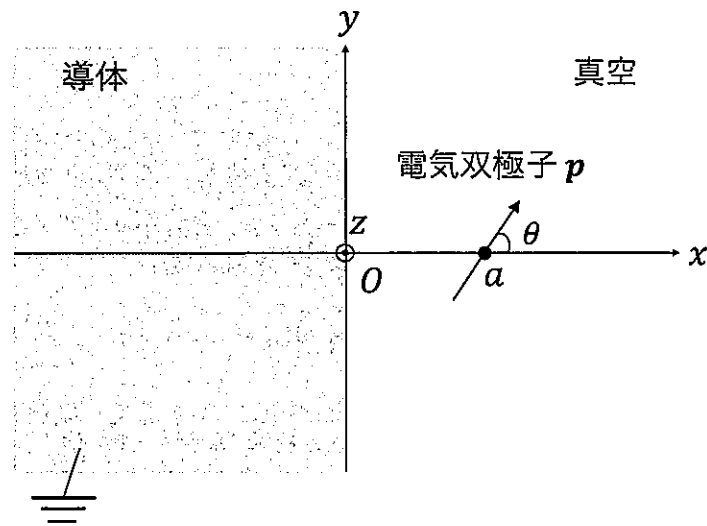


図 3: 導体の前に電気双極子を置く。

図 3 のように、半空間 $x \leq 0$ を導体で満たし、接地し、導体以外の $x > 0$ は真空とする。真空中の位置 $a = (a, 0, 0)$ に場所が固定され、 xy 平面内で自由に回転できる電気双極子を置く。ただし、この電気双極子の電気双極子モーメントは $\mathbf{p} = (p \cos \theta, p \sin \theta, 0)$ と与えられ、電気双極子の回転運動は xy 平面内で考えれば良いものとする。

6. 点 a における電場 $\mathbf{E}$ を求めよ。鏡像法を用いる場合は、どこにどのような鏡像を置くのか記せ。
7. この電気双極子に働く、点 a のまわりのトルク（力のモーメント） N を θ の関数として書き、トルクがゼロになる θ を全て求めよ。
8. 問 7 の状況において $\theta = 0$ から角度をわずかにずらすと、電気双極子は周期 T の微小角振動をした。この電気双極子の回転軸まわりの慣性モーメントを I とする。この振動による電場の変化は十分小さいとして、 I を ϵ_0, p, a, T から必要なものを用いて表せ。

専門科目（物理学）の問題訂正

第3問 (C) 5.

(訂正前) 位置 $\boldsymbol{r}$

→ (訂正後) 原点 $\mathbf{O}$ 以外の位置 $\boldsymbol{r}$

第3問 (C) 6.

(訂正前) 点 $\mathbf{a}$ における

→ (訂正後) 電気双極子 $\boldsymbol{p}$ により導体に誘導される電荷が, 点 $\mathbf{a}$ につくる

2025 年度 第3問 静電ポテンシャル・鏡像法・電気双極子

出典：R7Master.pdf, 第3問 (A)–(C), 冊子 5–7 頁 (PDF 8–10 頁)。PDF 15 頁の公式問題訂正を適用。MKSA 単位系。

(A) 問1：Maxwell 方程式から Poisson 方程式へ

静電場では $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ なので、単連結な領域内で $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ と置ける。Gauss の法則 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ より

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

これは静電場の位置エネルギーに相当する電位の基礎方程式である。

(A) 問2：Dirichlet 境界条件のもとでの一意性

同じ ρ と同じ境界値をもつ二つの解 φ_1, φ_2 に対し $f = \varphi_2 - \varphi_1$ と置けば $\Delta f = 0$ かつ $f|_S = 0$ となる。問題中の Green の第一恒等式により

$$0 = \int_V f \Delta f \, dV = \int_S f \nabla f \cdot d\mathbf{S} - \int_V |\nabla f|^2 \, dV = - \int_V |\nabla f|^2 \, dV.$$

したがって $\nabla f = 0$ であり、連結領域では f は一定。境界条件から

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{in } V.$$

非有界領域では無限遠での適切な減衰条件も必要である。

(B) 問3：接地導体の前の点電荷の境界値問題

領域 $x > 0$ に点電荷 q が $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$ にある場合

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \quad (x > 0), \quad \varphi(0, y, z) = 0, \quad \varphi(\mathbf{r}) \rightarrow 0 \quad (|\mathbf{r}| \rightarrow \infty).$$

領域は $x > 0$ の真空で、金属内 $x \leq 0$ の電位は接地により零となる。

(B) 問4：鏡像電荷、解の確認と一意性

境界面について鏡像の位置 $\mathbf{a}' = (-a, 0, 0)$ に電荷 $-q$ を置いた補助問題を考えると

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}'|} \right), \quad x > 0.$$

$x = 0$ では二つの距離が等しいため $\varphi = 0$ 。また領域 $x > 0$ には本物の点電荷 q だけが存在し、右辺の Laplacian は問3を満たす。無限遠でも $\varphi \rightarrow 0$ 。問2の一意性定理により、これが解である。像電荷は導体外部の電場を再現する数学的手段であり、導体内部に実在する電荷ではない。

(C) 問 5：点双極子が作る電場

$+q$ を $d/2$, $-q$ を $-d/2$ に置き, $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ を固定して $|d| \rightarrow 0$ とする。電位は

$$\varphi_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{d \rightarrow 0} q \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}/2|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}/2|} \right) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

$\nabla(r^{-3}) = -3\mathbf{r}/r^5$ を用いて

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{p} \right), \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{0}.$$

注：公式訂正により設問の対象は原点を除く位置 $\mathbf{r}$ に限定されている。分布としては原点の接触項が追加されるためである。

(C) 問 6：鏡像双極子による誘導電荷の電場

実際の双極子は $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$, $\mathbf{p} = p(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ である。法線方向成分は鏡像で同符号, 導体面に平行な成分は逆符号なので, 鏡像双極子は

$$\mathbf{a}' = (-a, 0, 0), \quad \mathbf{p}' = p(\cos \theta, -\sin \theta, 0).$$

$\mathbf{r} = \mathbf{a}$ と $\mathbf{a}' - \mathbf{a} = -2a\mathbf{e}_x$ に注意し, 像双極子から実双極子までの変位を $2a\mathbf{e}_x$ とすれば

$$\mathbf{E}_{\text{ind}}(\mathbf{a}) = \frac{p}{32\pi\epsilon_0 a^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y).$$

これは導体に誘導された電荷だけが双極子の位置につくる電場であり, 自分自身の発散する自己電場は含めない。公式問題訂正で問 6 がこの意味に修正されている。

(C) 問 7：電気双極子に作用するトルクと静止角

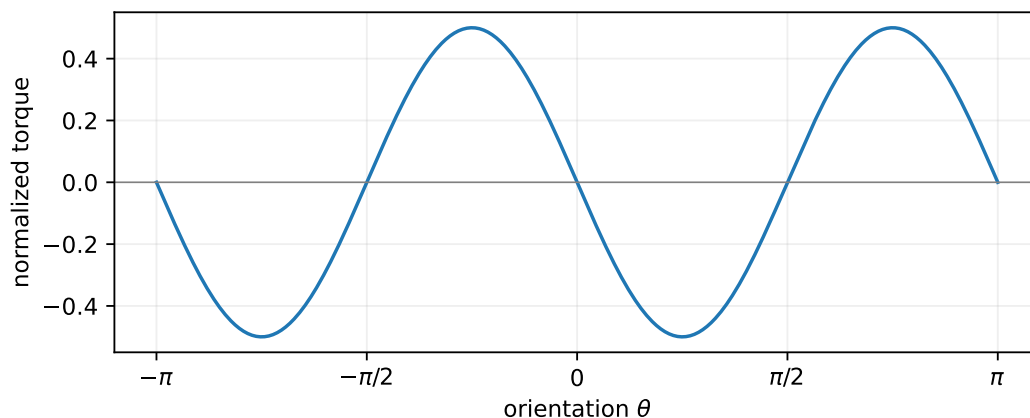
導体からの電場に作用されるトルクは $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\text{ind}}$ だから

$$N_z(\theta) = -\frac{p^2}{32\pi\epsilon_0 a^3} \sin \theta \cos \theta = -\frac{p^2}{64\pi\epsilon_0 a^3} \sin 2\theta.$$

$N_z = 0$ となるすべての向きは

$$\theta = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$\theta = 0, \pi$ は $N'_z(\theta) < 0$ なので安定, $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ は不安定である。



トルクの角度依存。 $\theta = 0$ 近傍では復元トルクが働く。

(C) 問 8：微小角振動の周期から慣性モーメントを求める

$\theta \simeq 0$ では $\sin \theta \cos \theta \simeq \theta$ より

$$I\ddot{\theta} = -\frac{p^2}{32\pi\epsilon_0 a^3}\theta.$$

これを $\ddot{\theta} + \Omega^2\theta = 0$ と比較すると

$$\Omega^2 = \frac{p^2}{32\pi\epsilon_0 I a^3}, \quad T = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

結論： $I = \frac{p^2 T^2}{128\pi^3 \epsilon_0 a^3}.$

次元検査： $p^2/(\epsilon_0 a^3)$ はエネルギーの次元であり、 T^2 を掛けると慣性モーメントの次元 kg m^2 になる。

復習チェック／検算の対象

- 2026 年の $QB\omega$ の符号は、管の回転と下向き磁場に対応しているか。
- 2026 年問 3 の単振動条件は $QB > M\omega$ であって、等号を含まない。
- 2026 年問 6 では $\frac{1}{2}I'(x)\dot{\theta}^2$ を無視していないか。
- 2026 年問 7 では ϕ が循環座標であることと、 $m = M$ および $M = 3m$ という例外を確認する。
- 2025 年問 4 は、境界 $x = 0$ ・点電荷位置・無限遠の三条件を確認する。
- 2025 年問 6 では、像双極子の法線方向／接線方向の符号を逆にしない。
- 2025 年問 7-8 では、導体による誘導電場のみをトルクに使う。

資料の扱いと解答の位置づけ

この PDF の原題は東京大学大学院理学系研究科物理学専攻の提供資料に基づく。2025 年度については冊子末尾の公式訂正も併載した。解答は独自に作成した**非公式解答**であり、大学公表の模範解答ではない。数式の独立検証を行った箇所があっても、外部査読・公式認定を意味しない。

収録範囲：2026 年度第 3 問 7 小問，2025 年度第 3 問 (A)1-2,(B)3-4,(C)5-8（計 8 小問）。2024 年度以前は次巻に収録予定。

電磁気学・古典力学 | 年度別問題

2024年度

出題テーマ / 編集上の分類

Rayleigh散乱・光ピンセット

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第3問

電磁波と荷電粒子の相互作用に関係した2つの物理現象について調べる。以下の設問に答えよ。本問では、簡単のため、荷電粒子は x 軸上のみを運動し、 x 軸上における電場は、位置 x と時刻 t の関数 $E(x, t)$ を用いて $E = (E(x, t), 0, 0)$ と表されるものとする。荷電粒子の速さは光速より十分小さく、磁場の影響は無視できるものとする。また、荷電粒子の大きさは電磁波の波長よりも十分に小さいものとする。

まず、荷電粒子による電磁波の散乱現象(レイリー散乱)を調べる。質量 m 、電荷 q を持つ1つの荷電粒子に、電場による力と、原点からの変位 x に比例した力 $-kx$ (k は正の定数)がはたらくものとする。

1. 荷電粒子の x 軸方向の運動方程式を求めよ。ただし、減衰項は無視できるものとする。
2. 荷電粒子が、 z 軸の負の方向から入射する平面電磁波の中に置かれ、 x 軸方向に一定振幅で振動している場合を考える(図1)。電磁波の電場が、荷電粒子の位置において、角周波数 ω 、および定数 E_0 を用いて $E(x, t) = E_0 \sin(\omega t)$ と表される。このとき、設問1の運動方程式を解き、角周波数 ω で振動する解を求めよ。また、共振の角周波数 ω_0 を k 、 m を用いて示せ。

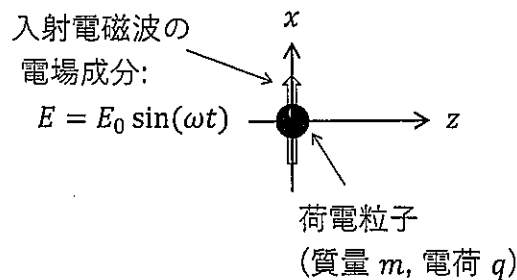


図1: x 軸上を運動する荷電粒子と入射電磁波

3. この荷電粒子の運動によって、電磁波が放射される。この電磁波は、荷電粒子によって、入射電磁波がさまざまな方向に散乱されたものと解釈できる。荷電粒子の加速度ベクトルを $\mathbf{a}$ 、この電磁波の放射方向を表す単位ベクトルを $\mathbf{n}$ とする。このとき、荷電粒子から放射される電磁波強度と、単位面積当たりの入射電磁波強度の比(散乱断面積)は、 $|\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a})|^2$ に比例する。設問2の結果を踏まえて、入射電磁波が赤い光である場合と青い光である場合のどちらが散乱されやすいかを述べよ。また、 x 軸方向、 z 軸方向のどちらに散乱されやすいかを、理由とともに述べよ。ただし、 $\omega \ll \omega_0$ とする。

次に、微小誘電体がレーザー光などの電磁場内にトラップされる現象 (光ピンセット) について考える。 x 軸上の位置 x にある誘電体に電磁波が入射すると、誘電分極によって電気双極子モーメント $p = \alpha E(x, t)$ が生じる (α は正の定数)。この電気双極子と入射電磁波の相互作用によって、電場勾配に依存した力がはたらき、誘電体がレーザー光の中心軸方向に引き込まれる。この現象を調べる。

4. まず、準備として、レーザー光における電場勾配を求める。レーザー光による電場が、 x 軸上で、角周波数 ω 、および定数 E_0, σ を用いて

$$E(x, t) = E_0 \exp \left[-\frac{x^2}{\sigma^2} \right] \sin(\omega t) \quad (1)$$

と表されるものとする。 $x = b$ のまわりでテイラー展開した上で 1 次の展開項までとり、

$$E(x, t) \simeq E_1 \{1 + \beta(x - b)\} \sin(\omega t) \quad (2)$$

と書き表したときの係数 E_1, β を求めよ。

5. 次に、微小誘電体が $x = b$ の位置に置かれている場合を考える (図 2)。入射電磁波によって微小誘電体内に生じた電気双極子モーメントは、2 つの荷電粒子 (電荷 $+q$ と $-q$, それぞれの x 座標 $b + d/2$ と $b - d/2$) で構成された微小双極子によるものと解釈できる。このとき、その電気双極子モーメントは、 $p = qd$ となる。入射電磁波 (レーザー光) の電場が式 (2) で表され、2 つの荷電粒子に対して、この電場による力がそれぞれ独立に働くと考えた場合、それらの力の和を $E_1, \beta, q, d, \omega, t$ を用いて表せ。

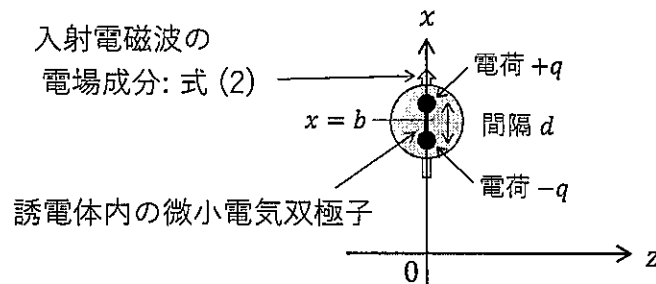


図 2: 入射電磁波による誘電分極

6. 設問 5 の結果が、微小双極子に働く力となる。この力を、 $E_1, \alpha, \beta, \omega, t$ を用いて表せ。その上で、レーザー光の中心軸付近に誘電体が引き込まれることを説明せよ。ただし、 $|\beta d| \ll 1$ として良い。
7. 以上とは別の考察として、光ピンセットの現象を解釈する。電場のエネルギーに着目することにより、誘電体がレーザー光の中心軸付近に引き込まれる理由を簡潔に説明せよ。

2024 年度 第 3 問：Rayleigh 散乱と光ピンセット

原題：R6Master.pdf, PDF 8–9 頁（冊子 5–6 頁）。設問文・図は本解答の直前に配置した原題の画像を参照。

外部場は x 方向に偏光し、荷電粒子の運動は x 軸上だけとする。散乱の前半ではばね定数 $k > 0$, 電荷 q , 質量 m を用い、 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ と定義する。減衰と磁場は無視する。問 2 は厳密共鳴 $\omega = \omega_0$ を避けた定常解を求める設問である。

問 1：荷電粒子の運動方程式

復元力は $-kx$ 、電場による力は $qE(x, t)$ であるから、Newton 方程式は

$$m\ddot{x} + kx = qE(x, t). \quad (1)$$

問 2：一様な正弦波場の強制振動

$E(x, t) = E_0 \sin \omega t$ として $x(t) = X \sin \omega t$ を代入すると $(k - m\omega^2)X = qE_0$ である。ゆえに

$$x_p(t) = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2)$$

初期条件を指定されていないので、一般解には自由振動 $C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t)$ を足せる。 $\omega = \omega_0$ では減衰を無視したモデルの定常正弦解が存在しない（共鳴で振幅が増大）。

問 3：Rayleigh 散乱の色と角度依存

式 (2) から加速度振幅は $|\ddot{x}|_{\text{amp}} = |qE_0\omega^2/[m(\omega_0^2 - \omega^2)]|$ 。原題で与えられた放射強度の角度因子は

$$I(\mathbf{n}) \propto |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a})|^2 = |\mathbf{a}|^2 [1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x)^2],$$

となる（ $\mathbf{n}$ は観測方向の単位ベクトル）。同じ入射電場強度で比較すると

$$I \propto \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} [1 - n_x^2]; \quad \omega \ll \omega_0 : I \propto \omega^4.$$

可視光がともに共鳴から十分離れた範囲では、短波長の青い光の方が赤い光より強く散乱される。 $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_x$ では放射されず、 x に垂直な方向（例えば $\pm z$ ）で最大である。

問 4：Gaussian 電場の局所勾配

問題の場は $E(x, t) = E_0 \exp(-x^2/\sigma^2) \sin \omega t$ である。 $x = b$ において

$$E_1 = E_0 \exp(-b^2/\sigma^2), \quad \left. \frac{\partial E_{\text{amp}}}{\partial x} \right|_b = -\frac{2b}{\sigma^2} E_1.$$

$E(x, t) \simeq E_1 [1 + \beta(x - b)] \sin \omega t$ と比較して

$$E_1 = E_0 e^{-b^2/\sigma^2}, \quad \beta = -\frac{2b}{\sigma^2}. \quad (3)$$

問5：微小双極子に働く合力

$x_{\pm} = b \pm d/2$ の電荷 $\pm q$ にはそれぞれ $\pm qE(x_{\pm}, t)$ が作用する。

$$\begin{aligned} F_x(t) &= q\{E(b + d/2, t) - E(b - d/2, t)\} \\ &= qE_1\beta d \sin \omega t + O(d^3) = \boxed{p\beta E_1 \sin \omega t}, \quad p = qd. \end{aligned}$$

一様場の寄与は相殺される。極性と電場方向を混同せず、ここでの F_x は原題の $+q$ が x の正方向側にある配置で定義した。

問6：誘起双極子の光ピンセット力

原題の線形分極関係 $p(t) = \alpha E(b, t) = \alpha E_1 \sin \omega t$ を式 (5) の合力に代入すると

$$\boxed{F_x(t) = \alpha\beta E_1^2 \sin^2(\omega t)}, \quad \boxed{\overline{F_x} = \frac{1}{2}\alpha\beta E_1^2}.$$

中心から右側 $b > 0$ では $\beta < 0$ なので平均力は左向き、左側 $b < 0$ では $\beta > 0$ なので右向き。したがって微小誘電体は $x = 0$ の高強度領域に引き寄せられる。 $|\beta d| \ll 1$ は Taylor 展開の正当化に必要。

問7：電場のエネルギーによる独立説明

瞬間的な誘起双極子を一様場中の永久双極子と同一視せず、分極仕事 $dU = -p(E)dE$ を積分すると

$$U_{\text{ind}}(x, t) = - \int_0^{E(x, t)} \alpha E' dE' = -\frac{1}{2}\alpha E(x, t)^2.$$

したがって時間平均ポテンシャル $\overline{U} = -\alpha E_{\text{amp}}^2(x)/4$ 、平均力は

$$\boxed{\overline{F_x} = -\partial_x \overline{U} = \frac{\alpha}{4} \frac{dE_{\text{amp}}^2}{dx} = -\frac{\alpha x}{\sigma^2} E_0^2 e^{-2x^2/\sigma^2}}.$$

$\alpha > 0$ では電場振幅の大きい位置ほど誘起双極子を作る自由エネルギーが低く、中心へ引かれる。これは問6の局所結果 $\overline{F_x} = \alpha\beta E_1^2/2$ と一致する。光学的吸収・散乱による放射圧は今回の簡略化モデルの対象外。

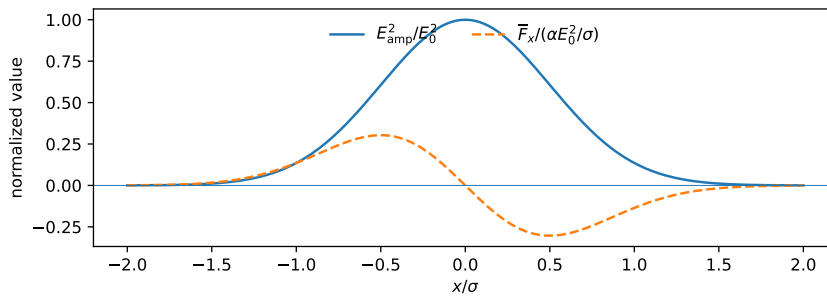


図1 Gaussian 電場の強度と、 $\alpha > 0$ の場合の時間平均勾配力。縦軸は適当な共通規格化。

電磁気学・古典力学 | 年度別問題

2023 年度

出題テーマ / 編集上の分類

双極子・四重極子・相互作用

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第3問

電磁気における多極子は様々な物理系で登場する。一般に多極子は物質の構造や物性に影響を与える。以下では電気定数を ϵ_0 とし、座標はすべてデカルト座標系で表記する。観測点の位置はベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ で表し、 $r = |\mathbf{r}|$ とする。図はすべて xy 平面 ($z = 0$) 上の様子を表している。

図 1(a) のように座標 $(0, \frac{d}{2}, 0)$ に正の点電荷 e 、座標 $(0, -\frac{d}{2}, 0)$ に負の点電荷 $-e$ を配置した。 d は正の定数である。このような電気双極子を、図 1(b) のように負電荷から正電荷に向く白抜き矢印で表す。図 1(c) に示すように、 y 軸の正方向を向いた電気双極子を原点 O に配置し、 x 軸の正方向に対して角度 θ をなす向きの電気双極子を座標 $(0, a, 0)$ に配置した。 a は正の定数である。以下の設問 2 から 5 では、 d は r, a より十分に小さいとして、最も支配的な項のみ考慮すること。

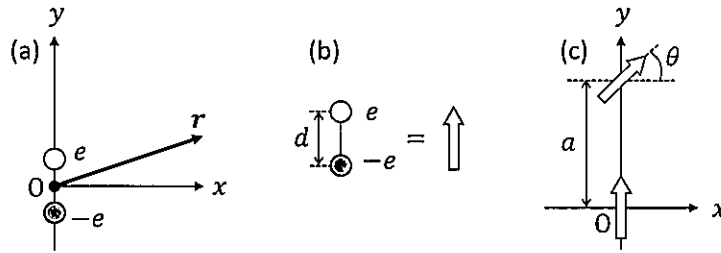


図 1: 電気双極子の配置図。

1. $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ を $\frac{r_0}{r}$ の 1 次まで展開せよ。ただし、 $r_0 = |\mathbf{r}_0|$ とし、 $r_0 \ll r$ であるとする。
2. 図 1(a) に示した系の $\mathbf{r}$ における静電ポテンシャルを、 $\frac{d}{r}$ について展開して求めよ。ただし、無限遠における静電ポテンシャルの値をゼロとする。
3. 設問 2 の結果を使って、図 1(a) に示した系の $\mathbf{r}$ における電場の x, y, z 成分を求めよ。
4. 図 1(c) に示した系の静電エネルギー U を求めよ。ただし、位置 $\mathbf{r}$ に配置された電気双極子モーメント $\mathbf{p}$ に電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ が作用したときの静電エネルギー U は以下の式で書ける。

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

ここで、負電荷 $-e$ から正電荷 e までのベクトルを $\mathbf{d}$ として、 $\mathbf{p} = e\mathbf{d}$ で与えられ、 $|\mathbf{d}| \ll r$ であるものとする。

5. 図 1(c) に示した系の静電エネルギーが最も小さくなるような角度 θ の値を答えよ。

多原子分子では電荷分布に空間的偏りが生じることがある。例えば、2 原子分子の電荷分布を模式的に表したものとして、図 2(a) のような点電荷の分布を考える。原点 O に正電荷 $2e$ 、座標

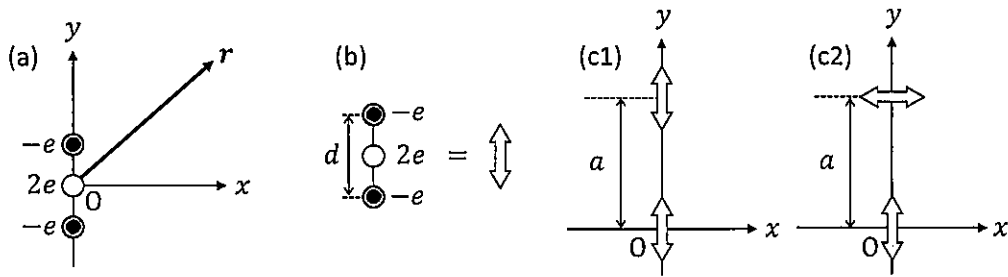


図 2: 電気四極子の配置図。

$(0, \frac{d}{2}, 0)$ と $(0, -\frac{d}{2}, 0)$ に負電荷 $-e$ を配置した。 d は正の定数である。このような電荷分布は電気四極子をなし、電気四極子を図 2(b) のように電荷の並びに沿って白抜き双方向矢印で表す。

一般的な電荷分布 $\rho(\mathbf{r}')$ に対して観測点の位置が電荷分布の広がりより十分に遠方にある場合、位置 $\mathbf{r}$ における静電ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r})$ が

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i p_i}{r^3} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{x_i x_j Q_{ij}}{r^5} \right) \\ q &= \int \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \\ p_i &= \int x'_i \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \\ Q_{ij} &= \frac{1}{2} \int \left(3x'_i x'_j - (r')^2 \delta_{ij} \right) \rho(\mathbf{r}') d^3 r'\end{aligned}\tag{1}$$

と近似できることを用い、以下の設問 6 から 8 に答えよ。ただし、下付きの添字 1, 2, 3 はそれぞれ物理量の x, y, z 成分を表し、 $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, $\mathbf{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3) = (x', y', z')$, $r' = |\mathbf{r}'|$ とする。また、 δ_{ij} は $i = j$ のときに 1, それ以外は 0 となる記号 (クロネッカーのデルタ) を表し、 $\int d^3 r'$ は全空間にわたる積分である。

6. 式 (1) を使って、図 2(a) に示した系の電荷 q , 電気双極子モーメントの成分 p_i ($i = 1, 2, 3$), 電気四極子モーメントの成分 Q_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) を求めよ。
7. 式 (1) と設問 6 の結果を使って、図 2(a) に示した系の $\mathbf{r}$ における静電ポテンシャルおよび電場の x, y, z 成分を求めよ。
8. 図 2(c1) の系では、 y 軸に沿って電気四極子を原点 O と座標 $(0, a, 0)$ に配置した。一方、図 2(c2) の系では、 y 軸に沿って電気四極子を原点 O に配置し、 x 軸に沿って電気四極子を座標 $(0, a, 0)$ に配置した。 a は正の定数である。図 2(c1) と図 2(c2) の系の静電エネルギー U をそれぞれ求めよ。また、図 2(c1) と図 2(c2) のどちらの系の静電エネルギーが小さいかを答えよ。ただし、位置 $\mathbf{r}$ に配置した Q_{ij} を持つ電気四極子に電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (E_1(\mathbf{r}), E_2(\mathbf{r}), E_3(\mathbf{r}))$ が作用したときの静電エネルギー U は以下の式で書ける。

$$U = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 Q_{ij} \frac{\partial E_j(\mathbf{r})}{\partial x_i}$$

2023 年度 第3問：双極子・四重極子の多重極展開

原題：R5master.pdf, PDF 8–9 頁（冊子 5–6 頁）。設問文・図は本解答の直前に配置した原題の画像を参照。

以下 $K = 1/(4\pi\epsilon_0)$ と略す。 x, y, z は観測位置、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 、 $d \ll r, a$ とする。双極子・四重極子のエネルギーは原題で指定された定義に従う。

問1：クーロン核の一次展開

$\mathbf{r}_0$ が $\mathbf{r}$ より十分小さいとき

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = r \sqrt{1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r^2} + \frac{r_0^2}{r^2}} = r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r} + O(r_0^2/r),$$

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r^3} + O(r_0^2/r^3)}.$$

問題の「 r_0/r の1次」は、長さ自体については上段の式、後のポテンシャル計算にはその逆数を用いる。

問2： y 方向の双極子のポテンシャル

位置 $(0, \pm d/2, 0)$ の電荷を $\pm e$ とすると

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= Ke \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{d}{2}\mathbf{e}_y|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{d}{2}\mathbf{e}_y|} \right) \\ &= Ke \frac{dy}{r^3} + O(d^3/r^4). \end{aligned}$$

ゆえに双極子モーメント $\mathbf{p} = ed\mathbf{e}_y$ として

$$\boxed{\varphi(\mathbf{r}) = K \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = K \frac{edy}{r^3}}. \quad (4)$$

問3：双極子電場の成分

$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ と $\partial_i(y/r^3) = \delta_{iy}/r^3 - 3yx_i/r^5$ より

$$\boxed{E_x = K \frac{3edxy}{r^5}}, \quad \boxed{E_y = Ked \left(\frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right)}, \quad \boxed{E_z = K \frac{3edyz}{r^5}}.$$

まとめれば $\mathbf{E} = K[3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}]/r^3$ となる。

問4： $y = a$ に置いた双極子の相互作用エネルギー

軸上 $(0, a, 0)$ の電場は式 (4) より $\mathbf{E}(0, a, 0) = (0, 2Ked/a^3, 0)$ 。もう一つの双極子を $\mathbf{p}' = ed(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ とすると

$$\boxed{U(\theta) = -\mathbf{p}' \cdot \mathbf{E} = -\frac{2Ke^2d^2}{a^3} \sin\theta}. \quad (5)$$

問5：安定配向

$e, d, a > 0$ ゆえ、式 (5) を最小化するには $\sin\theta = 1$ が必要。

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})}.$$

$\theta = -\pi/2$ は極大、すなわち不安定な向き。

問6：四重極子モーメントの計算

原点に $+2e$ 、 $y = \pm d/2$ に各 $-e$ を配置する。総電荷 $q_{\text{tot}} = 0$ 、双極子モーメント $\mathbf{p} = 0$ 。原題の規約

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \sum_s q_s (3x_{s,i}x_{s,j} - r_s^2 \delta_{ij})$$

に従い、 $S = \sum_s q_s y_s^2 = -ed^2/2$ を計算すると

$$\boxed{Q_{xx} = Q_{zz} = \frac{ed^2}{4}, \quad Q_{yy} = -\frac{ed^2}{2}, \quad Q_{ij} = 0 \ (i \neq j)}.$$

以降 $C = ed^2/4$ とおけば $Q = C \text{diag}(1, -2, 1)$ 。確かに $\text{tr } Q = 0$ 。

問7：四重極子のポテンシャルと電場

与えられた展開式は $q = \mathbf{p} = 0$ なので

$$\boxed{\varphi_Q(\mathbf{r}) = K \frac{\sum_{ij} x_i x_j Q_{ij}}{r^5} = KC \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}}. \quad (6)$$

$\mathbf{E}_Q = -\nabla \varphi_Q$ を計算して

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= \frac{3KC}{r^7} x(r^2 - 5y^2), \\ E_y &= \frac{3KC}{r^7} y(3r^2 - 5y^2), \\ E_z &= \frac{3KC}{r^7} z(r^2 - 5y^2). \end{aligned}} \quad (7)$$

すべて $O(r^{-4})$ で減衰する。特に正の y 軸上で $E_y = -6KC/a^4$ となり、原点の四重極子による電場は原点方向を向く。

問8：平行配置と垂直配置の四重極子相互作用

原題の相互作用エネルギーを用いる：

$$U = -\frac{1}{3} \sum_{ij} Q'_{ij} \partial_i E_j(0, a, 0).$$

式(6)の2階微分から、 $\mathbf{r} = (0, a, 0)$ で

$$(\partial_i E_j) = \frac{KC}{a^5} \text{diag}(-12, 24, -12), \quad Q^{(y)} = C \text{diag}(1, -2, 1).$$

配置(c1)：上側の四重極子も y 方向なので $Q' = Q^{(y)}$ 。

$$U_{\parallel} = -\frac{1}{3} \frac{KC^2}{a^5} (-12 - 48 - 12) = \boxed{\frac{24KC^2}{a^5} = \frac{3Ke^2d^4}{2a^5}} > 0.$$

配置(c2)：上側の四重極子は x 方向を向くので $Q' = C \text{diag}(-2, 1, 1)$ である。

$$U_{\perp} = -\frac{1}{3} \frac{KC^2}{a^5} (24 + 24 - 12) = \boxed{-\frac{12KC^2}{a^5} = -\frac{3Ke^2d^4}{4a^5}} < 0.$$

結果： $\boxed{U_{\perp} < U_{\parallel}}$ 。この近似では(c2)の方がエネルギーが低く、四重極子が相対的に安定な配置をとる。

検算記録・問題と解答の利用上の注意

1. 双極子電場： $\varphi = Kedy/r^3$ を三変数で微分した結果が問3の全成分と一致することを記号計算で確認。
2. 四重極子電場：式(6)の勾配が式(7)と一致し、真空の点 $r > 0$ で $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ を満たすことを記号計算で確認。
3. 配置エネルギー：連続場の四重極子規約と、原点からの距離が d だけ異なる有限電荷配置の直接 Coulomb 和を小さい d/a で比較する検算を付属スクリプトで実施。
4. Rayleigh 散乱：加速度の ω^2 依存と、放射強度の加速度二乗を組み合わせると ω^4 則を導出。共鳴近傍、減衰が無視できない場合には適用不可。
5. 光ピンセット：問5・問6の局所 Taylor 展開と問7の誘起双極子のエネルギー勾配が一致することを検証。

この冊子は配布された東京大学大学院理物の原題に基づく非公式独立解答です。大学の採点基準・公式解答ではありません。原題は画像をそのまま掲載し、加筆した解説と区別しています。

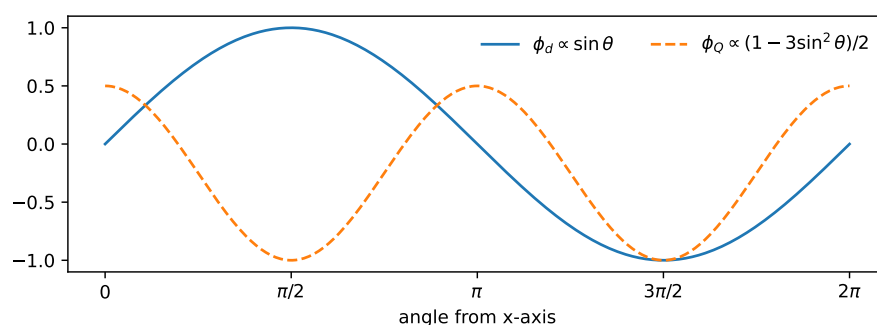


図2 双極子・四重極子の無次元ポテンシャルの角度依存（半径一定）。四重極子は y 方向を対称軸に取る。

電磁気学・古典力学 | 年度別問題

2022 年度

出題テーマ / 編集上の分類

電磁波・Fresnel係数・全反射

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第3問

3次元空間において、 $z < 0$ の領域から、平面電磁波が入射する場合について考える。入射した電磁波は、 $z < 0$ の領域とは誘電率が異なる $z > 0$ の領域との境界($z = 0$)において、透過および反射する。電磁波の速さは、 $z < 0$ で v 、 $z > 0$ で $2v$ であるとし、透磁率は $z < 0$ と $z > 0$ で等しいとする。Maxwell方程式は、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

と書ける。ここで $\mathbf{E}$ は電場、 $\mathbf{B}$ は磁束密度、 ε は誘電率、 μ は透磁率を表す。また、式(1)と式(2)より、境界面において $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ の接線成分が連続であることが導かれる。必要ならば、任意のベクトル $\mathbf{V}$ に対して $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$ であることを用いてよい。

はじめに、平面電磁波が境界面に垂直に入射する場合を考える。入射波の電場は、その振幅 E_0 を用いて、 $\mathbf{E}_1 = (0, E_0 \cos(kz - \omega t), 0)$ と書けるものとする。ここで、 k と ω は、いずれも正の定数であり、 $\omega = vk$ である。

1. 入射波の磁束密度は、定ベクトル $\mathbf{B}_0$ を用いて、 $\mathbf{B}_1 = B_0 \cos(kz - \omega t)$ と書ける。式(1)を満たすような $\mathbf{B}_0$ を、 E_0 と v を用いて表せ。
2. $z > 0$ における誘電率は、 $z < 0$ における誘電率の何倍か。
3. 透過波の電場は $\mathbf{E}_2 = (0, T \cos(kz/2 - \omega t), 0)$ 、反射波の電場は $\mathbf{E}_3 = (0, R \cos(-kz - \omega t), 0)$ と書くことができる。ここで、 T と R は、 z と t に依らない定数である。境界面において $\mathbf{E}$ および $\mathbf{B}$ (または $\partial \mathbf{B} / \partial t$)の接線成分が連続であることを用いて、 T/E_0 を求めよ。

次に、入射波の電場が $\mathbf{E}_1 = (0, E_0 \cos(qx + 2qz - \omega t), 0)$ と書ける場合を考える。ここで、 q は正の定数である。透過波の電場を、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を用いて、 $\mathbf{E}_2 = (0, T \cos(\mathbf{r} \cdot \mathbf{Q} - \omega t), 0)$ と書く。

4. $\mathbf{Q}$ を q を用いて表せ。
5. T の E_0 に対する比 T/E_0 を求めよ。

最後に、入射波の電場が $\mathbf{E}_1 = (0, E_0 \cos(Kx + Kz - \omega t), 0)$ と書ける場合を考える。ここで、 K は正の定数である。この場合、電磁波は全反射するが、 $z > 0$ の領域にもある程度電磁波が浸透する。

6. $z > 0$ の領域での電場の振幅を z の関数として書け。

2022 年度 第3問：誘電体界面と電磁波の反射・屈折

原題：R4master.pdf, PDF 8 頁（問題冊子 5 頁）。以降の問 1–6 は当該原題の番号と対応する。

設定：領域 $z < 0$ の速さ $v_1 = v$, $z > 0$ の速さ $v_2 = 2v$, 透磁率は共通値 μ とする。誘電率をそれぞれ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ と記す。界面に自由電荷・自由面電流は存在しない。電場は常に y 方向の TE 偏光である。

問 1：入射磁束密度の方向と振幅

入射電場 $\mathbf{E}_1 = (0, E_0 \cos(kz - \omega t), 0)$ に Faraday の法則を使う。

$$(\nabla \times \mathbf{E}_1)_x = -\partial_z E_y = kE_0 \sin(kz - \omega t) = -\partial_t B_x.$$

$B_x = B_{0x} \cos(kz - \omega t)$ を代入すると $-\partial_t B_x = -\omega B_{0x} \sin(kz - \omega t)$ なので, $B_{0x} = -kE_0/\omega$. したがって

$$\boxed{\mathbf{B}_0 = (-E_0/v, 0, 0)} \quad (\omega = vk).$$

$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1$ は $+z$ 方向となる。これは入射波の進行方向と一致する。

問 2：二つの媒質の誘電率の比

電磁波の位相速度は $v_j = (\mu\varepsilon_j)^{-1/2}$. よって

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

問 3：垂直入射の透過振幅

反射電場を $E_y = R \cos(-kz - \omega t)$, 透過電場を $E_y = T \cos(kz/2 - \omega t)$ とする。界面における接線電場 E_y と接線磁場 $H_x = B_x/\mu$ の連続性は

$$E_0 + R = T, \quad -\frac{E_0}{\mu v} + \frac{R}{\mu v} = -\frac{T}{2\mu v}.$$

したがって $E_0 - R = T/2$. 連立して

$$\boxed{\frac{T}{E_0} = \frac{4}{3}}, \quad \boxed{\frac{R}{E_0} = \frac{1}{3}}.$$

検算：時間平均エネルギー流は $\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon/\mu} E_{\text{amp}}^2$. 入射を 1 とした反射率 $1/9$, 透過率 $(1/2)(16/9) = 8/9$ で和は 1。

問 4：斜入射時の透過波数ベクトル

入射波 $\cos(qx + 2qz - \omega t)$ の波数の大きさは $\sqrt{5}q$. 透過側では波数の大きさが半分なので $|\mathbf{Q}| = \sqrt{5}q/2$. 界面で x 方向の位相が一致することより $Q_x = q$, $Q_y = 0$ であり, $+z$ へ進む波を選ぶと

$$Q_z = \sqrt{(\sqrt{5}q/2)^2 - q^2} = \frac{q}{2}, \quad \boxed{\mathbf{Q} = (q, 0, q/2)}.$$

問 5：斜入射の透過振幅比

TE 偏光なので接線 H_x は $-k_z E_y/(\omega\mu)$ で与えられる。反射波の z 波数は $-2q$. したがって

$$E_0 + R = T, \quad (2q)(E_0 - R) = (q/2)T.$$

$R = T - E_0$ を代入して $4qE_0 = (5q/2)T$ を得る。よって

$$\boxed{T/E_0 = 8/5}, \quad \boxed{R/E_0 = 3/5}.$$

問6：全反射時の透過側電場振幅

入射波数の成分は $(K, 0, K)$ で $\omega/v = \sqrt{2}K$ 。透過側の $|\mathbf{k}_2| = K/\sqrt{2}$ は接線成分 K より小さく,

$$Q_z = i\kappa, \quad \kappa = \sqrt{K^2 - K^2/2} = K/\sqrt{2}.$$

$z > 0$ 側の複素電場を $\tilde{E}_y = tE_0 e^{iKx - \kappa z - i\omega t}$ とすると, 界面条件より

$$t = \frac{2k_{z1}}{k_{z1} + Q_z} = \frac{2K}{K + i\kappa} = \frac{2}{1 + i/\sqrt{2}}.$$

したがって実電場の局所振幅（時間に関する余弦の係数）は

$$E_{\text{amp}}(z) = \sqrt{\frac{8}{3}} E_0 \exp\left(-\frac{Kz}{\sqrt{2}}\right) \quad (z > 0).$$

位相は $Kx - \omega t - \arctan(1/\sqrt{2})$ である。 z 方向に減衰する場であり, 平均の法線方向エネルギー流は零となる。

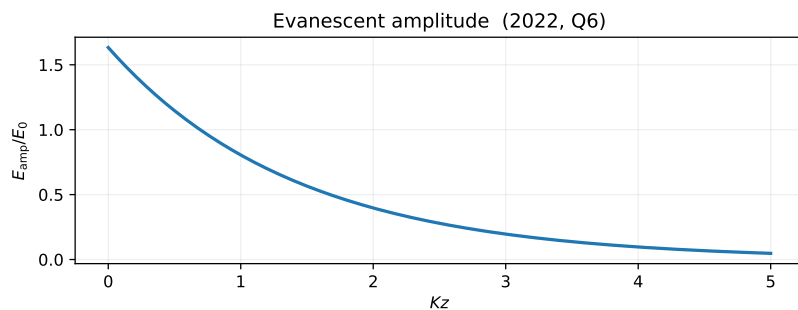


図1 2022年度問3・問6：入射・反射・透過振幅と、全反射時のエバネッセント場の規格化した振幅。

電磁気学・古典力学 | 年度別問題

2020 年度

出題テーマ / 編集上の分類

同軸ケーブル・TEMモード

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第3問

同軸ケーブル中の電磁波の伝搬について考える。同軸ケーブルは図1に示すように、半径 a の円柱芯線と中心軸を同じにして外側にある内半径 b の円筒状導体から構成されている。円柱と円筒の間の空間は、誘電率 ϵ 、透磁率 μ の絶縁体で満たされているとする。外側の円筒の厚さは十分薄く、同軸ケーブルの長さは半径に比べて十分長く、かつ直線状であるとする。芯線および円筒状導体の電気抵抗は無視できるものとする。

同軸ケーブルに沿った方向を z 軸とし、電場、磁場ともに z 軸に平行な成分を持たない軸対称な伝搬モード（以下、TEMモードと呼ぶ）について考える。 ϵ と μ は定数とする。絶縁体中の電磁波は Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4)$$

に従う。ここで $\mathbf{E}$ は電場、 $\mathbf{B}$ は磁束密度である。以下、図1に示す円筒座標系 (r, θ, z) で考えることとする。任意の関数 f 、ベクトル $\mathbf{A}$ に対する円筒座標系での勾配、発散、回転はそれぞれ

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

で与えられる。 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ はそれぞれ r, θ, z 方向の単位ベクトルである。以下の設問に答えよ。

1. この TEM モードの磁束密度の r 方向成分 B_r 、電場の θ 方向成分 E_θ はともにゼロとなることを示せ。
2. $E_r(r, z, t)$ に対する波動方程式を求めよ。
3. z 方向の波数を k 、角周波数を ω として、電場および磁束密度を複素表示でそれぞれ

$$E_r(r, z, t) = \mathcal{E}(r) e^{ikz - i\omega t}, \quad B_\theta(r, z, t) = \mathcal{B}(r) e^{ikz - i\omega t}$$

と記述する。 $\mathcal{E}(r=a) = E_0$ としたとき、 $\mathcal{E}(r)$ を求めよ。

4. 同軸ケーブルを伝搬する電磁波の位相速度を求めよ。
5. 同軸ケーブル断面を通過する単位時間あたりの電磁波のエネルギーを求めよ。
6. 位置 z 、時刻 t における円筒状導体に対する芯線の電圧 $V(z, t)$ を求めよ。

7. 設問 6 で求めた電圧 V と、芯線を通る電流 I の比 $V(z, t)/I(z, t)$ は特性インピーダンス Z_0 と呼ばれる。 Z_0 を求めよ。

次に、同軸ケーブルを伝搬するパルスを考える。その電圧を $V(z, t)$ で表す。以下、 ϵ および μ は周波数の関数であり、 ω は波数 k の関数とする。 $V(z, t)$ の複素表示を波数 k の波の重ね合わせとして

$$V(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(k) e^{ikz - i\omega(k)t} dk$$

と表す。

8. $v(k)$ がある波数 k_0 を中心とする狭い範囲でのみ 0 でない値をとり、 $\omega(k)$ が定数 A を用いて

$$\omega(k) = \omega(k_0) + A(k - k_0)$$

と近似できるとき、複素表示での電圧パルスの振幅 $|V(z, t)|$ は、その波形を変えずに同軸ケーブル中を伝搬することを示せ。

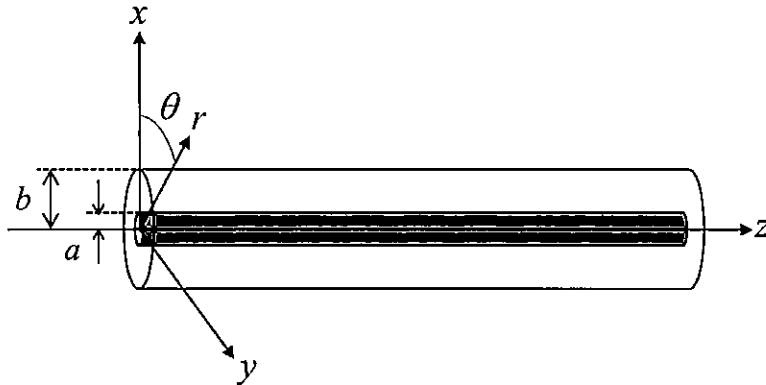


図 1:

2020 年度 第3問：同軸ケーブルの TEM モード

原題：R2phys.pdf, PDF 8-9 頁（問題冊子 5-6 頁）。導体芯半径 a , 外導体内半径 b ($0 < a < b$), 誘電率 ε , 透磁率 μ 。導体は完全導体で, $a < r < b$ は均一な絶縁体。

問1：ゼロになる電場・磁場成分

軸対称 TEM モードでは $E_z = B_z = 0$, $\partial_\theta = 0$ 。 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ と導体表面の接線電場 $E_\theta(a) = E_\theta(b) = 0$ から $E_\theta = 0$ 。また $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ により $\partial_r(rB_r) = 0$, 境界の法線磁束が零であることから $B_r = 0$ 。結局

$$\boxed{\mathbf{E} = E_r(r, z, t)\mathbf{e}_r}, \quad \boxed{\mathbf{B} = B_\theta(r, z, t)\mathbf{e}_\theta}.$$

問2：電場の波動方程式

Faraday の法則と Ampère-Maxwell の法則を円筒座標で成分表示すると

$$\partial_z E_r = -\partial_t B_\theta, \quad -\partial_z B_\theta = \mu\varepsilon \partial_t E_r.$$

両式を組み合わせて

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} = 0}.$$

さらに Gauss の法則 $\partial_r(rE_r) = 0$ から, 半径方向の形は $E_r \propto 1/r$ に固定される。

問3：複素振幅 $\mathcal{E}(r)$ と $\mathcal{B}(r)$

$E_r = \mathcal{E}(r)e^{i(kz-\omega t)}$, $B_\theta = \mathcal{B}(r)e^{i(kz-\omega t)}$ とおく。Gauss の法則と $\mathcal{E}(a) = E_0$ から

$$\boxed{\mathcal{E}(r) = \frac{aE_0}{r}}.$$

Faraday の法則 $ik\mathcal{E} = i\omega\mathcal{B}$ より

$$\boxed{\mathcal{B}(r) = \frac{k}{\omega} \frac{aE_0}{r} = \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{aE_0}{r}}, \quad k^2 = \mu\varepsilon\omega^2.$$

磁場は $+\mathbf{e}_\theta$ 方向で, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ は $+z$ 方向。

問4：位相速度

分散関係 $k^2 = \mu\varepsilon\omega^2$ なので

$$\boxed{v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}.$$

均一な誘電体で ε, μ が周波数に依存しなければ, 群速度も同じである。

問5：単位時間に輸送される平均エネルギー

実際の電場を $E_r = (aE_0/r) \cos(kz - \omega t)$ とする。Poynting ベクトルの z 成分は $S_z = E_r B_\theta / \mu$ であり, $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$ を用いて

$$\begin{aligned} P &= \int_a^b \frac{1}{2\mu} \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{a^2 E_0^2}{r^2} (2\pi r \, dr) \\ &= \boxed{\pi a^2 E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \ln \frac{b}{a}}. \end{aligned}$$

P は時間平均の輸送エネルギー毎秒（単位 W）である。瞬間値なら上式の $\frac{1}{2}$ を取り去り $\cos^2(kz - \omega t)$ を掛ける。

問 6：芯線と外導体の電圧

芯線の電位を外導体に対して正にとり，半径方向に積分する。

$$V(z, t) = - \int_b^a E_r(r, z, t) dr = \boxed{aE_0 \ln \frac{b}{a} \cos(kz - \omega t)}.$$

問 7：特性インピーダンス

Ampère の法則を軸を囲む円周へ適用して $2\pi r H_\theta = I(z, t)$ 。したがって

$$I(z, t) = \frac{2\pi r B_\theta}{\mu} = 2\pi a E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos(kz - \omega t).$$

電圧と電流は同位相で，特性インピーダンスは

$$\boxed{Z_0 = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{b}{a}}.$$

Z_0 は半径 r に依存しない。なお $P = \langle VI \rangle = V_0^2 / (2Z_0)$ で問 5 と一致する。

問 8：線形分散におけるパルス形状の保存

原題の重ね合わせを

$$V(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(k) e^{ikz - i\omega(k)t} dk$$

とする。 $v(k)$ が k_0 近くに集中し $\omega(k) = \omega_0 + A(k - k_0)$ と近似できるとき， $q = k - k_0$ として

$$V(z, t) = e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(k_0 + q) e^{iq(z - At)} dq.$$

$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int v(k_0 + q) e^{iq\xi} dq$ と置けば

$$\boxed{|V(z, t)| = |F(z - At)|}.$$

包絡線は形を変えずに群速度 $A = d\omega/dk$ で移動する。線形近似が成り立つ帯域では波束が広がらない。実電圧 $\text{Re } V$ の搬送波の山の位置と，複素振幅の包絡線とを区別する。

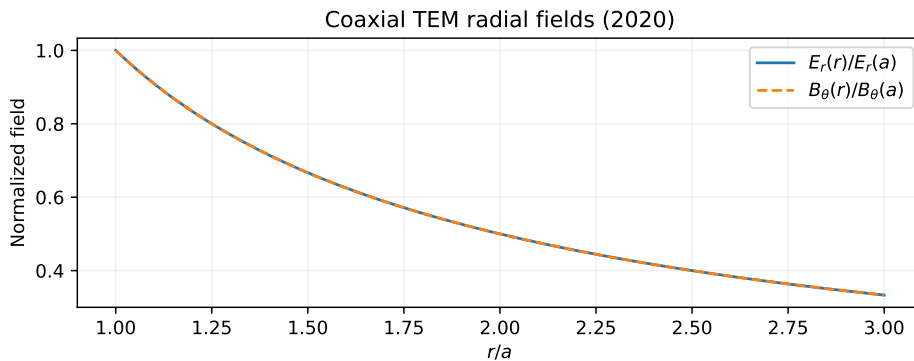


図 2 同軸ケーブルの電場・磁場の半径依存性と，線形分散時のパルス包絡線の並進の模式図。

検算と復習チェック

1. 2022 年問 3 : Fresnel 振幅は $R/E_0 = 1/3$, $T/E_0 = 4/3$ 。反射率 $1/9$ と透過率 $8/9$ の和は 1。
2. 2022 年問 5 : $k_{z,i} = 2q$, $k_{z,t} = q/2$ に対し $T/E_0 = 8/5$ である。
3. 2022 年問 6 : $Q_z = iK/\sqrt{2}$ は $z > 0$ に進むに従って減衰する物理解である。
4. 2020 年問 3 : $rE_r = aE_0 e^{i(kz - \omega t)}$ で, Gauss の法則を満たす。
5. 2020 年問 5 と問 7 : $\langle VI \rangle$ からの電力と Poynting 流の断面積分が一致する。
6. 2020 年問 8 : $\omega''(k) = 0$ が狭帯域波束の非分散条件。一般の分散では波束が広がり得る。

出典と位置付け： 原題は提供された R4master.pdf および R2phys.pdf を改変せず収録。解答・説明は独立作成で、東京大学公式の模範解答ではない。数値的・代数的な検算は主要結果について行ったもので、全設問の外部査読完了を意味しない。

電磁気学・古典力学 | 年度別問題

2019

年度

出題テーマ / 編集上の分類

重力波による連星運動の減衰

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第3問

質量 m_1, m_2 をもつ二つの質点が互いの重力によって束縛運動している系を考える。それらの位置ベクトルをそれぞれ r_1, r_2 とし、相対位置ベクトルを $r \equiv r_2 - r_1$ と定義する。軌道面上での r の2次元極座標表示 (r, φ) を用いると、系のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{G\mu M}{r} \quad (1)$$

となる。ここで、 G はニュートンの重力定数である。また、 M と μ は以下で定義される。

$$M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2)$$

この系に関する以下の設問に答えよ。なお、設問5と6は、それ以外の設問と独立に解くことができる。

1. 式(1)のラグランジアンを用いて、 r と φ に対する運動方程式を求めよ。
2. この系のエネルギー E の表式、および φ に共役な運動量 J の表式を求めよ。
3. E と J が運動の定数であることを示せ。

一般相対論によれば、この系から重力波が放射されることで、 E は保存せず徐々に減少する。以下では、重力波の放射の影響を考慮した場合の系の運動を、一般相対論ではなくニュートン力学を用いて近似的に取り扱う。さらに、任意の時刻 t における軌道が半径 $a = a(t)$ の円軌道で近似できる場合を考え、その時刻でのエネルギー $E = E(t)$ が

$$E = -\frac{G\mu M}{2a} \quad (3)$$

と書けることを用いてよい。また重力波の放射に伴う μ と M の変化は無視できるものとする。

4. 半径 a の円軌道の場合、この系からの重力波による単位時間あたりのエネルギー放射率は、 c を光速として、

$$L_{\text{GW}} = \frac{32G^4}{5c^5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5} \quad (4)$$

で与えられる。したがって、系の運動をニュートン力学で近似した場合には

$$\frac{dE}{dt} = -L_{\text{GW}} \quad (5)$$

が成り立つ。式(5)を a に対する微分方程式に書き直せ。

5. ケプラーの法則を用いれば、設問4の結果は公転周期 P に対する次の微分方程式

$$\frac{dP}{dt} = -A \left(\frac{P_c}{P}\right)^{5/3} \quad (6)$$

に書き換えられる。ここで、 A は無次元の数係数、 P_c は時間の次元をもつ定数で、それらは設問6で具体的に計算する。ここでは、式(6)を解いて、初期条件として公転周期 P_0 をもつ2質点系が、合体する(すなわち $P=0$) までの時間 τ_{GW} を、 A, P_c および P_0 を用いて表せ。

6. ケプラーの方程式

$$GMP^2 = 4\pi^2 a^3 \quad (7)$$

を用いて式 (6) を導き, $P_c = G\mu^\alpha M^\beta c^\gamma$ とした時のべき指数 α, β, γ の値と A の表式を求めよ。

7. 2015 年に, 連星ブラックホール GW150914 からの重力波信号が直接検出された。地上で重力波の信号が検出され始めた時点での連星ブラックホールの公転周期は $P_0 \approx 0.06$ sec であった。この連星ブラックホールは, それから $\tau_{\text{GW}} \approx 0.15$ sec 後に, 重力波放射によって合体した。簡単のために, この連星は等質量 m の 2 つのブラックホールからなり, また合体直前までニュートン力学近似が正しいものと仮定する。設問 5 と 6 の結果を利用することで, m が太陽質量 $M_\odot$ の何倍であるかを概算せよ。 A の近似値を 2500 とし, 必要であれば $2GM_\odot/c^3 \approx 10^{-5}$ sec, $6^{3/5} \approx 2.9$, $2^{1/5} \approx 1.1$ を用いてよい。

8. 連星ブラックホールの公転周期が P_0 のときの公転半径を a_0 とする。それ以降, 重力波放射に伴い a は徐々に減少するが, やがてある長さ a_{min} 以下になると, 上述のニュートン力学的な 2 質点の運動という描像が破綻する。これは物理的には, ブラックホールはその質量に対応した特徴的な長さスケールをもち, $a = 0$ になる以前に 2 つのブラックホールが実効的に合体するためである。GW150914 の場合, 合体までに放射される重力波によって, 設問 7 で得られた質量 m の約一割に相当するエネルギーが系から失われたと考えられている。このとき, a_{min} と m の関係式を導け。ただし簡単のために, $a_0 \gg a_{\text{min}}$ と近似できるものとし, a が a_0 から a_{min} になるまでは上述のニュートン力学近似が正しく, かつ a が a_{min} になった後は重力波が放射されないものと仮定せよ。この設問においても, 式 (3) における μ と M の時間変化率は, a の時間変化率に比べて小さく無視できるものとする。

2019年度 第3問 独立解答

分野：二体問題、変分原理、Kepler の第三法則、重力波放射、連星のインスパイラル。

元問題：H31phys.pdf の PDF 第 8-9 ページ（冊子第 5-6 ページ）。全 8 設問。

【設問 1】 与えられた Lagrangian は

$$L = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\mu}{2} r^2 \dot{\phi}^2 + \frac{G\mu M}{r}, \quad M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

動径の Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dt}(\mu \dot{r}) - \left(\mu r \dot{\phi}^2 - \frac{G\mu M}{r^2} \right) = 0 \implies \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 = -\frac{GM}{r^2}.$$

角度方向には Lagrangian が ϕ に陽に依存しないため、

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\phi}) = 0.$$

すなわち、重心系における相対運動の面積速度は一定である。

【設問 2】 正準運動量は $p_r = \mu \dot{r}$, $p_\phi = \mu r^2 \dot{\phi}$ である。Legendre 変換より

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{G\mu M}{r}, \quad J = \mu r^2 \dot{\phi}.$$

【設問 3】 L は時間に陽に依存しないので、運動方程式の下で $dE/dt = -\partial L/\partial t = 0$ となる。同様に $\partial L/\partial \phi = 0$ より $dJ/dt = \partial L/\partial \phi = 0$ 。直接微分すると、

$$\dot{E} = \mu \dot{r}(\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 + GM/r^2) + \dot{\phi} \frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\phi}) = 0.$$

これは放射損失を無視する Newton 力学の保存則であり、後半では重力波放射の効果を摂動的に加える。

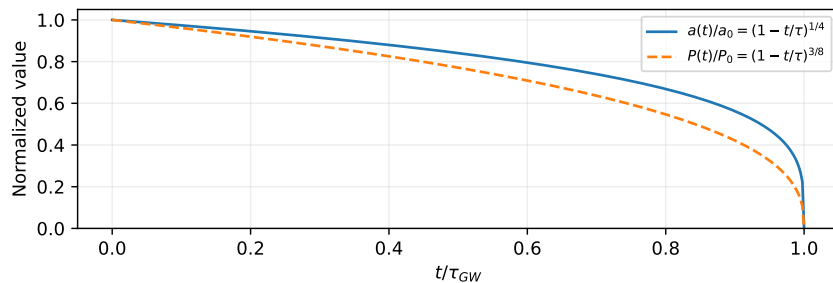
【設問 4】 円軌道の束縛エネルギー $E = -G\mu M/(2a)$ から

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G\mu M}{2a^2} \dot{a}, \quad \frac{dE}{dt} = -\frac{32G^4 \mu^2 M^3}{5c^5 a^5}.$$

よって

$$\dot{a} = -\frac{64G^3 \mu M^2}{5c^5 a^3}. \quad (\text{A})$$

符号が負であることは、放射に伴って円軌道半径が減少するという直観と整合する。



【設問 5】 Kepler の法則 $GMP^2 = 4\pi^2 a^3$ を対数微分すると

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a}.$$

(A) を代入し、 $a = (GMP^2/4\pi^2)^{1/3}$ を消去すると

$$\dot{P} = -\frac{96}{5}(4\pi^2)^{4/3} \frac{G^{5/3}\mu M^{2/3}}{c^5} P^{-5/3}. \quad (\text{B})$$

【設問 6】 無次元の A と時間尺度 P_c を

$$A = \frac{96}{5}(4\pi^2)^{4/3} = 2.581 \times 10^3, \quad P_c = \frac{G\mu^{3/5}M^{2/5}}{c^3}$$

と定めれば、 $\dot{P} = -A(P_c/P)^{5/3}$ である。原題の $P_c = G\mu^\alpha M^\beta c^\gamma$ と比べると

$$\alpha = \frac{3}{5}, \quad \beta = \frac{2}{5}, \quad \gamma = -3.$$

$\mathcal{M} = \mu^{3/5}M^{2/5}$ はチャープ質量と呼ばれる。

【設問 7】 (B) を $P(0) = P_0$, $P(\tau_{\text{GW}}) = 0$ で積分すると

$$\int_0^{P_0} P^{5/3} dP = AP_c^{5/3} \tau_{\text{GW}} \Rightarrow \tau_{\text{GW}} = \frac{3P_0^{8/3}}{8AP_c^{5/3}}.$$

等質量 $m_1 = m_2 = m$ では $\mu = m/2$, $M = 2m$ なので、 $P_c = 2^{-1/5}Gm/c^3$ 。ゆえに

$$\frac{m}{M_\odot} = 2^{1/5} \frac{P_0}{GM_\odot/c^3} \left(\frac{3P_0}{8A\tau_{\text{GW}}} \right)^{3/5}.$$

$P_0 = 0.06 \text{ s}$, $\tau_{\text{GW}} = 0.15 \text{ s}$, $2GM_\odot/c^3 \simeq 10^{-5} \text{ s}$, $A \simeq 2500$ とすると

$$m \simeq 4.0 \times 10^1 M_\odot \quad (\text{それぞれ約 } 40 \text{ 太陽質量}).$$

これは原題の円軌道・Newton 近似に基づく概算であり、波形の精密解析による質量推定とは区別する。

【設問 8】 短くなる軌道から失われるエネルギーを用いて

$$\Delta E_{\text{rad}} = \frac{G\mu M}{2} \left(\frac{1}{a_{\text{min}}} - \frac{1}{a_0} \right).$$

等質量では $\mu M = m^2$ 。 $\Delta E_{\text{rad}} \simeq 0.1mc^2$ なら

$$\frac{1}{a_{\text{min}}} \simeq \frac{1}{a_0} + \frac{0.2c^2}{Gm}, \quad a_{\text{min}} \simeq \frac{5Gm}{c^2} \quad (a_0 \gg a_{\text{min}}).$$

注意：厳密な有限 a_0 の式では右辺第1項を残す。 $a \sim Gm/c^2$ では一般相対論的な補正が大きく、式 (A) による継続はあくまで問題の指定した近似である。

確認事項 円軌道で $J^2 = G\mu^2 Ma$, $E = -G\mu M/(2a)$ 。放射がある場合 $\dot{a} < 0$, $\dot{P} < 0$ となる。

電磁気学・古典力学 | 年度別問題

2018 年度

出題テーマ / 編集上の分類

電気双極子の放射・干渉

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第3問

電磁気現象は次の Maxwell 方程式で記述される。ただし、 $\mathbf{E}$ は電場、 $\mathbf{B}$ は磁束密度、 ρ は電荷密度、 $\mathbf{j}$ は電流密度、 ε_0 は真空誘電率、 μ_0 は真空透磁率、 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ は光速である。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

電気双極子がつくる電磁場を求めたい。このとき以下の設問に答えよ。

- 最初に、静的な電気双極子 $\mathbf{p} = qd\mathbf{e}_z$ を考える。ただし、 q は電荷、 d は正負の電荷間の距離、 $\mathbf{e}_z$ は z 方向の単位ベクトルを表す。点電荷の静電ポテンシャルを用いて、この双極子が位置 $\mathbf{r}$ につくる静電ポテンシャル $\phi_0(\mathbf{r})$ を $\mathbf{p}$ を用いて表し、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_0(\mathbf{r})$ を極座標 r, θ, φ で表せ。ただし、双極子の中心は原点にあり、 $d \ll r$ とする。
- 一般に、場が時間変動する状況を考え、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ および磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ をスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{r}, t)$ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ を用いて表せ。
- 設問2の結果とローレンツ条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ を用いて、Maxwell 方程式が次の形式で表せることを示せ。

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (6)$$

図1のように原点で z 方向に距離 d だけ離れた2つの微小導体球が導線でつながれ、導線は十分細く、 z 方向に一樣に電流密度 $j_z(\mathbf{r}, t) = I_0 e^{i\omega t} \delta(x) \delta(y)$ が流れているものとする。ただし、 I_0 は定数である。ここで、物理量としては実部を取るものとするが、以下の設問4, 5では複素数表示のままで答えてもよい。

- 上下の各導体球に蓄えられる電荷 $\pm q(t)$ を I_0, ω などを用いて表せ。
- 式(6)を満たすベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ の解は次式(7)で表される。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7)$$

上で与えた電流密度 j_z が十分離れた位置 $\mathbf{r}$ に生じさせるベクトルポテンシャルを書き下し、その結果から $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ を求めよ。また、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ と式(4)を用いて、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ を求めよ。ただし、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ と $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ は、 $\mathbf{r}$ に対して最もゆっくり減衰する項一つずつのみ求めればよい。ここで、この電流から放射される電磁波の波数を k とするとき、 $k = \omega/c$ の関係を用いてよい。また位置 $\mathbf{r}$ は、 $d \ll r$, $kr \gg 1$ を満たす十分離れた点とする。なお、任意のベクトル場 $\mathbf{V}$ に関する公式 $\nabla \times \mathbf{V} = (\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}) \times \mathbf{V}$ を用いてよい。ただし、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ は、それぞれ r, θ, φ 方向の単位ベクトルである。

6. 設問5で得られた電場と磁場の解を用いて、それらの実数成分からポインティングベクトル $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ とその時間平均 $\bar{\mathbf{S}}$ を計算し、 $I_0, d, r, \mu_0, c, \omega, k, \theta$ などを用いて表せ。

次に、図2のように、2つの波源から電磁波が放射される場合を考える。各波源は y 軸上、 $y = -D/2$ と $y = D/2$ の位置にあり、波源1, 2が発する電場は、波源から距離 R_n ($n = 1, 2$) にある xy 平面内の観測点でそれぞれ、 $\mathbf{E}_n(R_n) = e_z E_0(R_n) \cos(\omega t - kR_n - \delta_n)$ で与えられるとする。ただし、 δ_n は各波源ごとに設定できる任意の位相とする。

7. 2つの波源からの放射が十分離れた xy 平面内の点 $\mathbf{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)$ に作る電界強度 $|\mathbf{E}|^2$ を計算し、 $\delta_n = 0$ ($n = 1, 2$) のときの角度 φ 依存性を求めよ。また、強度が最大値の $1/2$ になる角度幅 $\Delta\varphi$ を求め、 $\Delta\varphi$ を小さくする方法について議論せよ。さらに、各波源の電場の位相 δ_n を制御し、電界強度が最大となる方向が $\varphi = \varphi_0$ となるような、位相の差 $\delta_2 - \delta_1$ を求めよ。ただし、 $D \ll r$ とし、 $E_0(R_1) = E_0(R_2)$ と見なしてよい。

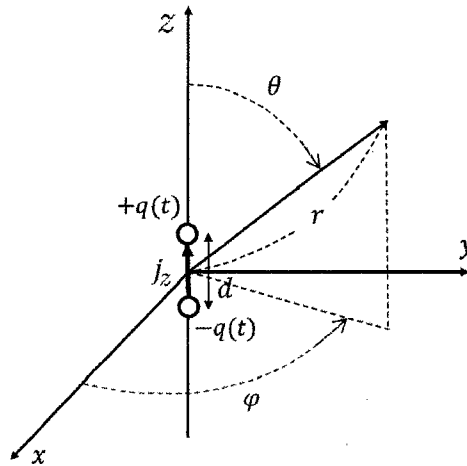


図1: 時間変動する電気双極子（電流の符号は図の太線の矢印の向きを正とする）。

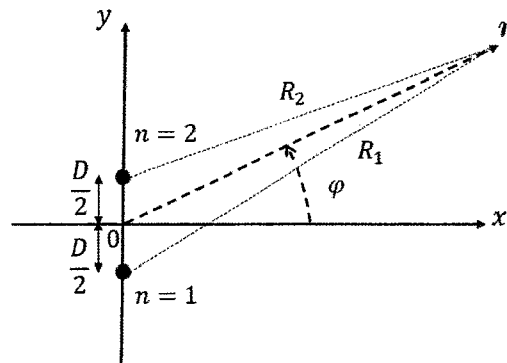


図2: xy 平面内の2つの波源と観測点。

2018年度 第3問 独立解答

分野：電気双極子、Lorenz ゲージ、遅延ポテンシャル、放射場・Poynting ベクトル、二波源干渉。

元問題：H30phys.pdf の PDF 第 6–7 ページ（冊子第 5–6 ページ）。全 7 設問。

【設問 1】 正電荷 $+q$ が $z = +d/2$ 、負電荷 $-q$ が $z = -d/2$ にある。 $d \ll r$ で

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{d}{2}\mathbf{e}_z|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{d}{2}\mathbf{e}_z|} \right) \simeq \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad p = qd.$$

球座標で $\mathbf{E} = -\nabla\phi_0$ を計算すると

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta).$$

静電場は r^{-3} で減衰し、後半の放射場 r^{-1} とは異なる。

【設問 2】 時間依存する場はスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ で

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

と表せる。Faraday の法則と $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を自動的に満たす形である。

【設問 3】 Lorenz 条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} + c^{-2} \partial_t \phi = 0$ を用いる。Gauss 則に $\mathbf{E}$ の表示を代入すると

$$-\nabla^2 \phi - \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \rho / \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad (\nabla^2 - c^{-2} \partial_t^2) \phi = -\rho / \epsilon_0.$$

Ampère–Maxwell 則に $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を代入し、恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ を使うと

$$(\nabla^2 - c^{-2} \partial_t^2) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

【設問 4】 導線内を $+z$ 方向に $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ が流れ、上端の電荷を $+q(t)$ と定義する。連続の式より $\dot{q} = I$ 。積分定数を零とすると

$$q(t) = \frac{I_0}{i\omega} e^{i\omega t}.$$

物理的な電荷・電流はこの複素表示の実部である。

【設問 5】 導線は $d \ll r$ 、波長に対しても $kd \ll 1$ とする。遅延ポテンシャルの遠方 r^{-1} 成分は

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \mathbf{e}_z, \quad k = \omega/c.$$

$\partial_r(e^{-ikr}/r) \simeq -ike^{-ikr}/r$ を使い、 $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z = -\sin \theta \mathbf{e}_\varphi$ より

$$\mathbf{B}_{\text{rad}} = \frac{i\mu_0 k I_0 d}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi.$$

真空の横波では $\mathbf{B}_{\text{rad}} = c^{-1} \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_{\text{rad}}$ だから

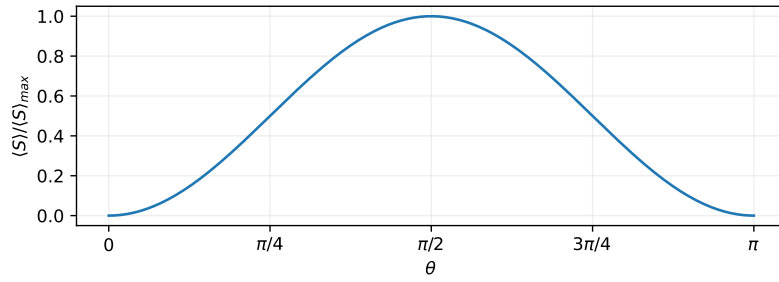
$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{i\mu_0 c k I_0 d}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \mathbf{e}_\theta.$$

なお、放射場の位相は複素振幅の時間依存を $e^{+i\omega t}$ と選んだ規約に従う。

【設問 6】 I_0 を実振幅とすると時間平均は $\langle \text{Re } f \text{ Re } g \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(fg^*)$ 。よって

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\mu_0 c k^2 I_0^2 d^2}{32\pi^2 r^2} \sin^2 \theta \mathbf{e}_r.$$

双極子の軸上 $\theta = 0, \pi$ では放射は消え、垂直方向 $\theta = \pi/2$ に最大となる。



【設問 7】 波源位置は $y = \mp D/2$ 。観測点 $\mathbf{r} = r(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ に対し

$$R_1 \simeq r + \frac{D}{2} \sin \varphi, \quad R_2 \simeq r - \frac{D}{2} \sin \varphi, \quad R_2 - R_1 \simeq -D \sin \varphi.$$

同振幅 E_0 の複素電場振幅を $\tilde{\mathbf{E}}$ とする。位相因子を足して振幅の絶対値の二乗を取れば

$$|\tilde{\mathbf{E}}|^2 = 2E_0^2 [1 + \cos(kD \sin \varphi - (\delta_2 - \delta_1))].$$

したがって $\delta_1 = \delta_2 = 0$ なら

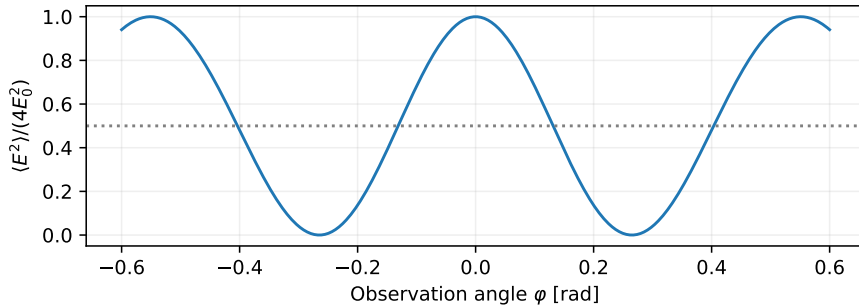
$$|\tilde{\mathbf{E}}|^2 = 4E_0^2 \cos^2 \left(\frac{kD}{2} \sin \varphi \right).$$

主極大 $\varphi = 0$ の両側で半値となる点は $|\sin \varphi_{1/2}| = \pi/(2kD)$ 。半値全幅は

$$\Delta\varphi = 2 \arcsin \left(\frac{\pi}{2kD} \right) \simeq \frac{\pi}{kD} = \frac{\lambda}{2D} \quad (kD \gg 1).$$

半値点の存在には $kD \geq \pi/2$ が必要。極大を $\varphi = \varphi_0$ へ向けるには

$$\delta_2 - \delta_1 \equiv kD \sin \varphi_0 \pmod{2\pi}.$$



確認事項：強度は E_0^2 の単位。実電場 $\mathbf{E}_{\text{phys}} = \text{Re} \tilde{\mathbf{E}} e^{i\omega t}$ の時間平均は $\langle |\mathbf{E}_{\text{phys}}|^2 \rangle = |\tilde{\mathbf{E}}|^2/2$ 。Poynting 流とは比例するが同一の物理量ではない。また $\Delta\varphi$ は片側角でなく *full width at half maximum* を指す。

電磁気学・古典力学 | 年度別問題

2017 年度

出題テーマ / 編集上の分類

二重振る子・固有モード移行

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第3問

図1のような xy 平面内を運動する二重振り子を考える。ここで、鉛直下向きを y 軸の正の向きとする。原点 O と質点1、質点1と質点2は、長さがそれぞれ l_1, l_2 の質量が無視できる糸でつながれている。質点1、質点2の質量はそれぞれ m_1, m_2 とする。空気抵抗や摩擦、糸のたわみは無視できるとする。また、任意の変数 q の時間微分を $\dot{q}$ と表す。重力加速度を g として、以下の設問に答えよ。

1. この系のラグランジアンを、 m_1, m_2 とデカルト座標系における質点の座標 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, およびそれらの時間微分 $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2$ を用いて表せ。
2. x_1, y_1, x_2, y_2 を、 l_1, l_2 , および、それぞれの糸の鉛直下向きからの角度 θ_1, θ_2 を用いて表せ。

以下、振動が微小 ($|\theta_1| \ll 1, |\theta_2| \ll 1$) である場合を考え、 $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ について3次以上の項を無視する。

3. この場合、ラグランジアンは定数を除いて以下の式で表されることを示せ。

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1\theta_1^2 - \frac{1}{2}m_2gl_2\theta_2^2$$

4. 設問3で与えられたラグランジアンから θ_1, θ_2 に関する運動方程式を導け。
5. ω をこの系の固有角振動数とすると、運動方程式は、 $\theta_1(t) = a_1 \cos \omega t, \theta_2(t) = a_2 \cos \omega t$ の形の解をもつ。ここで、 a_1, a_2 は時間によらない係数である。このことを用いて、固有角振動数 ω を g, m_1, m_2, l_1, l_2 で表せ。

次に m_1 が m_2 に比べて非常に大きい ($m_1 \gg m_2$) 状況を考えよう。

6. $|l_1 - l_2|$ が $\sqrt{m_2/m_1}(l_1 + l_2)$ に比べて十分大きく、後者が前者に対して無視できるとき、固有角振動数は m_1, m_2 を含まない形で表される。このとき、全ての固有角振動数と対応する固有モードの係数の組 (a_1, a_2) を求めよ。
7. はじめ、 $l_1 \gg l_2$ として、初期条件 $\theta_1 = \theta_2, \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ で二重振り子を振動させる。その後、全体の長さ $l_1 + l_2 = l$ を保ったまま、固有角振動数に比べて非常にゆつくりと l_1 を短くしていく。横軸を l_2/l , 縦軸を $g/(\omega^2 l)$ に取り、固有角振動数の変化の様子を図示せよ。また、最終的に $l_2 \gg l_1$ となった時、質点1が止まり、質点2のみが振動する。その理由を述べよ。

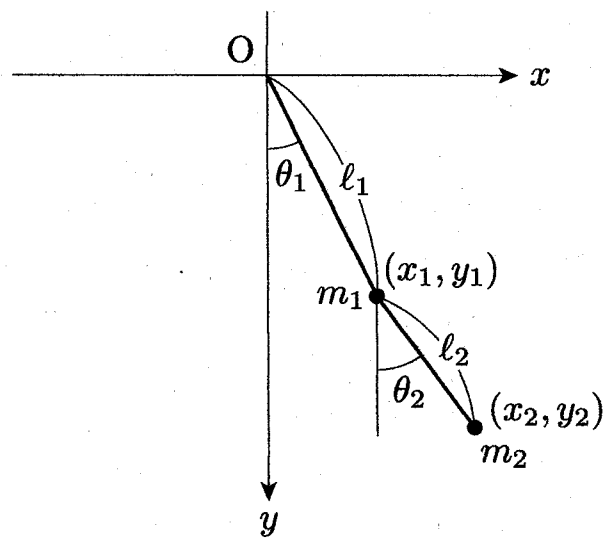


図 1: 二重振り子

2017 年度（平成 29 年度）第 3 問 独立詳解

二重振り子・微小振動・回避交差・断熱的モード移行

記号と問題設定 鉛直下向きを y の正方向とし、糸の長さは ℓ_1, ℓ_2 、質点の質量は m_1, m_2 、重力加速度は $g > 0$ とする。角度 θ_i は鉛直下向きから測る。糸は質量なし・非伸長、運動は同一鉛直面内とする。

設問 1 ラグランジアン

質点の位置と速度は

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= (\ell_1 \sin \theta_1, \ell_1 \cos \theta_1), \\(x_2, y_2) &= (\ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \sin \theta_2, \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2), \\ \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 &= \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2, \\ \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 &= \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).\end{aligned}$$

位置エネルギーは $U = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2$ (加法定数任意)。よって

$$\begin{aligned}L = T - U &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2)g\ell_1 \cos \theta_1 + m_2 g \ell_2 \cos \theta_2.\end{aligned}\tag{1}$$

設問 2 デカルト座標での位置

$$\begin{aligned}x_1 &= \ell_1 \sin \theta_1, & y_1 &= \ell_1 \cos \theta_1, \\ x_2 &= \ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \sin \theta_2, & y_2 &= \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2.\end{aligned}$$

これは設問 1 で用いた座標そのものであり、原点を第 1 糸の固定点に取る。

設問 3 微小振動近似

$\cos \theta_i = 1 - \theta_i^2/2 + O(\theta_i^4)$, $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1 + O(\theta^2)$ とし、二次のラグランジアンでは $O(\theta^2 \dot{\theta}^2)$ を落とす。定数を除くと

$$L^{(2)} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)g\ell_1 \theta_1^2 - \frac{1}{2}m_2 g \ell_2 \theta_2^2.\tag{2}$$

設問 4 線形運動方程式

$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^T$ と書けば

$$M\ddot{\boldsymbol{\theta}} + K\boldsymbol{\theta} = 0, \quad M = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)\ell_1^2 & m_2 \ell_1 \ell_2 \\ m_2 \ell_1 \ell_2 & m_2 \ell_2^2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)g\ell_1 & 0 \\ 0 & m_2 g \ell_2 \end{pmatrix}.\tag{3}$$

すなわち

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\ell_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)g\ell_1 \theta_1 &= 0, \\ m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g \ell_2 \theta_2 &= 0.\end{aligned}$$

設問 5 固有角振動数

$\theta = a \cos \omega t$ として $\det(K - \omega^2 M) = 0$ を求めると

$$m_1 \ell_1 \ell_2 \omega^4 - (m_1 + m_2)g(\ell_1 + \ell_2)\omega^2 + (m_1 + m_2)g^2 = 0. \quad (4)$$

したがって二つの固有角振動数は

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{g\{(m_1 + m_2)(\ell_1 + \ell_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)^2(\ell_1 + \ell_2)^2 - 4m_1(m_1 + m_2)\ell_1\ell_2}\}}{2m_1\ell_1\ell_2}. \quad (5)$$

ここでは $\omega_+ > \omega_-$ とする。対応する振幅比は

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\omega^2 \ell_1}{g - \omega^2 \ell_2} \quad (\text{分母が零の場合はもう一方の式で扱う}). \quad (6)$$

設問 6 $m_1 \gg m_2$ で二つの糸長が十分異なる場合

$\varepsilon = m_2/m_1 \ll 1$, $\Delta = \ell_1 - \ell_2$ とする。 $|\Delta| \gg \sqrt{\varepsilon}(\ell_1 + \ell_2)$ の非縮退領域では主導次数で

$$\omega^2 \simeq \frac{g}{\ell_1} \quad \text{または} \quad \omega^2 \simeq \frac{g}{\ell_2}. \quad (7)$$

$\ell_1 > \ell_2$ を例に取れば, g/ℓ_1 に近い低周波モードと g/ℓ_2 に近い高周波モードは, それぞれ

$$\begin{aligned} \omega_{\text{low}}^2 &\simeq \frac{g}{\ell_1} \left(1 - \varepsilon \frac{\ell_2}{\ell_1 - \ell_2}\right), & (a_1, a_2)_{\text{low}} &\propto \left(1, \frac{\ell_1}{\ell_1 - \ell_2}\right), \\ \omega_{\text{high}}^2 &\simeq \frac{g}{\ell_2} \left(1 + \varepsilon \frac{\ell_1}{\ell_1 - \ell_2}\right), & (a_1, a_2)_{\text{high}} &\propto \left(-\varepsilon \frac{\ell_2}{\ell_1 - \ell_2}, 1\right). \end{aligned}$$

$\ell_1 < \ell_2$ では周波数の大小が逆転する。等長近傍は上記の非縮退展開が破綻するため設問 7 で厳密固有値を用いる。

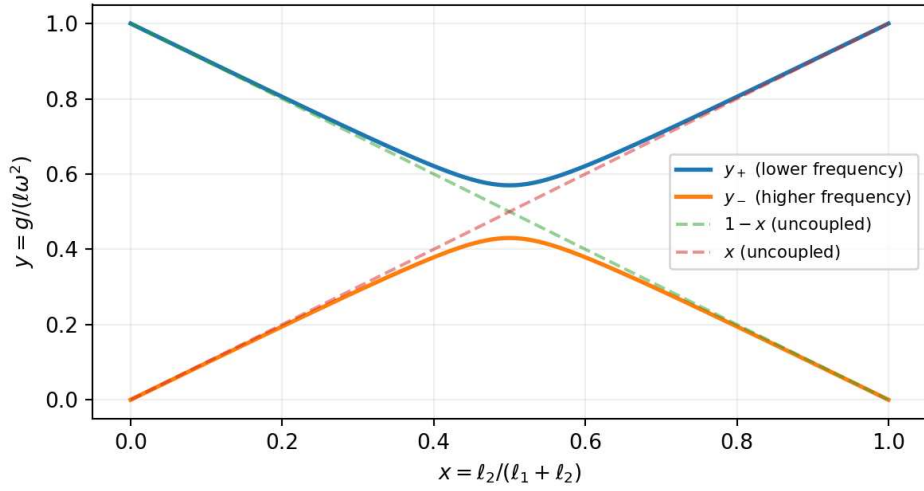
設問 7 長さをゆっくり変えると起こるモード移行

全長 $\ell = \ell_1 + \ell_2$ と $x = \ell_2/\ell$, $y = g/(\ell\omega^2)$, $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$ と置き, 設問 5 の特性方程式を変形すると

$$y^2 - y + \mu x(1 - x) = 0, \quad y_{\pm}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\mu x(1 - x)}}{2}. \quad (8)$$

$m_2 > 0$ のとき判別式は $x = 1/2$ でも零にならない。最接近点の間隔は

$$y_+(1/2) - y_-(1/2) = \sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}} \sim \sqrt{\varepsilon}. \quad (9)$$



図： $m_2/m_1 = 0.02$ の例。実線は正確な固有値，破線は $m_2/m_1 \rightarrow 0$ で交差する近似。

初めは $\ell_1 \gg \ell_2$, $\theta_1 = \theta_2$ なので，主に**低周波 (y_+) モード**が励起される。パラメータ変更が十分ゆっくりでモード間遷移を無視できれば，同じ固有値枝 y_+ を追う。最終的に $\ell_2 \gg \ell_1$ となると，この枝の固有ベクトルは

$$\omega_{\text{low}}^2 \simeq g/\ell_2, \quad a_1/a_2 \simeq \varepsilon \frac{\ell_2}{\ell_2 - \ell_1} \longrightarrow \varepsilon. \quad (10)$$

よって $m_1 \gg m_2$ では質点 1 はほぼ静止し，質点 2 が主として振動する。**注意：**単に「角振動数に比べて十分遅い」だけでは回避交差付近の断熱性は保証されない。固有振動数差に対しても十分遅い変化を想定する。質量比を零にしてから等長点を通す極限は非一様である。

電磁気学・古典力学 | 年度別問題

2016 年度

出題テーマ / 編集上の分類

相対論的ロケット・固有加速度

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第3問

図1のように、質量を持った微粒子からなるガスを噴射することによって加速するロケットの運動を考える。ロケットは外力を受けることなく、 x 軸上を運動するものとする。ガスはロケットから見て常に一定の速度 $-v_{\text{gas}}$ ($v_{\text{gas}} > 0$) で進行方向と逆向きに噴射され、各時刻におけるガスの噴射量は、ロケットが常に一定の加速度 α をもって運動するように自動的に調整されるものとする。また、ある慣性系に静止した観測者が観測するロケットの速度を対地速度と呼ぶことにし、以下で用いる座標系はこの慣性系における直交座標であるとする。光速を c として、以下の設問に答えよ。

1. 運動量保存則を用いることにより、時刻 t におけるロケットの質量 $m(t)$ の変化率 $\frac{dm}{dt}$ (< 0) を求めよ。
2. $t = 0$ におけるロケットの速度を 0、質量を m_0 としたとき、 $m(t)$ を t の関数として求めよ。

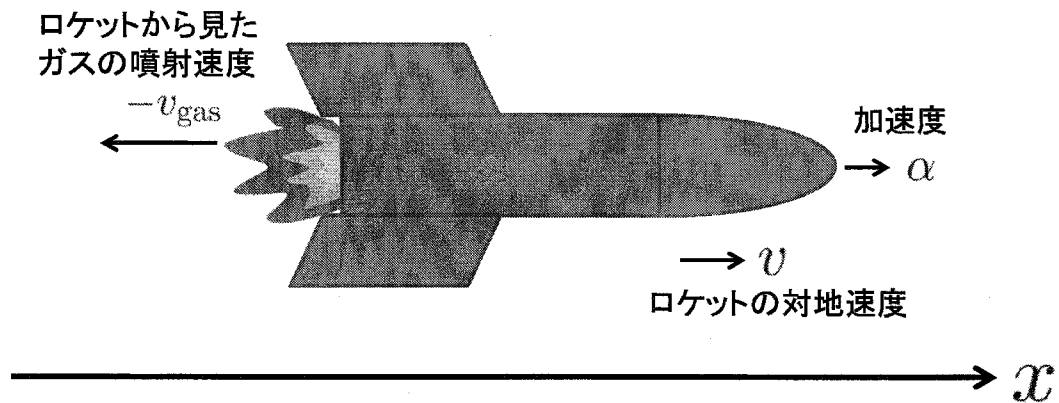


図 1: ガスを噴射しながら加速運動をするロケット。

ロケットが加速を続けて高速になると、相対論的効果が重要になるので、以下では特殊相対論によって考える。まず、特殊相対論における速度と加速度について整理しておこう。微小間隔離れた二つの時空点

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad (x^0 + dx^0, x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3) = (ct + cdt, x + dx, y + dy, z + dz)$$

の時空間隔 ds^2 は、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1)$$

で与えられ、その間をロケットが運動する際に要する固有時間 $d\tau$ は、

$$d\tau = \sqrt{-ds^2}/c \quad (2)$$

と書ける。このロケットの4元速度ベクトル u^μ と4元加速度ベクトル a^μ の各成分は、それぞれ

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{du^\mu}{d\tau}, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (3)$$

で与えられるが、いま x 軸上の運動を考えているので、 $u^2 = u^3 = 0$, $a^2 = a^3 = 0$ である。ロケットの対地速度を $\frac{dx}{dt} = v$ と書くことにすると、 $d\tau$ と dt の間には、 $d\tau = \boxed{\text{イ}}$ dt という関係式が成り立つ。

二つの4元ベクトル p^μ と q^μ のスカラー積を

$$p^\mu \odot q^\mu \equiv -p^0 q^0 + p^1 q^1 + p^2 q^2 + p^3 q^3 \quad (4)$$

によって定義すると、 $u^\mu \odot u^\mu = \boxed{\text{ロ}}$, $u^\mu \odot a^\mu = \boxed{\text{ハ}}$ が成り立つことがわかる。

また、 $a^\mu \odot a^\mu = \alpha^2$ ($\alpha > 0$) とおくと、 a^0 と a^1 (> 0) は、 α , u^0 , u^1 などを用いて $a^0 = \boxed{\text{ニ}}$, $a^1 = \boxed{\text{ホ}}$ と表せるので、 α はロケットの静止系で見たロケットの加速度 (固有加速度) であることがわかる。いまこの α が一定値を取っている場合を考えている。

3. 上の説明文の $\boxed{\text{イ}}$ から $\boxed{\text{ホ}}$ に入る適切な数式あるいは値を答えよ。
4. v を固有時間 τ の関数として求めよ。ただし、 $\tau = 0$ で $v = 0$ とする。
5. 微小時間中に、静止質量 dm' のガスをロケットから見て速度 $-v_{\text{gas}}$ で噴射した結果、ロケットの静止質量は m から $m + dm$ に、対地速度は v から $v + dv$ に変化したとする。このとき dm , dm' , dv はいずれも微小量であるとして、4元運動量の保存則を微小量の1次まで求めよ。ただし、ガスの対地速度を v' とする。
6. 以上の結果を用いて、ロケットの質量を固有時間 τ の関数として表せ。またその結果を設問2の答えと比較して、その意味を論ぜよ。ただし、相対論的な速度の変換則

$$-v_{\text{gas}} = \frac{v' - v}{1 - vv'/c^2} \quad (5)$$

を用いてよい。

2016 年度（平成 28 年度）第 3 問 独立詳解

可変質量ロケット・4 元速度・一定固有加速度・相対論的質量減少

設定 ロケットは x 軸上を加速し、ロケットから見た排気速度は常に $-v_{\text{gas}}$ ($0 < v_{\text{gas}} < c$)、固有加速度は一定 $\alpha > 0$ とする。 m はロケットの静止質量であり、外力とガスの噴射以外の損失は考えない。

設問 1 Newton 力学での質量減少率

短時間 dt に放出するガス質量を $-dm > 0$ とする。外部慣性系で噴射直後のガス速度は $v - v_{\text{gas}}$ 、ロケット速度は $v + dv$ 。運動量保存を一次まで取ると

$$mv = (m + dm)(v + dv) - dm(v - v_{\text{gas}}) \Rightarrow m dv = -v_{\text{gas}} dm.$$

$dv/dt = \alpha$ より

$$\boxed{\frac{dm}{dt} = -\frac{\alpha}{v_{\text{gas}}} m.} \quad (1)$$

設問 2 Newton 力学での残存質量

初期条件 $m(0) = m_0$ で積分すると

$$\boxed{m_{\text{N}}(t) = m_0 \exp\left(-\frac{\alpha t}{v_{\text{gas}}}\right).} \quad (2)$$

設問 3 特殊相対論の基本式：空欄イ～ホ

$\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ とする。固有時 $d\tau = dt/\gamma$ だから、イは $\boxed{\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/\gamma}$ 。

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma c, \gamma v, 0, 0), \quad a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}, \quad u^\mu u_\mu = -c^2, \quad u^\mu a_\mu = 0.$$

従ってロは $\boxed{-c^2}$, ハは $\boxed{0}$ 。また $a^\mu a_\mu = \alpha^2$ および $u^\mu a_\mu = 0$ を使い、 $a^1 > 0$ とすると

$$a^0 = \frac{v}{c} a^1, \quad (a^1)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \alpha^2.$$

よってニは $\boxed{\alpha \gamma v/c}$, ホは $\boxed{\alpha \gamma}$:

$$\boxed{a^\mu = \alpha \gamma (v/c, 1, 0, 0).} \quad (3)$$

設問 4 速度の固有時間依存

$du^1/d\tau = a^1 = \alpha \gamma$ と $u^1 = \gamma v$ より、次の簡単な関係を得る：

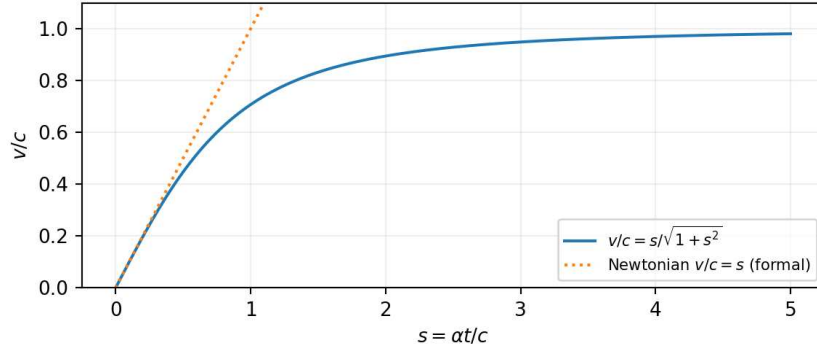
$$\frac{d(\gamma v)}{d\tau} = \alpha \gamma \iff \frac{dv}{d\tau} = \alpha(1 - v^2/c^2).$$

初期条件 $v(0) = 0$ を課せば

$$v(\tau) = c \tanh \frac{\alpha\tau}{c}, \quad \gamma(\tau) = \cosh \frac{\alpha\tau}{c}. \quad (4)$$

さらに $dt/d\tau = \gamma$ を積分して

$$t = \frac{c}{\alpha} \sinh \frac{\alpha\tau}{c}, \quad v(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t/c)^2}}. \quad (5)$$



図：一定固有加速度の相対論的速度は光速へ漸近する。点線は Newton 力学の式 ($v > c$ にも延長する形式的比較)。

設問 5 瞬間的静止系での運動量・エネルギー保存

噴射前に静止しているロケットの静止質量を m とする。噴射後、ロケットは $m + dm$ ($dm < 0$)、微小速度 dv' 、ガスは静止質量 $dm' > 0$ と速度 $-v_{\text{gas}}$ を持つ。 $\gamma_g = 1/\sqrt{1 - v_{\text{gas}}^2/c^2}$ とすると、エネルギー・運動量保存の一次項は

$$\begin{aligned} mc^2 &= (m + dm)c^2 + \gamma_g dm' c^2 + O((dv')^2), \\ 0 &= (m + dm)dv' - \gamma_g v_{\text{gas}} dm' + O(dm dv'). \end{aligned}$$

したがって

$$dm = -\gamma_g dm', \quad m dv' = \gamma_g v_{\text{gas}} dm' = -v_{\text{gas}} dm, \quad (6)$$

$$dm = -\frac{m}{v_{\text{gas}}} dv' = -\frac{\alpha m}{v_{\text{gas}}} d\tau. \quad (7)$$

ここで $dv' = \alpha d\tau$ はロケットのその時々々の静止系における微小な速度変化である。

設問 6 相対論的残存質量と Newton 力学との比較

設問 5 を $\tau = 0$ から積分すると

$$m(\tau) = m_0 \exp\left(-\frac{\alpha\tau}{v_{\text{gas}}}\right). \quad (8)$$

設問 4 により $\tau = (c/\alpha) \operatorname{arsinh}(\alpha t/c)$ なので、慣性系の座標時刻 t では

$$m_{\text{SR}}(t) = m_0 \exp\left[-\frac{c}{v_{\text{gas}}} \operatorname{arsinh}\left(\frac{\alpha t}{c}\right)\right]. \quad (9)$$

また $\alpha\tau/c = \text{artanh}(v/c)$ から

$$\boxed{\frac{m(v)}{m_0} = \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{c/(2v_{\text{gas}})}}. \quad (10)$$

$\alpha t/c \ll 1$ では $\text{arsinh}(\alpha t/c) \simeq \alpha t/c$ となり設問 2 の Newton 式に一致する。しかし長時間では $\tau < t$ なので、同じ慣性系時刻 t を比較すると $m_{\text{SR}}(t) > m_{\text{N}}(t)$ となる。**意味：**燃料の消費率を規定するのはロケットに同伴する固有時間であり，外部観測者の時計は時間の遅れを含む。

注意：この比較では両模型とも与えられた一定加速度を，Newton では座標加速度，相対論では固有加速度と読む。相対論で $v \rightarrow c$ としても有限時刻に c へ到達しない。噴出ガスの静止質量 dm' とロケットの質量減少 $-dm$ は γ_g だけ異なる。

電磁気学・古典力学 | 年度別問題

2015 年度

出題テーマ / 編集上の分類

運動する電荷とLorentz変換

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第3問

Maxwell 方程式は、以下のように表される。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{i}\end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ はそれぞれ電場と磁束密度、 ρ , $\mathbf{i}$ はそれぞれ電荷密度および電流密度である。また、光速 c , 真空誘電率 ϵ_0 , 真空透磁率 μ_0 の間には、 $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ の関係が成り立つ。

まず、3次元直交座標系 $\mathcal{O}$ において、 z 軸上の $-\infty$ から $+\infty$ まで一定間隔で並べられた荷電粒子群が、 z 軸に沿って速度 $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$ で等速運動している系を考える。ここで、各荷電粒子は電荷 q を持ち、その間隔は座標系 $\mathcal{O}$ において a であるとする。

1. 座標系 $\mathcal{O}$ において、点 $(x, 0, 0)$ (ただし $|x| \gg a$) での電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ を求めよ。

この系を、座標系 $\mathcal{O}$ に対して速度 $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$ で等速運動する座標系 $\mathcal{O}'$ で記述することを考える。このとき、座標系 $\mathcal{O}(t, x, y, z)$ と $\mathcal{O}'(t', x', y', z')$ の間には Lorentz 変換の関係

$$(ct', x', y', z') = (\gamma(ct - \beta z), x, y, \gamma(z - \beta ct)) \quad (1)$$

が成り立つ。ただし $\beta = v_z/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ である。

2. 座標系 $\mathcal{O}'$ において、荷電粒子の間隔 a' が $a' = \gamma a$ となることを、式 (1) を用いて示せ。
3. 座標系 $\mathcal{O}'$ において、点 (x', y', z') (ただし $x'^2 + y'^2 \gg a'^2$) での電場 $\mathbf{E}'$ と磁束密度 $\mathbf{B}'$ を求めよ。

座標系 $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ における電場 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{E}'$ および磁束密度 $\mathbf{B}$ と $\mathbf{B}'$ の各成分の間には、以下の関係式が成り立つ。

$$(E_x, E_y, E_z) = (\gamma(E'_x + c\beta B'_y), \gamma(E'_y - c\beta B'_x), E'_z) \quad (2)$$

$$(B_x, B_y, B_z) = \left(\gamma \left(B'_x - \frac{\beta}{c} E'_y \right), \gamma \left(B'_y + \frac{\beta}{c} E'_x \right), B'_z \right) \quad (3)$$

4. 設問3の結果と式 (2), (3) を用いて座標系 $\mathcal{O}$ における電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ を求めよ。さらにこの結果を設問1の結果と比較せよ。

次に、座標系 $\mathcal{O}$ において z 軸上を速度 $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$ で等速運動する1個の荷電粒子 (電荷 q) のみがある場合を考える。このとき、この荷電粒子は座標系 $\mathcal{O}'$ の原点にとどまり続けると考えることができる。

5. 座標系 $\mathcal{O}'$ において、点 (x', y', z') での電場 $\mathbf{E}'$ と磁束密度 $\mathbf{B}'$ を求めよ。ただし、原点は除く。
6. 座標系 $\mathcal{O}$ において、点 $(x, 0, 0)$ (ただし $x \neq 0$) での電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ を求めよ。式 (1), (2), (3) の関係がこの場合でも成り立つことを用いてよい。

2015 年度（平成 27 年度）第 3 問：独立詳解

一様な速度で動く無限線電荷・Lorentz 変換・運動点電荷

前提 実験室系 O で、 z 軸上の電荷 q の間隔は a 、全電荷は $+z$ 方向へ速さ v_z で動く。 $\beta = v_z/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ とする。線電荷近似は観測距離 $\rho \gg a$ （静止系では $\rho \gg a' = \gamma a$ ）で用いる。点電荷の場合は特異点を除く。

設問 1：実験室系の運動線電荷

O での線電荷密度は $\lambda = q/a$ 、定常電流は $I = \lambda v_z$ である。円筒形 Gaussian 面および円形 Ampère 経路より

$$\mathbf{E}(x, 0, 0) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a x} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{B}(x, 0, 0) = \frac{\mu_0 q v_z}{2\pi a x} \hat{\mathbf{y}} \quad (|x| \gg a). \quad (1)$$

符号付き座標 x を分母に置いたので、 $x < 0$ では両場の向きが逆転する。 $\mathbf{B} = (\mathbf{v} \times \mathbf{E})/c^2$ とも書ける。

設問 2：電荷間隔の Lorentz 変換

電荷 n の世界線を $z_n(t) = na + v_z t$ とする。式 (1) $t' = \gamma(t - v_z z/c^2)$ に対し、 O' で同時刻 $t' = 0$ と置けば $t = \beta z/c$ なので

$$z(1 - \beta^2) = na, \quad z' = \gamma(z - v_z t) = z/\gamma \implies \boxed{z'_n = n\gamma a, \quad a' = \gamma a.}$$

単純な「実験室系の距離が a だから静止系でも a 」という処理は同時性を無視している。

設問 3：静止系の線電荷

静止系の線密度は $\lambda' = q/a' = q/(\gamma a)$ 。 $\rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ とおくと

$$\mathbf{E}'(x', y', z') = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \gamma a} \frac{x' \hat{\mathbf{x}} + y' \hat{\mathbf{y}}}{x'^2 + y'^2}, \quad \mathbf{B}' = 0 \quad (\rho' \gg \gamma a). \quad (2)$$

線電荷の静電場は z' に依存しない。

設問 4：実験室系への再変換

原題の式 (2),(3) に $\mathbf{B}' = 0$ を代入すると、

$$\begin{aligned} E_x &= \gamma E'_x = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \frac{x}{x^2 + y^2}, & E_y &= \gamma E'_y = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \frac{y}{x^2 + y^2}, & E_z &= 0, \\ B_x &= -\frac{\gamma\beta}{c} E'_y = -\frac{\mu_0 q v_z}{2\pi a} \frac{y}{x^2 + y^2}, & B_y &= \frac{\gamma\beta}{c} E'_x = \frac{\mu_0 q v_z}{2\pi a} \frac{x}{x^2 + y^2}, & B_z &= 0. \end{aligned}$$

$y = 0$ とすれば設問 1 の答と完全に一致する。 $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ を用いた。

設問 5：静止点電荷の場合

電荷が静止する O' 系において、 $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ とすれば

$$\boxed{\mathbf{E}'(\mathbf{r}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad \mathbf{B}'(\mathbf{r}') = 0 \quad (r' > 0).} \quad (3)$$

設問 6：運動点電荷が作る場

世界線は $z = v_z t$ 。 O の観測点 $(x, 0, 0)$ に対し Lorentz 変換は $x' = x$, $y' = 0$, $z' = \gamma(z - v_z t) = -\gamma v_z t$ だから

$$R(t) = \sqrt{x^2 + \gamma^2 v_z^2 t^2}, \quad E'_x = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad E'_z = -\frac{q\gamma v_z t}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

原題の式 (2),(3) により

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= \frac{q\gamma x}{4\pi\epsilon_0 R^3}, & E_y &= 0, & E_z &= -\frac{q\gamma v_z t}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \\ B_x &= 0, & B_y &= \frac{v_z}{c^2} E_x, & B_z &= 0. \end{aligned}} \quad (4)$$

特に $t = 0$ なら $E_z = 0$, $E_x = q\gamma/[4\pi\epsilon_0 x|x|]$ である。問題文は観測時刻を固定していないため、一般の t を含む形で示すのが最も厳密である。独立検算 $\beta \rightarrow 0$ では点電荷の Coulomb 場に戻る。また $\mathbf{E}_\perp = \gamma\mathbf{E}'_\perp$, $\mathbf{B} = (\mathbf{v} \times \mathbf{E})/c^2$ が成立する。線電荷では $\lambda = \gamma\lambda'$ と $I = \lambda v_z$ から設問 1 を再現できる。

電磁気学・古典力学 | 年度別問題

2014 年度

出題テーマ / 編集上の分類

導体の表皮効果・電力反射率

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

第3問

媒質中の Maxwell 方程式は以下のように表される。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4)$$

ここで ρ および $\mathbf{j}$ は真電荷密度および真電流密度であり、原子や分子に束縛された電荷の寄与や変位電流は含まない。以下では線形応答する一様で等方的な媒質中の電磁場を考える。その場合、スカラー定数 ϵ (誘電率), μ (透磁率), および σ (電気伝導度) を用いて, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ と書ける。誘電体中では $\epsilon = \epsilon_d$ (実数), $\sigma = 0$ とし, 導体中では $\epsilon = \epsilon_m$ (実数), $\sigma = \sigma_m$ (実数) とする。透磁率はいずれの媒質中でも μ_0 (実数) とする。必要であれば, 任意のベクトル $\mathbf{V}$ についての公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$ を使ってよい。

1. 全領域が誘電体で満たされている場合を考える。この媒質中を $+z$ 方向に伝搬する平面電磁波の電場は, 複素表示を用いて $\mathbf{E}_0 \exp(ikz - i\omega t)$ と表される。(ただし物理量はその実部で表される。) この形の有限振幅の波が存在するための条件を ω と k の間の関係式として示せ。またこの波の位相速度を求めよ。
2. 全領域が導体で満たされている場合を考える。この媒質中で波の伝搬を表す $\mathbf{E}$ に関する方程式を $\mathbf{B}$ を使わずに表せ。

以下では誘電体が $z < 0$ の領域を, 導体が $z > 0$ の領域を満たしている場合を考える。 $z = -\infty$ から入射してきた, 電場が x 方向に偏光した平面電磁波の電場を $\mathbf{E}_{i0} \exp(ikz - i\omega t)$, 境界面 $z = 0$ で反射された波の電場を $\mathbf{E}_{r0} \exp(-ikz - i\omega t)$, $z > 0$ における電場を $\mathbf{E}_{m0} \exp(ik_m z - i\omega t)$ と表す。

3. (3) 式および (4) 式より, 境界面における接続条件を導け。
4. 設問2で求めた方程式より k_m の値を具体的に求め, $z > 0$ における電場の解 (エネルギー保存則を満たすもの) を書き表せ。ただし導体内では (4) 式の右辺第2項 (変位電流) は, 第1項 (真電流) に比べ十分小さいとし, 無視してよい。
5. 反射電力の入射電力に対する割合 (電力反射率) を, 微小量 $\sqrt{\omega \epsilon_d / \sigma_m}$ の1次までの近似で求めよ。
6. 導体内における xy 面上単位面積当たりの抵抗損失電力 $\langle \int_0^\infty \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dz \rangle$ (ただし $\langle \rangle$ は時間平均を表す) を $\sqrt{\omega \epsilon_d / \sigma_m}$ の1次までの近似で求め, その xy 面上単位面積当たりの入射電力に対する割合を表せ。

2014 年度（平成 26 年度）第 3 問：独立詳解

導体への電磁波の入射・表皮深さ・反射係数と Joule 損失

原題の符号について（重要） 提供された 2014 年度の問題では式 (3) が $\nabla \times \mathbf{E} = +\partial_t \mathbf{B}$ と印刷されている。一方、標準の Maxwell–Faraday の法則は $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ である。以下は物理的に整合する負号の法則を採用した解答であり、原題の表記は改変しない。式 (3) を印字どおり使用した場合とは符号上の差が生じる。

設定 $z < 0$ が誘電体 ($\varepsilon = \varepsilon_d, \sigma = 0$), $z > 0$ が導体 ($\varepsilon = \varepsilon_m, \sigma = \sigma_m$), 両方 $\mu = \mu_0$ 。時間依存は $e^{-i\omega t}$, z 方向に伝播し E_x に偏光する。

設問 1：誘電体中の平面波の分散

電荷・伝導電流のない一様誘電体では $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ である。 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ と Maxwell 方程式から

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_d \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

原題の $\mathbf{E}_0 e^{ikz - i\omega t}$ を代入して

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_d \omega^2, \quad v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_d}}. \quad (1)$$

設問 2：導体内部の波動方程式

$\mathbf{j} = \sigma_m \mathbf{E}$, $\mathbf{D} = \varepsilon_m \mathbf{E}$ と $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ を使えば

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \sigma_m \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_m \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

これは導電率が有限な媒質における拡散項と波動項の双方を含む。

設問 3：境界面 $z = 0$ の接続条件

境界を横切る微小長方形に Faraday 則・Ampère 則を積分し、有限の通常の体積電流だけがあると仮定すれば、接線成分は連続：

$$E_x(0^-) = E_x(0^+), \quad H_y(0^-) = H_y(0^+).$$

$\mathbf{B} = (1/\omega) \mathbf{k} \times \mathbf{E}$, $H_y = (k_z/\mu_0 \omega) E_x$ を使う。入射, 反射, 透過の複素振幅を E_i, E_r, E_m とすると

$$E_i + E_r = E_m, \quad k(E_i - E_r) = k_m E_m. \quad (3)$$

ここで反射波は $k_z = -k$ のため H_y に負符号が付く。

設問 4：導体内の波と減衰

設問 2 の波動方程式に $E_m e^{ik_m z - i\omega t}$ を入れると

$$k_m^2 = \mu_0 \varepsilon_m \omega^2 + i\mu_0 \sigma_m \omega, \quad \Im k_m > 0.$$

境界条件から $r = E_r/E_i = (k - k_m)/(k + k_m)$, $t = E_m/E_i = 2k/(k + k_m)$ 。従って

$$\mathbf{E}(z, t) = \Re \left[\frac{2kE_i}{k + k_m} e^{ik_m z - i\omega t} \right] \hat{\mathbf{x}} \quad (z > 0). \quad (4)$$

$\omega \varepsilon_m \ll \sigma_m$ なら $k_m \simeq (1 + i)\kappa$, $\kappa = \sqrt{\omega \mu_0 \sigma_m / 2}$, 表皮深さは

$$\delta = \kappa^{-1} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma_m}}, \quad |E_x(z)| \propto e^{-z/\delta}. \quad (5)$$

設問 5：反射する平均電力の割合

両側で $\mu = \mu_0$ なので、入射側の電力反射率は

$$R = \left| \frac{k - k_m}{k + k_m} \right|^2.$$

$s = \sqrt{\omega\varepsilon_d/\sigma_m} \ll 1$ と定めると

$$\frac{k}{k_m} \simeq \frac{1-i}{\sqrt{2}} s, \quad r = -1 + 2\frac{k}{k_m} + O(s^2),$$

従って

$$R = 1 - 2\sqrt{2}s + O(s^2) = 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_d}{\sigma_m}} + O\left(\frac{\omega\varepsilon_d}{\sigma_m}\right). \quad (6)$$

設問 6：Joule 損失とエネルギーの検算

$k_m = (1+i)\kappa$ を採用して導体中の場合は $E_x(z) = tE_i e^{-(1-i)\kappa z}$ (振幅の絶対値は $e^{-\kappa z}$)。時間平均の単位面積当たりの散逸電力は

$$P_J = \int_0^\infty \sigma_m \langle E_x(z, t)^2 \rangle dz = \frac{\sigma_m |tE_i|^2}{4\kappa}.$$

入射 Poynting 流は $P_i = k|E_i|^2/(2\mu_0\omega)$, したがって

$$\frac{P_J}{P_i} = \frac{\mu_0\omega\sigma_m}{2\kappa k} |t|^2 = \frac{4k\kappa}{|k + k_m|^2}.$$

また $1 - R = 4k\Re k_m/|k + k_m|^2 = 4k\kappa/|k + k_m|^2$ であるから

$$\frac{P_J}{P_i} = 1 - R = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{\omega\varepsilon_d}{\sigma_m}} + O\left(\frac{\omega\varepsilon_d}{\sigma_m}\right). \quad (7)$$

よって反射しなかった入射電力が導体内部で Joule 熱として散逸する。これは設問 5 の答との独立した一致検算になる。**適用上の注意** 良導体極限と、表面に特異な電流シートが存在しないという接続条件を使用した。原題の

「 $\sqrt{\omega\varepsilon_d/\sigma_m}$ の 1 次」は、その無次元小パラメータの一次である。

2013

年度 電磁気学・古典力学

ゲージ変換・Penningトラップ

原題 第3問

この直後に原題のPDFページを原文のまま掲載します。

続けて、独自に作成した非公式解答・導出を掲載します。

原題の問題番号・掲載年度は一次資料に準拠しています。

原題：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 公式入試問題

解答編集：taku（東京大学の公表模範解答ではありません）

takuphys.com

第3問

ベクトルポテンシャル $A(r, t)$, スカラーポテンシャル $\varphi(r, t)$ の電磁場内における粒子の運動を考える。この粒子の質量を m , 電荷を q , 位置ベクトルを $r = (x, y, z)$ とすると, そのラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m \left| \frac{dr}{dt} \right|^2 + q \frac{dr}{dt} \cdot A - q\varphi \quad (1)$$

で与えられる。

1. 式(1)を用いて, この粒子に対するオイラー・ラグランジュ方程式を書き下せ。
2. 設問1で得られたオイラー・ラグランジュ方程式が, ローレンツ力のもとでの運動方程式:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = qE + q \frac{dr}{dt} \times B \quad (2)$$

に帰着することを示し, 電場 E および磁場 B をベクトルポテンシャル A とスカラーポテンシャル φ を用いてそれぞれ書き下せ。

3. 任意の関数 $\Lambda = \Lambda(r, t)$ に対するゲージ変換:

$$A' = A + \text{grad } \Lambda, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (3)$$

のもとで, 電場および磁場が不変であることを示せ。また, この変換のもとで得られる式(1)のラグランジアンを L' としたとき, L' が L と同じオイラー・ラグランジュ方程式を与える理由を簡単に述べよ。

以下の設問では, 具体的にベクトルポテンシャルが

$$A = \left(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0 \right) \quad (B \text{ は定数}), \quad (4)$$

スカラーポテンシャルが

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}(2z^2 - x^2 - y^2) \quad (\alpha \text{ は定数}), \quad (5)$$

で与えられるものとし, 特に $q > 0, 0 < \alpha < \frac{qB^2}{4m}$ の場合を考える。

4. 式(4)と式(5)に対応する磁場 B および電場 E を求めよ。
5. 粒子の運動方程式の z 成分を書き下し, 粒子が z 方向にどのような運動をするかを簡単に説明せよ。
6. 粒子の運動方程式の x 成分と y 成分を書き下せ。この粒子の運動を xy 平面上に射影したとき, どのような運動であるかを簡単に説明せよ。

2013 年度（平成 25 年度）第 3 問：独立詳解

荷電粒子の Lagrangian ・ ゲージ不変性 ・ Penning トラップ型運動

設定と記号 質量 m , 電荷 q の粒子について $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q\varphi(\mathbf{r}, t)$ 。指定された具体例では $q > 0$, $\alpha > 0$, $0 < \alpha < qB^2/(4m)$ である。座標と時間の偏微分は互いに独立として実行する。

問 1：Euler–Lagrange 方程式

座標成分を x_i , 速度を $\dot{x}_i$ とすると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = q \sum_j \dot{x}_j \partial_i A_j - q\partial_i \varphi.$$

よって

$$m\ddot{x}_i = q \left[-\partial_i \varphi - \partial_t A_i + \sum_j \dot{x}_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \right]. \quad (1)$$

特に $\partial_i A_j$ と $\partial_j A_i$ の順序に注意する。

問 2：Lorentz 力への帰着

ベクトル恒等式 $[\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i = \sum_j v_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i)$ を (1) へ適用すると

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

問 3：ゲージ変換と作用の境界項

$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda$, $\varphi' = \varphi - \partial_t \Lambda$ とすると

$$\mathbf{E}' = -\nabla\varphi + \nabla\partial_t \Lambda - \partial_t \mathbf{A} - \partial_t \nabla\Lambda = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} + \nabla \times \nabla\Lambda = \mathbf{B}.$$

一方で $\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\Lambda + \partial_t \Lambda = d\Lambda(\mathbf{r}(t), t)/dt$ なので

$$L' = L + q \frac{d\Lambda}{dt}, \quad S' = S + q[\Lambda(\mathbf{r}(t_f), t_f) - \Lambda(\mathbf{r}(t_i), t_i)].$$

固定端点で変分する際、境界項の変分はゼロ。したがって運動方程式は不変である。

問 4：与えられたポテンシャルからの場

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0 \right), \quad \varphi = \frac{\alpha}{2}(2z^2 - x^2 - y^2).$$

$\partial_x A_y - \partial_y A_x = B$, $\nabla\varphi = (-\alpha x, -\alpha y, 2\alpha z)$ だから

$$\mathbf{B} = (0, 0, B), \quad \mathbf{E} = (\alpha x, \alpha y, -2\alpha z).$$

$\nabla \cdot \mathbf{E} = \alpha + \alpha - 2\alpha = 0$ であり、電荷のない領域の Gauss 法則とも整合する。

問 5： z 方向の運動

$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = (B\dot{y}, -B\dot{x}, 0)$ ゆえ、 z 成分は

$$m\ddot{z} = -2q\alpha z, \quad \omega_z = \sqrt{\frac{2q\alpha}{m}}, \quad z(t) = z_0 \cos \omega_z t + \frac{v_{z0}}{\omega_z} \sin \omega_z t.$$

軸方向は安定な単振動になる ($q\alpha > 0$)。

問 6: xy 面の運動, 安定条件と 2 つの円運動

$\kappa = q\alpha/m > 0$, $\omega_c = qB/m$ (符号付き cyclotron 周波数) とすると

$$\boxed{\ddot{x} = \kappa x + \omega_c \dot{y}, \quad \ddot{y} = \kappa y - \omega_c \dot{x}.} \quad (2)$$

$w = x + iy$ を導入して (2) の第 2 式を i 倍して足すと

$$\ddot{w} + i\omega_c \dot{w} - \kappa w = 0.$$

$w(t) = w_* e^{-i\Omega t}$ を代入すれば

$$\Omega^2 - \omega_c \Omega + \kappa = 0, \quad \boxed{\Omega_{\pm} = \frac{\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 - 4\kappa}}{2}.}$$

原題の条件 $0 < \alpha < qB^2/(4m)$ は $\omega_c^2 - 4\kappa > 0$ と同値。したがって 2 つの周波数は実数で, 軌道は

$$\boxed{x(t) + iy(t) = C_+ e^{-i\Omega_+ t} + C_- e^{-i\Omega_- t}.} \quad (3)$$

ここで $C_{\pm} \in \mathbb{C}$ は初期条件により決まる。 $B > 0$ なら両 $\Omega_{\pm} > 0$ で, 同じ回転方向の速い cyclotron 運動と遅い magnetron 運動の重ね合わせである。 $B < 0$ なら回転方向が逆になる。 $\Omega_+ \Omega_- = \kappa$, $\Omega_+ + \Omega_- = \omega_c$ 。

検算 (3) を (2) へ代入すると各項がゼロになる。 $\alpha \rightarrow 0^+$ では $\Omega_+ \rightarrow \omega_c$, $\Omega_- \rightarrow 0$ となり, 磁場だけの場合の cyclotron 運動と guiding center に帰着する。等号 $\alpha = qB^2/(4m)$ は二重根を生み, 一般解に $te^{-i\omega_c t/2}$ の項が現れるため, 原題の厳密不等式が重要である。

2012

年度 電磁気学・古典力学

Lorentz振動子と誘電分散

原題 第3問

この直後に原題のPDFページを原文のまま掲載します。

続けて、独自に作成した非公式解答・導出を掲載します。

原題の問題番号・掲載年度は一次資料に準拠しています。

原題：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 公式入試問題

解答編集：taku（東京大学の公表模範解答ではありません）

takuphys.com

第3問

誘電体による光の分散の性質を考察するために、誘電体を構成する原子に束縛された電子を考える。電子には、変位に比例する復元力が働くものとする。いま、誘電体の外部から入射する光の電場を $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$ と表す。電子の質量を m 、電荷を e (< 0) とし、束縛電子の単振動の固有角振動数を ω_0 とする。また、電子の位置(変位)を $\mathbf{r}$ 、速度を $\mathbf{v}$ と書く。以下の設問に答えよ。

1. 電子の運動方程式を書き下せ。ただし、電子の自己力と磁場による Lorentz 力は無視してよい。
2. 設問 1 で求めた運動方程式の解が $\mathbf{r} = \mathbf{R} \cos \omega t$ で与えられるとし、振幅 $\mathbf{R}$ を決めた上で束縛電子による電流密度 $\mathbf{i}_d = Ne\mathbf{v}$ の表式を求めよ。ただし、 N は単位体積あたりの電子数である。
3. 真空中の透磁率を μ_0 、誘電率を ε_0 とし、磁束密度を $\mathbf{B}$ と書くとき、Ampère-Maxwell の法則を表す真空中の Maxwell 方程式は次式で与えられる。

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot} \mathbf{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{i} \quad (1)$$

式 (1) が電荷保存則と矛盾しないことを示せ。

4. Ampère-Maxwell の法則を表す方程式 (1) は、電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$ 、電流密度 $\mathbf{i} = 0$ の場合には、

$$\text{rot} \mathbf{B} = -C\omega \mathbf{E}_0 \sin \omega t \quad (2)$$

の形に書ける。真空中では式 (2) 中の係数は $C = \varepsilon_0 \mu_0$ となる。一方、誘電体中では光の電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$ に対する束縛電子の応答の効果として電流密度 $\mathbf{i}_d$ が存在し、式 (1) 中の電流密度 $\mathbf{i}$ に寄与する。このとき、Ampère-Maxwell の法則を表す方程式を式 (2) と同じ形で表し、係数 C の具体的な表式を求めよ。

5. 設問 4 で求めた係数 C は、誘電体の誘電率 ε と透磁率 μ の積に対応する。このことに注意して、光の角振動数 ω の関数である誘電体の屈折率 $n(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}$ の表式を ω_0 とプラズマ特性振動数 $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$ を用いて表せ。得られた表式は分散関係式と呼ばれる。
6. 太陽光を石英製のプリズム(可視光領域で $n(\omega) > 1$) を通して分光すると、そのスペクトルは光の振動数の順に、紫、藍、青、緑、黄、橙、赤のように並ぶことはよく知られている。一方、ある特殊な物質 F(注) でできたプリズムを通して分光したところ、そのスペクトルは振動数の順にならずに黄、橙、赤、紫、藍、青の順になった。答案用紙に次頁の図を書き写し、石英の分散曲線と物質 F の分散曲線の概略を、それぞれの場合の固有角振動数 ω_0 の位置が分かるように描け。

(注) 物質 F は、フクシンという染料の一種をエタノールに溶かしたもの。

2012 年度（平成 24 年度）第 3 問：独立詳解

Lorentz 振動子模型・分極電流・電磁波の分散・色の異常分散

設定 束縛電子は質量 m ，電荷 $e < 0$ ，固有角振動数 ω_0 ，数密度 N 。外部電場は $E(t) = E_0 \cos \omega t$ ，光による自己力と磁気力，緩和は無視する。共鳴点 $\omega = \omega_0$ では非減衰模型の定常解が存在しないことに注意。

問 1：運動方程式

復元力は $-m\omega_0^2 r$ ，電気力は $eE(t)$ なので

$$m\ddot{r} + m\omega_0^2 r = eE_0 \cos \omega t.$$

問 2：束縛電子の電流密度

$r(t) = R \cos \omega t$ とおき， $\omega \neq \omega_0$ として代入すると

$$R = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad v = -\omega R \sin \omega t, \quad j_d = Ne v = -\frac{Ne^2 \omega E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

$e < 0$ でも $e^2 > 0$ であり，強制変位の向きと電流の符号を混同しない。

問 3：電荷保存との整合性

真空の Ampère–Maxwell 則を

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

とする。両辺の発散を取れば

$$0 = \varepsilon_0 \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \nabla \cdot \mathbf{j} = \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j}.$$

最後の等号は Gauss 則 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ から従う。したがって電荷の連続の式 $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ と一致し，矛盾しない。

問 4：誘電体内の係数 C

電流密度 $\mathbf{j}_d$ を (2) から代入すると

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = -\varepsilon_0 \omega \mathbf{E}_0 \sin \omega t - \frac{Ne^2 \omega \mathbf{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

原題の $\nabla \times \mathbf{B} = -C\omega \mathbf{E}_0 \sin \omega t$ と比較し

$$C = \mu_0 \left(\varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right), \quad \omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}.$$

物質の有効誘電率は $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 [1 + \omega_p^2/(\omega_0^2 - \omega^2)]$ であり， $C = \mu_0 \varepsilon(\omega)$ である。

問 5：屈折率と伝播の周波数帯

$\mu = \mu_0$ ， $c^{-2} = \mu_0 \varepsilon_0$ なら

$$n^2(\omega) = \frac{\varepsilon(\omega)\mu_0}{\varepsilon_0\mu_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \omega_L = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}. \quad (1)$$

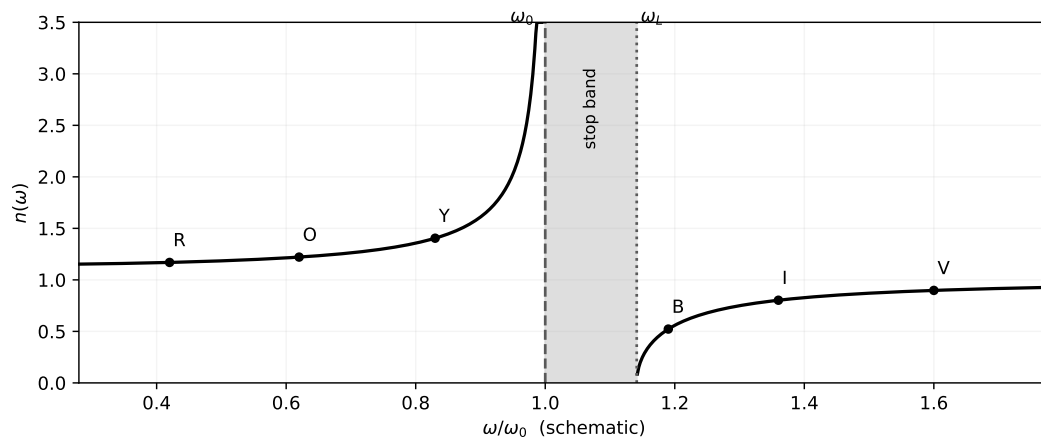
$0 \leq \omega < \omega_0$ では $n > 1$ で単調増加， $\omega_0 < \omega < \omega_L$ では $n^2 < 0$ で屈折率は純虚数（非伝播帯域）， $\omega > \omega_L$ では $0 < n < 1$ で単調増加する。 $\omega \rightarrow \infty$ では $n \rightarrow 1^-$ 。 $\omega = \omega_0$ は非減衰模型の共鳴特異点であり，有限の吸収を持つ実在媒質では緩和項が必要である。

問 6：色の順序が変わるプリズムの模式分散曲線

標準的な可視光の角振動数は低い順に「赤 < 橙 < 黄 < 緑 < 青 < 藍 < 紫」である。観測された屈折率（プリズムでの偏向角）の大きい順が「黄，橙，赤，紫，藍，青」であるならば，

- 赤・橙・黄は $\omega < \omega_0$ の $n > 1$ の枝に置く ($n_{\text{黄}} > n_{\text{橙}} > n_{\text{赤}}$)。
- 青・藍・紫は $\omega > \omega_L$ の $0 < n < 1$ の枝に置く ($n_{\text{紫}} > n_{\text{藍}} > n_{\text{青}}$)。
- 緑付近の伝播が弱い（原題の色一覧から欠ける）ことを， $\omega_0 < \omega < \omega_L$ の非伝播領域として模式的に示す。

したがって共鳴角振動数 ω_0 は黄色側の直後，青色側の手前（模式的には緑の近傍）に配置する。非伝播帯域の右端は ω_L である。色の境界の正確な位置は与えられていないため，一意の数値は決められない。



図： $\omega_0 = 1$, $\omega_p = 0.55$ とした模式例。黒線が実数屈折率の 2 枝，灰色帯は $n^2 < 0$ の領域。色の位置は観測順序を示す模式配置であり実測値ではない。

検算 $(\omega_0, \omega_p) = (1, 0.55)$ で $\omega_L \simeq 1.141$ 。 $\omega = 0$ では $n = \sqrt{1 + \omega_p^2/\omega_0^2} > 1$ 。 $\omega > \omega_L$ の枝では $\omega \rightarrow \omega_L^+$ で $n \rightarrow 0^+$ となる。 n^2 の次元は無次元である。

2011

年度 電磁気学・古典力学

Lorentz力・磁場勾配ドリフト

原題 第3問

この直後に原題のPDFページを原文のまま掲載します。

続けて、独自に作成した非公式解答・導出を掲載します。

原題の問題番号・掲載年度は一次資料に準拠しています。

原題：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 公式入試問題

解答編集：taku（東京大学の公表模範解答ではありません）

takuphys.com

第3問

時間に依存しない電磁場中で、電荷 $q (> 0)$ と質量 m をもつ粒子の運動を考える。電場 $\mathbf{E}$ 、磁束密度 $\mathbf{B}$ の下で荷電粒子はローレンツ力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

を受ける。以下では、磁束密度 $\mathbf{B}$ の向きは常に z 軸と平行とする。また、粒子の速度の大きさ $|\mathbf{v}|$ は光速 c に比べて十分小さく、相対論的効果は考えなくてよい。さらに、荷電粒子の運動に伴う電磁波の放出は無視する。

まず、電場が存在せず、一様な磁束密度、 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, ($B > 0$) だけがある場合を考える。

1. このとき、粒子の運動エネルギーは変化しない。その物理的理由を簡潔に述べよ。
2. 時刻 $t = 0$ において、この粒子を位置 $\mathbf{x}_0 = (a, 0, 0)$ から初速度 $\mathbf{v}_0 = (0, v_0, 0)$ で放出したところ、原点を中心とする等速円運動を行った。この粒子の運動（位置と速度）、および a と v_0 の関係を求めよ。

次に、一様な磁束密度に加えて、一様な電場、 $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$, ($E > 0$) をかけた場合を考える。

3. 設問2と同じ初期条件で粒子を放出したときの運動（位置と速度）を運動方程式を解いて求めよ。このとき x, y 方向の運動に関しては、運動方程式を $u \equiv v_x + iv_y$ (v_x, v_y は速度の x, y 成分) についての微分方程式に書き換えると簡単になる。さらに、得られた運動を設問2の場合と比較して、その特徴を述べ、運動の概略を図示せよ。

今度は、電場が存在せず、磁束密度が、 $\mathbf{B} = (0, 0, B(x))$, ($B(x) > 0$) のように x 軸方向に非一様な場合を考える。ただし、非一様性は非常に小さく、磁束密度は原点付近で $\mathbf{B}(x) \approx \mathbf{B}(0) + xB'(0)\hat{z}$ と近似できるとする。ここで、 $\hat{z}$ は z 軸方向の単位ベクトルを表し、 $B'(0) = \left. \frac{dB(x)}{dx} \right|_{x=0}$ である。

4. 設問2と同じ初期条件で粒子を放出したとき、荷電粒子が受けるローレンツ力は近似的に

$$\mathbf{F} \approx q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(0) + q\mathbf{v} \times (xB'(0)\hat{z})$$

と書ける。この右辺第2項が非一様性の効果を表し、それを $\mathbf{f}(x, \mathbf{v})$ とおく。この項が荷電粒子の運動に及ぼす影響は、 $\mathbf{f}(x, \mathbf{v})$ に非一様性が無い場合の原点を中心とする円運動解を代入し、円運動の1周期での平均 $\langle \mathbf{f} \rangle$ を計算することで評価できる。 $\langle \mathbf{f} \rangle$ を求めよ。

5. 一様電場中での荷電粒子の運動を参考にして、磁束密度の非一様性が荷電粒子の運動に与える影響について述べよ。

2011 年度 第3問 Lorentz 力と磁場勾配ドリフト

原題: H23phys.pdf, 第3問 (冊子3頁, PDF 索引4)。電荷 $q > 0$, 質量 m , 非相対論的運動。以下, $\omega_c = qB/m > 0$, 磁場の方向は $+z$ 。

設問1 磁場は粒子に仕事をしない

電場のない場合, $m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。運動エネルギー $K = mv^2/2$ の時間微分は

$$\frac{dK}{dt} = m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (1)$$

Lorentz 力の磁気部分が速度と直交するため, 速さは一定である。

設問2 円軌道と初速度

$\mathbf{B} = (0, 0, B)$ とすると

$$\dot{v}_x = \omega_c v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega_c v_x. \quad (2)$$

原点中心, 半径 a の軌道で, $\mathbf{r}(0) = (a, 0)$ なら, 向きは時計回りでなければならない。したがって

$$\boxed{x(t) = a \cos \omega_c t, \quad y(t) = -a \sin \omega_c t, \quad v_0 = -a\omega_c = -\frac{qaB}{m}.} \quad (3)$$

速度は $\mathbf{v}(t) = (-a\omega_c \sin \omega_c t, -a\omega_c \cos \omega_c t, 0)$ である。実際, $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega_c^2 \mathbf{r}$ であり, 初期条件を満たす。 v_0 は y 方向の符号付き速度である。

設問3 一様な交差電場・磁場での運動

$\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ を加えると

$$\dot{v}_x = \frac{qE}{m} + \omega_c v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega_c v_x. \quad (4)$$

$u = v_x + iv_y$ とおくと, $\dot{u} + i\omega_c u = qE/m$ 。 $u(0) = -i\omega_c a$ から

$$u(t) = -i\frac{E}{B} - i\left(\omega_c a - \frac{E}{B}\right)e^{-i\omega_c t}. \quad (5)$$

$R = a - E/(B\omega_c)$ と書けば, $x(0) = a, y(0) = 0$ を満たす位置は

$$\boxed{x(t) = \frac{E}{B\omega_c} + R \cos \omega_c t, \quad y(t) = -\frac{E}{B}t - R \sin \omega_c t.} \quad (6)$$

運動は周回運動と, 一定速度のガイド中心ドリフトとの和である。平均速度は

$$\boxed{\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{E}{B} \hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}.} \quad (7)$$

設問2との差は, y 方向に平均速度 $-E/B$ が加わる点である。特に $R = 0$ のとき円運動は消え, 直線的に移動する。

設問4 弱い磁場勾配の力の周回平均

$B(x) \simeq B_0 + xB'_0$ と置く ($B_0 = B(0) > 0$)。非一様性による追加の力は

$$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times (xB'_0 \hat{\mathbf{z}}) = qB'_0 x(v_y, -v_x, 0). \quad (8)$$

設問 2 の非摂動円軌道 $x = a \cos \omega_c t$, $y = -a \sin \omega_c t$ を代入すれば

$$\mathbf{f}(t) = qB'_0 a \cos \omega_c t (-a\omega_c \cos \omega_c t, a\omega_c \sin \omega_c t, 0). \quad (9)$$

$\langle \cos^2 \omega_c t \rangle = 1/2$, $\langle \sin \omega_c t \cos \omega_c t \rangle = 0$ から

$$\langle \mathbf{f} \rangle = -\frac{q\omega_c a^2 B'_0}{2} \hat{\mathbf{x}} = -\frac{q^2 B_0 a^2 B'_0}{2m} \hat{\mathbf{x}}. \quad (10)$$

これは一次近似での非摂動円軌道上の平均であり、厳密な非一様磁場の周期軌道を意味しない。

設問 5 磁場勾配によるドリフト

設問 3 で得た電場 E_x に対応する周回平均の力は $\langle F_x \rangle = qE_x$ であり、そのドリフトは $-E_x/B_0$ である。設問 4 の $\langle f_x \rangle$ を有効なゆっくり変化する力として用いると

$$\mathbf{v}_{\nabla B} \simeq -\frac{\langle f_x \rangle}{qB_0} \hat{\mathbf{y}} = \frac{qa^2 B'_0}{2m} \hat{\mathbf{y}}. \quad (11)$$

したがって $B'_0 > 0$ なら平均移動は $+y$ 方向である。実際、磁場が強い側では円運動の曲率が大きく、左右で移動距離が非対称になる。これは磁気モーメントによる ∇B ドリフトの先頭近似である。

■検算と適用条件 $B'_0 = 0$ で設問 4・5 の効果は消える。 $a|B'_0| \ll B_0$ を必要とし、ドリフトは周回速度に比べて小さい。放射・相対論効果は原題に従い除外した。

2010

年度 電磁気学・古典力学

Maxwell方程式・TEM伝送線路

原題 第3問

この直後に原題のPDFページを原文のまま掲載します。

続けて、独自に作成した非公式解答・導出を掲載します。

原題の問題番号・掲載年度は一次資料に準拠しています。

原題：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 公式入試問題

解答編集：taku（東京大学の公表模範解答ではありません）

takuphys.com

第3問

Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, & \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t), & \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

で与えられる。ただし、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, 電束密度 $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$, 磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, 磁場 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, 電荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$, 電流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ である。また、以下のベクトル公式を必要に応じて用いてよい。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{X}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{X}) - \nabla^2 \mathbf{X}\end{aligned}$$

1. 電場の角振動数 ω で変化する成分を、複素振幅 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ を用いて $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ と表すと、その実部が実際の場に対応する。ただし、 i は虚数単位である。他の物理量に対してもこのような表式を用いて、Maxwell 方程式を時間微分を含まない複素振幅の方程式に書き直せ。

以降、電場と電束密度、磁場と磁束密度の関係が $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r})$ と書けるとする。ただし、誘電率 $\epsilon (> 0)$ および透磁率 $\mu (> 0)$ は実数の定数とする。

2. 複素振幅 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ がそれぞれ満たす方程式を $\rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ を用いて表せ。ただし、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の方程式は $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ を含まず、 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ の方程式は $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ を含まない形にせよ。
3. $\rho(\mathbf{r}) = 0$ かつ $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$ の場合を考える。ただし、電気伝導度 $\sigma (\geq 0)$ は実数の定数であるとする。このとき、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ の解の一つとして、 x, y によらない

$$\mathbf{E}(z) = E_0 e^{ikz}, \quad \mathbf{H}(z) = H_0 e^{ikz}$$

の組み合わせを考える。 E_0, H_0 は、 x, y, z によらない複素ベクトルである。このとき、 z 方向の単位ベクトルを s として、 $E_0 \perp s, H_0 \perp s, E_0 \perp H_0$ を示せ。

4. 設問3で $\sigma = 0$ の場合、位相速度および $\mathbf{E}(z)$ と $\mathbf{H}(z)$ の振幅の比 $|\mathbf{E}|/|\mathbf{H}|$ を ϵ, μ を用いて表せ。また、 $\sigma \neq 0$ の場合、電磁場の振る舞いが $\sigma = 0$ の場合と比べてどのように異なるかを説明せよ。
5. 図のように、幅 a で z 方向には無限遠まで続く2枚の完全導体が真空中で狭い間隔 $b (a \gg b)$ で対向した平行平板線路を考える。この2枚の導体間に設問3で与えた電場、磁場が存在し、それ以外の部分では電場、磁場の振幅がゼロであるとする。このとき、境界条件に注意して、導体間の電場、磁場の方向を示せ。
6. 設問5の場合、2枚の導体を流れる電流の z 依存性を説明せよ。
7. 設問5の場合、任意の $z = z_0$ における2枚の導体間の電位差と導体を流れる電流の大きさの比を求めよ。

2010 年度 第3問 Maxwell 方程式と平行平板伝送線路

原題：H22phys.pdf, 第3問（冊子5頁, PDF 索引6）。時間依存は一貫して $e^{-i\omega t}$ とする。 $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ は実定数である。

設問1 Maxwell 方程式の複素振幅表示

$\partial_t \rightarrow -i\omega$ と対応させる。電場の実場は $\text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$ で与える。他も同様として

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B},} \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} - i\omega \mathbf{D}.} \quad (1)$$

符号を決めるのは時間依存 $e^{-i\omega t}$ の選択である。

設問2 電場・磁場の非斉次波動方程式

$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ を使う。まず $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon$, $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}$ 。ベクトル恒等式から

$$\nabla \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right) - \nabla^2 \mathbf{E} = i\omega \mu (\mathbf{J} - i\omega \varepsilon \mathbf{E}), \quad (2)$$

したがって

$$\boxed{(\nabla^2 + \omega^2 \varepsilon \mu) \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho - i\omega \mu \mathbf{J}.} \quad (3)$$

磁場は $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ なので

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} - i\omega \varepsilon (\nabla \times \mathbf{E}), \quad (4)$$

$$\boxed{(\nabla^2 + \omega^2 \varepsilon \mu) \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}.} \quad (5)$$

ρ , $\mathbf{J}$ は複素振幅であり, 必要なら電荷保存 $-i\omega \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ を満たす。

設問3 導電媒質中の平面波の横波性

$\rho = 0$, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, $\sigma \geq 0$ とする。上の式は

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} = 0, \quad \boxed{k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu + i\omega \mu \sigma.} \quad (6)$$

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ikz}$ とすると $\nabla \cdot \mathbf{E} = ikE_{0z} = 0$ ゆえ $E_{0z} = 0$ 。同様に $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ から $H_{0z} = 0$ 。Faraday の法則で

$$ik\hat{z} \times \mathbf{E}_0 = i\omega \mu \mathbf{H}_0, \quad \boxed{\mathbf{H}_0 = \frac{k}{\omega \mu} \hat{z} \times \mathbf{E}_0.} \quad (7)$$

よって $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ は互いに直交し, いずれも進行方向 z に直交する。 k は一般に複素数だが, 成分関係は変わらない。

設問4 位相速度・電磁インピーダンス

$\sigma = 0$ では $k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$ が実数なので

$$\boxed{v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}.} \quad (8)$$

$\sigma > 0$ では $k = k_r + ik_i$ で, 減衰する $+z$ 波は $k_i > 0$ を選ぶ。

$$\boxed{v_p = \frac{\omega}{k_r}, \quad Z_w = \frac{\omega\mu}{k}, \quad \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \frac{\omega\mu}{|k|}.} \quad (9)$$

電場と磁場の複素振幅には $\arg Z_w$ だけ位相差があり，場の振幅は $e^{-k_i z}$ で減衰する。 $\sigma = 0$ のときのみ Z_w は正の実数である。

設問 5 理想平行平板伝送線路の場の方向

設問の図で導体の幅は x 方向に a ，すき間は y 方向に b ，伝送方向は z 方向である ($a \gg b$)。端効果を無視すると，導体表面で接線電場 $E_z = E_x = 0$ となる。ギャップ内の TEM 波は

$$\boxed{\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}} \mathcal{E}(z, t), \quad \mathbf{H} = \hat{\mathbf{x}} \mathcal{H}(z, t).} \quad (10)$$

$+z$ へ進む波では $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ が $+z$ 向きであるから， $\mathcal{E} > 0$ に対して $\mathcal{H} < 0$ となる。つまり $\mathbf{E}$ は板に垂直， $\mathbf{H}$ は板に平行で，伝送方向とはともに直交する。

設問 6 波形の伝播と電流の z 依存性

真空中の Maxwell 方程式を設問 5 の形に代入すると

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (11)$$

したがって $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ は共に

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathcal{E} = 0, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (12)$$

を満たす。一般解を $\mathcal{E} = f(z - ct) + g(z + ct)$ とすると

$$\boxed{\mathcal{H}(z, t) = -\frac{1}{\eta_0} f(z - ct) + \frac{1}{\eta_0} g(z + ct), \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}.} \quad (13)$$

導体の表面電流は幅方向にほぼ一様であり，電流 $I(z, t)$ も進行波と反射波の和として同じ速さ c で伝わる。 $+z$ への波だけなら $\mathcal{H} = -\mathcal{E}/\eta_0$ 。

設問 7 電位差と電流の振幅比

平行板間の電位差の振幅は $|V| = b|\mathcal{E}|$ ，片側の板を流れる電流の振幅は $|I| = a|\mathcal{H}|$ である。 $+z$ 向きの単一進行波について

$$\boxed{\frac{|V|}{|I|} = \frac{b}{a} \frac{|\mathcal{E}|}{|\mathcal{H}|} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0.} \quad (14)$$

これは z に依存しない伝送線路の特性インピーダンスである。 $L' = \mu_0 b/a$ ， $C' = \varepsilon_0 a/b$ を用いて $Z_0 = \sqrt{L'/C'}$ とも書ける。

注意：前進波と反射波が共存する重ね合わせの全電圧／全電流の比は一般に z に依存する。一定の Z_0 が得られるのは，各単独進行波の振幅比である。

2009

年度 電磁気学・古典力学

二体散乱・有限球状障壁

原題 第3問

この直後に原題のPDFページを原文のまま掲載します。

続けて、独自に作成した非公式解答・導出を掲載します。

原題の問題番号・掲載年度は一次資料に準拠しています。

原題：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 公式入試問題

解答編集：taku（東京大学の公表模範解答ではありません）

takuphys.com

第3問

質量 m_1 の粒子1と質量 m_2 の粒子2の弾性散乱を考える。散乱前で2つの粒子の距離が十分に離れており、両者の間の相互作用が無視できる状態において、粒子2の速さが0になるように実験室系を選ぶ。このとき、粒子1の速さは V_1 であるとする(図1左)。以下では全て非相対論的古典力学の範囲で答えよ。また、粒子1、2ともに内部自由度を持たない質点とみなせるものとする。図1右に示すように、粒子1と2の重心系において散乱前に粒子1と2が十分に離れた状態での速度ベクトルを、それぞれ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 、速さをそれぞれ v_1, v_2 、また、散乱後に2つの粒子が十分に離れた後の速度ベクトルを、それぞれ $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ 、速さをそれぞれ v'_1, v'_2 とする。また、重心系での粒子1の散乱角を ψ とする。ただし、 ψ は $0 \leq \psi \leq \pi$ の角度として定義する。

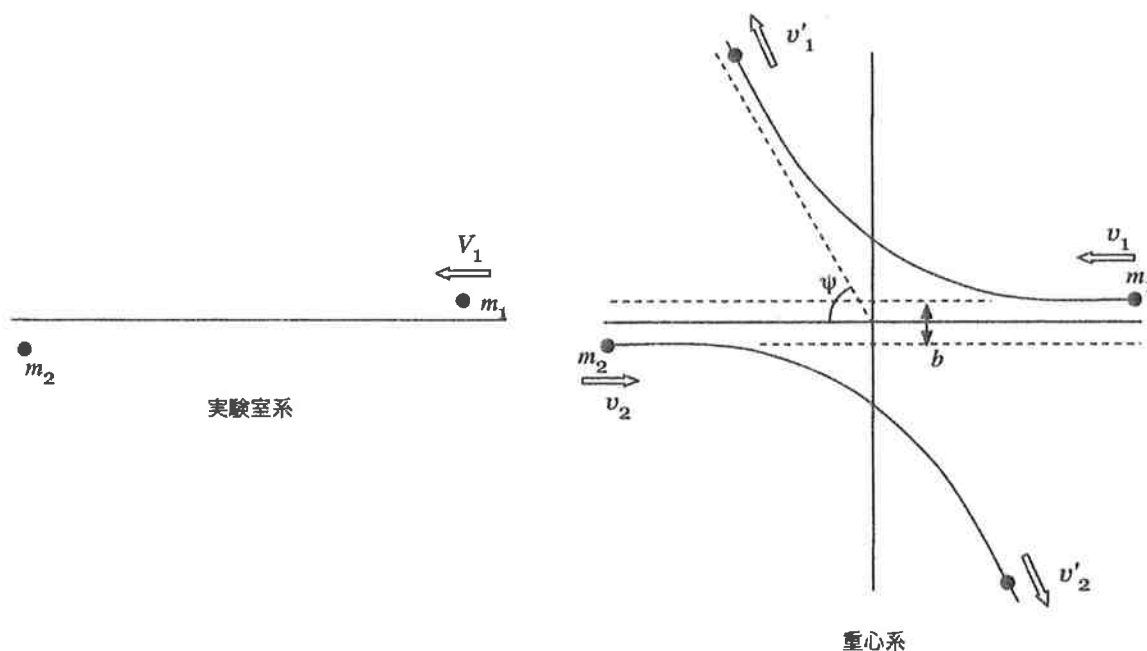


図 1:

1. 速度ベクトル $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ の間に成り立つ関係式、および速さ v_2 と v'_2 の間に成り立つ関係式を、それぞれ1つ示せ。
2. 実験室系における粒子2の散乱後の運動エネルギー ε を、 m_1, m_2, V_1, ψ を用いて表せ。

2つの粒子の間に働く力が、2つの粒子の間の距離 r を変数とするポテンシャル $U(r)$ によって与えられるとする。

3. 重心系におけるこの2粒子系のラグランジアンを、粒子2から粒子1への相対位置ベクトル $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ と換算質量 $m = 1/(1/m_1 + 1/m_2)$ を用いて書き表せ。ここで $\mathbf{r}_1$ と $\mathbf{r}_2$ は、それぞれ重心系における粒子1と2の位置ベクトルである。座標系として、図2のように、2つの粒子が運動する平面上に定義される極座標系 $\mathbf{r} = (r, \phi)$ を用いよ。すなわち、 r, ϕ とその時間微分 $\dot{r}, \dot{\phi}$ を用いて書き表すこと。

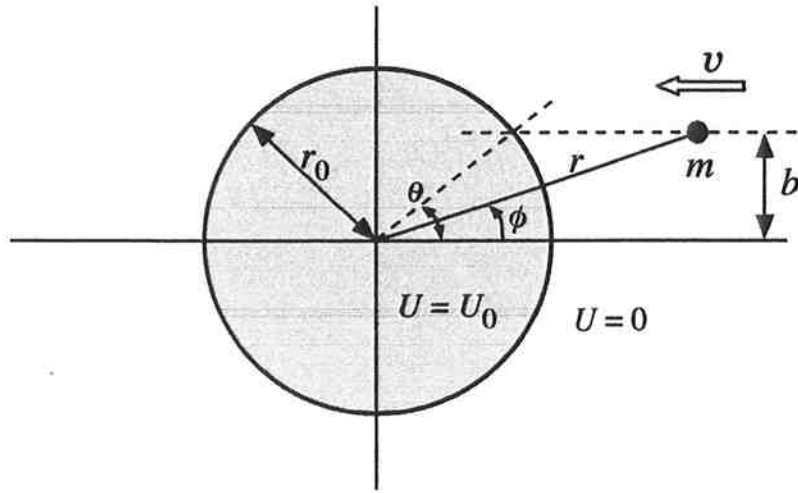


図 2: (r, ϕ) 座標の定義とポテンシャル

4. 設問 3 で求めたラグランジアンと最小作用の原理（オイラー・ラグランジュ方程式）から角運動量保存則、

$$mr^2\dot{\phi} = \text{一定}$$

を導け。

さらに、ポテンシャル $U(r)$ は

$$U(r) = \begin{cases} U_0 & (r \leq r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases}$$

により与えられるとする。ここで、 U_0 は、

$$0 < U_0 < \frac{m}{2} V_1^2$$

を満たす定数である。

5. 図 2 に示すように、衝突パラメーター b が $0 \leq b \leq r_0$ であるとき、図 2 のように $r_0 \sin \theta = b$ により $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の大きさの角度 θ を定義する。また、定数 n を

$$n = \sqrt{1 - \frac{2U_0}{mV_1^2}}$$

により定義する。相対位置ベクトル $\mathbf{r}$ の軌跡の略図を示し、さらに、角度 θ と重心系での散乱角 ψ の間に成り立つ関係を n を用いて表せ。散乱の様子が θ の値によって質的に異なる場合は、それぞれの略図を示せ。

6. 衝突パラメーター b が 0 から r_0 の間で様々な値をとる場合に、実験室系における粒子 2 の散乱後の運動エネルギーの最大値 $\varepsilon_{\max}$ を求めよ。

2009 年度 第 3 問：弾性二体散乱と有限障壁

設定と記号 質量 m_1 の入射粒子 1 が実験室系で速度 V_1 を持ち、標的 m_2 は静止している。重心系での粒子 1 の散乱角は $\psi \in [0, \pi]$ 。質量和 $M = m_1 + m_2$ 、換算質量 $\mu = m_1 m_2 / M$ と書く。原題の m はここでの μ に当たる。

1. 重心系の運動量・速度の関係

重心速度は $\mathbf{V}_{\text{CM}} = m_1 \mathbf{V}_1 / M$ 。重心系では

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \quad m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = \mathbf{0}. \quad (1)$$

無限遠でのポテンシャルはゼロであるから、重心系の全運動エネルギー保存により

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2.$$

運動量の関係を代入すると、 $v_1 = v'_1$, $v_2 = v'_2$ 。散乱前の各速さは

$$v_1 = \frac{m_2}{M} V_1, \quad v_2 = \frac{m_1}{M} V_1.$$

2. 標的粒子へ移る実験室系の運動エネルギー

粒子 2 は実験室系では最初静止している。その散乱後速度は $\mathbf{V}'_2 = \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2$ ($\mathbf{V}_{\text{CM}} = -\mathbf{v}_2$)。重心系で粒子 1 と 2 の方向はいずれも同じ角度 ψ だけ変わるから

$$|\mathbf{V}'_2| = 2v_2 \sin \frac{\psi}{2} = \frac{2m_1}{M} V_1 \sin \frac{\psi}{2}.$$

従って求める運動エネルギーは

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m_2 |\mathbf{V}'_2|^2 = \frac{2m_1^2 m_2}{M^2} V_1^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}.$$

質量が等しいとき、 $\psi = \pi$ では全運動エネルギーが標的に移る。

3. 相対運動のラグランジアン

重心位置 $\mathbf{R} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / M$ 、相対位置 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ と置くと

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2.$$

重心系で $\dot{\mathbf{R}} = 0$ 、極座標 $\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2$ なので

$$L_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r).$$

4. 角運動量保存

ϕ は循環座標 ($\partial L / \partial \phi = 0$) なので Euler-Lagrange 方程式から

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0, \quad \mu r^2 \dot{\phi} = \ell = \text{一定}.$$

散乱前の入射直線の衝突パラメータを b とすれば、図の向きで $\ell = \mu V_1 b$ 。

5. 有限の球状障壁での軌道と散乱角

相対粒子の全エネルギーは $E = \mu V_1^2/2$ で、障壁内では運動量の大きさが n 倍、

$$n = \sqrt{1 - \frac{2U_0}{\mu V_1^2}}, \quad 0 < n < 1.$$

障壁面での角運動量保存は $\mu V_1 b = \mu(nV_1)r_0 \sin \eta$ を与える。ここで外側の入射角を θ ($\sin \theta = b/r_0$)、内側で法線となす角を η と置くと

$$\sin \eta = \frac{\sin \theta}{n}, \quad \eta = \arcsin\left(\frac{\sin \theta}{n}\right).$$

通過する場合 $0 \leq b \leq nr_0$: 相対粒子は障壁内を直線に進み、対称な出口から出る。曲がる角度は入口・出口で等しいので

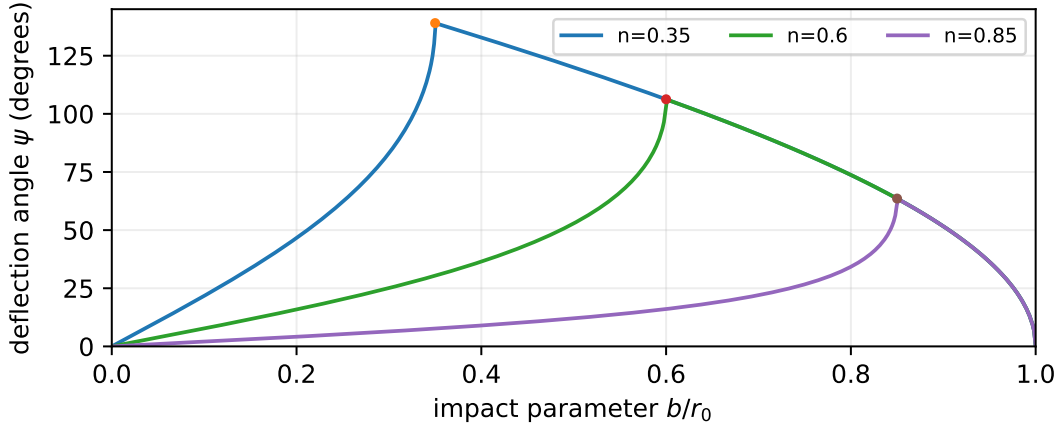
$$\boxed{\psi = 2 \left[\arcsin\left(\frac{\sin \theta}{n}\right) - \theta \right]} \quad (0 \leq \theta \leq \arcsin n).$$

反射する場合 $nr_0 < b \leq r_0$: 内側には角運動量を保存した実軌道が存在せず、表面で反射する。幾何学から

$$\boxed{\psi = \pi - 2\theta} \quad \left(\arcsin n < \theta \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

したがって軌道は「貫入・屈折」と「外表面で反射」の二種類に分かれる。両枝は $b = nr_0$ で連続で、

$$\psi(nr_0) = \pi - 2 \arcsin n = 2 \arccos n.$$



図：衝突パラメータと散乱角。ピークは $b/r_0 = n$ 。

6. 標的の運動エネルギーの最大値

通過枝では $\eta - \theta$ が b とともに増加し、反射枝では $\pi - 2\theta$ が減少するから、散乱角の最大値は

$$\psi_{\max} = 2 \arccos n \quad (b = nr_0).$$

設問 2 の式を使うと、 $\sin^2(\psi_{\max}/2) = 1 - n^2 = 2U_0/(\mu V_1^2)$ より

$$\varepsilon_{\max} = \frac{2m_1^2 m_2}{M^2} V_1^2 (1 - n^2) = \frac{4m_1^2 m_2}{M^2 \mu} U_0$$

$$\boxed{= \frac{4m_1}{m_1 + m_2} U_0.}$$

検算の観点 $U_0 \rightarrow 0$ なら $n \rightarrow 1$ で $\psi_{\max}, \varepsilon_{\max} \rightarrow 0$ 。 $U_0 \rightarrow \mu V_1^2/2$ なら $n \rightarrow 0$ で正面反射に近づく。

2008

年度 電磁気学・古典力学

矩形導波管とTE/TMモード

原題 第3問

この直後に原題のPDFページを原文のまま掲載します。

続けて、独自に作成した非公式解答・導出を掲載します。

原題の問題番号・掲載年度は一次資料に準拠しています。

原題：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 公式入試問題

解答編集：taku（東京大学の公表模範解答ではありません）

takuphys.com

第3問

以下の設問を通して、自由空間と導波管 (金属でできた中空の管) における電磁波の伝搬の違いについて考えよう。

1. 電場を $\tilde{\mathbf{E}}$ 、磁場を $\tilde{\mathbf{B}}$ とすると、真空中のマクスウェル方程式は

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} &= 0, & \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} &= 0, & \nabla \times \tilde{\mathbf{B}} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t}\end{aligned}$$

と書ける。ここで c は真空中の光速である。これらの式から、次の波動方程式を導け。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{0}.$$

以下では、 z 方向に伝搬する電磁場の関数形を

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}(x, y) \exp[i(kz - \omega t)], \\ \tilde{\mathbf{B}}(x, y, z, t) &= \mathbf{B}(x, y) \exp[i(kz - \omega t)]\end{aligned}$$

と仮定する (自由空間中を z 方向に伝搬する電磁波では、電磁場の z 成分は共にゼロであるが、境界が存在する場合には、それらは必ずしもゼロではないことに注意せよ)。

2. このとき、 k と ω で表されるある γ を用いると、 $\mathbf{E}(x, y)$, $\mathbf{B}(x, y)$ の z 成分 E_z , B_z が

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right) E_z = 0, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right) B_z = 0 \tag{2}$$

という形の方程式を満たすことを示し、そのときの γ^2 を具体的に書き表せ。

次に、図1のような長方形 ($a > b$) の断面を持つ導波管内を、 z 方向に伝搬する電磁波を考える。導波管の壁面は完全導体でできており、内部は真空とする。ただし、壁面の厚さは無視してよいものとする。また、 $\mathbf{n}$ を壁面の内側を向く単位法線ベクトルとしたとき、壁面での境界条件は $\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0$ で与えられる。

3. 変数分離法を用いて、式(1)を E_z について解くことを考える。導波管壁面の境界条件に注意すると、整数 m, n を用いて

$$\gamma^2 = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}$$

と書けることを示せ。また、この整数の組 (m, n) に対する解 E_z を求めよ。ただし、 E_z の最大値を E とせよ。

4. 設問3と同じ整数の組 (m, n) を用いると、式(2)の解は

$$B_z = B \cos \alpha x \cos \beta y$$

と書ける。ただし、

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b}$$

である。このとき、残りの成分 E_x, E_y, B_x, B_y を求めよ。

5. 設問3と4で得られた解 $\mathbf{E}(x, y), \mathbf{B}(x, y)$ のうち、 $E_z = 0$ を満たす特別な場合を考える。4つの整数の組 $(m, n) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ に対応する電磁場の解のうち、 z 方向に伝搬する電磁波を表し、かつ、その振動数が最小となるものはどれか。その最小振動数と (m, n) を答え、理由も述べよ。
6. 設問5で $E_z = 0$ の代わりに、 $B_z = 0$ を満たす場合はどうなるか。同じく、最小振動数と (m, n) を、理由をつけて答えよ。

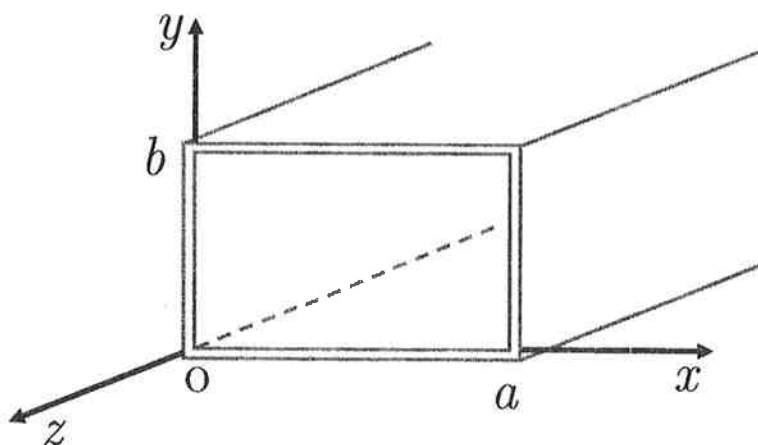


図 1: z 方向に無限に伸びている導波管の模式図。ただし、 $z < 0$ の領域のみ描かれている。

2008 年度 第 3 問：矩形金属導波管の TE・TM モード

設定 完全導体で囲まれた真空の矩形導波管 $0 < x < a, 0 < y < b, a > b$ を考える。時間・伝播方向依存を $e^{i(kz-\omega t)}$ とし、 $k > 0$ の伝播波を調べる。横断面で $\nabla_t = (\partial_x, \partial_y)$ と置く。

1. Maxwell 方程式から波動方程式

真空中で $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0, \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t \tilde{\mathbf{B}}$ 。両辺の curl をとり、ベクトル恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ を使えば

$$-\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \tilde{\mathbf{E}}, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \tilde{\mathbf{E}} = 0.$$

$\tilde{\mathbf{B}}$ にも同じ操作をすると

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \tilde{\mathbf{B}} = 0.$$

2. 縦成分の断面 Helmholtz 方程式

$\partial_z^2 \mapsto -k^2, \partial_t^2 \mapsto -\omega^2$ なので E_z, B_z は

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) E_z = 0, \quad (\nabla_t^2 + \gamma^2) B_z = 0, \quad \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2.$$

以下 $\gamma^2 = \kappa^2$ と書く。伝播のためには $\omega > c\kappa$ が必要である。

3. TM モードの E_z と境界条件

完全導体表面では接線電場がゼロ。側壁の接線方向に z が含まれるため E_z は全壁面でゼロ、

$$E_z(0, y) = E_z(a, y) = E_z(x, 0) = E_z(x, b) = 0.$$

変数分離 $E_z = X(x)Y(y)$ から

$$X'' + \alpha^2 X = 0, \quad Y'' + \beta^2 Y = 0, \quad \alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b}.$$

非自明解には $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ が必要で、

$$E_z(x, y) = E \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad \kappa^2 = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}.$$

TM は $B_z = 0$ 。 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ と $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}$ から横成分は

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{ik}{\kappa^2} \partial_x E_z, & E_y &= \frac{ik}{\kappa^2} \partial_y E_z, \\ B_x &= -\frac{i\omega}{c^2 \kappa^2} \partial_y E_z, & B_y &= \frac{i\omega}{c^2 \kappa^2} \partial_x E_z. \end{aligned}$$

4. TE モードの B_z と全ての横成分

完全導体壁面の法線磁場はゼロ、すなわち $x = 0, a$ では $B_x = 0$ 、 $y = 0, b$ では $B_y = 0$ 。 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ から後述の B_x, B_y は $\partial_x B_z, \partial_y B_z$ に比例するため、 B_z に Neumann 境界条件が課される。

$$B_z = B \cos \alpha x \cos \beta y, \quad \alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n \geq 0.$$

$\kappa^2 = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ として Maxwell 方程式から

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{ik}{\kappa^2} \partial_x B_z = -\frac{ikB\alpha}{\kappa^2} \sin \alpha x \cos \beta y, \\ B_y &= \frac{ik}{\kappa^2} \partial_y B_z = -\frac{ikB\beta}{\kappa^2} \cos \alpha x \sin \beta y, \\ E_x &= \frac{i\omega}{\kappa^2} \partial_y B_z = -\frac{i\omega B\beta}{\kappa^2} \cos \alpha x \sin \beta y, \\ E_y &= -\frac{i\omega}{\kappa^2} \partial_x B_z = \frac{i\omega B\alpha}{\kappa^2} \sin \alpha x \cos \beta y. \end{aligned}$$

TE では $E_z = 0$ である。 $m = n = 0$ は $\kappa = 0$ となり上記式の極限では得られないが、中空・単連結な完全導体導波管に非自明な TEM 伝播モードは存在しない（非伝播静的解を除く）。

5. $E_z = 0$ (TE) の最低遮断周波数

候補 $(m, n) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ のうち、 TE_{00} は除外する。

$$\omega_{c,mn} = c\kappa = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

$a > b$ だから $\pi c/a < \pi c/b < \pi c\sqrt{a^{-2} + b^{-2}}$ 。よって

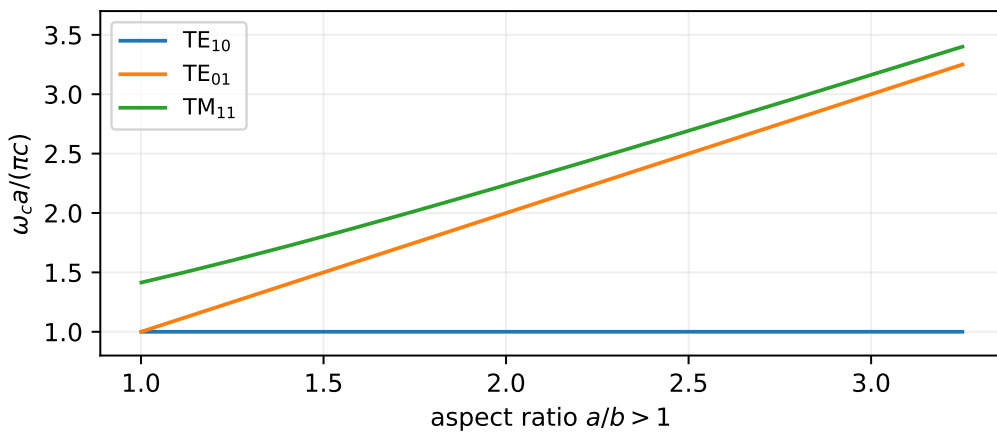
$$\boxed{\text{最小の TE モードは } (m, n) = (1, 0), \quad \omega_{c,TE_{10}} = \frac{\pi c}{a}}.$$

6. $B_z = 0$ (TM) の最低遮断周波数

TM では壁面で $E_z = 0$ なので $m, n \geq 1$ が必須。従って最小は $(1, 1)$ 、

$$\boxed{\text{最小の TM モードは } (m, n) = (1, 1), \quad \omega_{c,TM_{11}} = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}.$$

TE_{10} は TM_{11} よりも低周波で伝播できる。



図：アスペクト比 a/b に対する各モードの無次元遮断周波数。

検算の観点 $k = \sqrt{\omega^2/c^2 - \kappa^2}$ が実数のとき進行波、虚数のとき z 方向にエバネッセント。いずれの解も壁面で $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ と $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ を満たす。

2007

年度 電磁気学・古典力学

回転座標と制限三体問題

原題 第3問

この直後に原題のPDFページを原文のまま掲載します。

続けて、独自に作成した非公式解答・導出を掲載します。

原題の問題番号・掲載年度は一次資料に準拠しています。

原題：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 公式入試問題

解答編集：taku（東京大学の公表模範解答ではありません）

takuphys.com

第3問

質量 m_1 の太陽と質量 m_2 の地球がお互いの重力によってケプラー運動しているものとする。簡単のために以下では軌道の離心率は無視して円運動の場合のみを考える。それらの公転面上で太陽と地球の重心を原点とする2次元座標系として、慣性系 S と、太陽と地球が常に x 軸上の点 P_1 と点 P_2 に位置するような回転系 S' を考える (図1参照)。太陽と地球の距離を a とすれば、 P_1 と P_2 の座標はそれぞれ $(-\mu_2 a, 0)$ 、 $(\mu_1 a, 0)$ で与えられる。ただし、

$$\mu_1 \equiv \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mu_2 \equiv \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

である。また、この回転系の角速度 ω はケプラーの第3法則より、

$$G(m_1 + m_2) = \omega^2 a^3 \quad (2)$$

を満たす (G はニュートンの重力定数)。

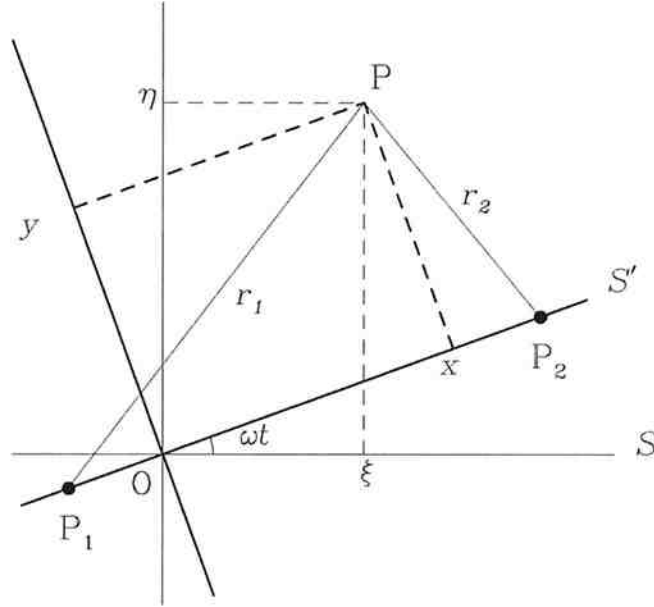


図 1:

1. この平面上の任意の点を P としたとき、 S 系における P の成分 (ξ, η) を S' 系での成分 (x, y) で表わせ。
2. S' 系からみて (x, y) の位置にある質量 m の質点を考える。 m は m_1 および m_2 に比べて十分小さく、この質点は太陽と地球のケプラー運動には影響を与えないとした時、設問1の結果からこの質点に対するラグランジアンが

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + m\omega(xy - \dot{x}y) + Gm \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) \quad (3)$$

となることを示せ。ただし、

$$r_1 \equiv \sqrt{(x + \mu_2 a)^2 + y^2}, \quad r_2 \equiv \sqrt{(x - \mu_1 a)^2 + y^2} \quad (4)$$

である。

3. この質点の S' 系における運動方程式の x 成分および y 成分を書き下せ。
4. S' 系から見たとき、この質点の加速度と速度がともに 0 となるような特別な点 ($\ddot{x} = \ddot{y} = \dot{x} = \dot{y} = 0$) はラグランジュ点と呼ばれ、全部で 5 つあることが知られている。運動方程式の y 成分を考えることで、ラグランジュ点は

$$\mu_1 \left(\frac{a}{r_1} \right)^3 + \mu_2 \left(\frac{a}{r_2} \right)^3 = 1 \quad (5)$$

あるいは

$$y = 0 \quad (6)$$

のいずれかを満たすことを示せ。

5. 式 (6) を満たす S' 系の x 軸上にあるラグランジュ点は、図 2 に示されているように、 P_1 と P_2 の外側に一つずつ、および P_1 と P_2 の中間に一つ、合わせて 3 個存在することが知られている。特に地球からみてちょうど太陽の反対側にある L_2 点は、天文観測衛星に適した位置である。この L_2 点と P_2 との距離を r_2 として運動方程式の x 成分を考えれば、 μ_2/μ_1 が $u \equiv r_2/a$ の関数として

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{3u^3}{(1+u)^2} \frac{1+u+u^2/3}{1-u^3} \quad (7)$$

と書けることを示せ。変形の際、 $\mu_1 + \mu_2 = 1$ であることに注意せよ。

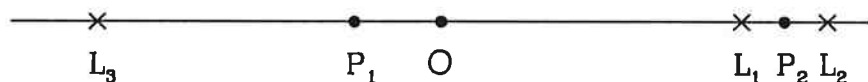


図 2:

6. 式 (7) から、 $\mu_2/\mu_1 \ll 1$ の場合 $u \ll 1$ となることがわかる。この場合、 L_2 点の位置 u を μ_2/μ_1 の最低次で求めよ。特に、太陽と地球の系 ($\mu_2/\mu_1 \approx 3 \times 10^{-6}$ 、 $a = 1.5 \times 10^{11} \text{m}$) の場合、地球と L_2 点までの距離の値を近似的に求めよ。

2007 年度（平成 19 年度） 第 3 問：回転座標と制限三体問題

記号： $\mu_i = m_i/(m_1 + m_2)$ 、 $\mu_1 + \mu_2 = 1$ 、 二天体間距離 a 、 公転角速度 ω 。 回転座標で質点位置 (x, y) 。

設問 1. 慣性座標 (ξ, η) と回転座標との関係は

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(-\omega t) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

設問 2. 慣性速度は $\mathbf{v}_{\text{inert}} = R(\omega t)(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ 。 重力ポテンシャル $-Gmm_1/r_1 - Gmm_2/r_2$ を用いれば

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + m\omega(xy - yx) + Gm \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right),$$

$r_1 = \sqrt{(x + \mu_2 a)^2 + y^2}$ 、 $r_2 = \sqrt{(x - \mu_1 a)^2 + y^2}$ 。 ここでは問 1 の回転の向きを採用した。

設問 3. Euler-Lagrange 方程式から

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= \omega^2 x - Gm_1 \frac{x + \mu_2 a}{r_1^3} - Gm_2 \frac{x - \mu_1 a}{r_2^3}, \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} &= \omega^2 y - G \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} \right) y. \end{aligned}$$

第 2 項は回転座標での Coriolis 力、 $\omega^2(x, y)$ は遠心力に対応する。

設問 4. 平衡点は速度・加速度とも 0。 y の式より

$$y \left[\omega^2 - G \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} \right) \right] = 0.$$

Kepler 則 $\omega^2 = G(m_1 + m_2)/a^3$ を使えば

$$y = 0 \quad \text{または} \quad \mu_1(a/r_1)^3 + \mu_2(a/r_2)^3 = 1.$$

非共線の平衡点は 2 つ (L_4, L_5)、 共線には 3 つ (L_1, L_2, L_3) がある。

設問 5. 地球を m_2 とし太陽と逆側の L_2 の地球からの距離を $r_2 = ua$ とすれば $x = (\mu_1 + u)a$ 、 $r_1 = (1 + u)a$ 。 x 成分の平衡式に代入すると

$$\mu_1 + u = \frac{\mu_1}{(1 + u)^2} + \frac{\mu_2}{u^2}.$$

これを $\mu_1 + \mu_2 = 1$ で整理すると

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{3u^3}{(1 + u)^2} \frac{1 + u + u^2/3}{1 - u^3}.$$

設問 6. $\mu_2/\mu_1 \ll 1$ のとき $u \ll 1$ なので

$$u \simeq \left(\frac{\mu_2}{3\mu_1} \right)^{1/3}.$$

$\mu_2/\mu_1 \simeq 3 \times 10^{-6}$, $a = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ を代入すれば $u \simeq 10^{-2}$ 、

$$r_2 = ua \simeq 1.5 \times 10^9 \text{ m}.$$

L_2 は地球から太陽と反対側に約 150 万 km。解法上は三角形点 L_4, L_5 と混同しないこと。——

原題出典：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻・当該年度入学試験問題（H19phys.pdf）。本解答は独立作成であり、東京大学の公式模範解答・採点基準ではない。原題は本解答の直前に原文画像として収録。

2006

年度 電磁気学・古典力学

真空中の平面電磁波

原題 第3問

この直後に原題のPDFページを原文のまま掲載します。

続けて、独自に作成した非公式解答・導出を掲載します。

原題の問題番号・掲載年度は一次資料に準拠しています。

原題：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 公式入試問題

解答編集：taku（東京大学の公表模範解答ではありません）

takuphys.com

第3問

以下に示す真空中での Maxwell の方程式を出発点として平面電磁波の性質を導き出したい。ここで、 $\vec{E}$ と $\vec{B}$ はそれぞれ電場と磁束密度、 ϵ_0 と μ_0 はそれぞれ真空の誘電率と透磁率である。また、 t は時間であり、 ∇ は空間座標 $\vec{r} = (x, y, z)$ についてのベクトル微分演算子である。電荷や電流の存在しない場合を考える。

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

以下の設問に答えよ。

1. 任意の三次元ベクトル $\vec{V}$ に対して次の公式が成り立つことを示せ。

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$$

2. 前問の公式を Maxwell の方程式に適用して、 $\vec{E}$ に対する波動方程式および $\vec{B}$ に対する波動方程式をそれぞれ導け。
3. 次の式で表される $\vec{E}$ および $\vec{B}$ 、すなわち平面波が前問で求めた波動方程式の解であるための条件を求めよ。ただし、 $\vec{E}_0$ 、 $\vec{B}_0$ 、 $\vec{k}$ 、 $\vec{k}'$ は定数ベクトル、 ω 、 ω' 、 α 、 α' はそれぞれ定数で、 $0 \leq \alpha < \pi$ 、 $0 \leq \alpha' < \pi$ である。

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) \quad (5)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \alpha') \quad (6)$$

4. 式 (5) と式 (6) で表される $\vec{E}$ および $\vec{B}$ がそれぞれの波数ベクトルに垂直であること、すなわち横波であることを示せ。
5. 式 (5) と式 (6) において、 $\vec{k} = \vec{k}'$ 、 $\omega = \omega'$ および $\alpha = \alpha'$ であることを示せ。
6. 式 (5) と式 (6) で表される $\vec{E}$ と $\vec{B}$ は互いに直交していることを示せ。
7. 平面電磁波の位相速度を求めよ。
8. 式 (5) と式 (6) で電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{H} (= \vec{B}/\mu_0)$ の大きさの比 $|\vec{E}|/|\vec{H}|$ が常に一定であること、およびこの比は抵抗の次元をもつことを示せ。

2006 年度（平成 18 年度） 第 3 問：真空中の平面電磁波

出発点：電荷・電流なしの真空中で $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 、 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ 、 $\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E}$ 。

設問 1. Levi-Civita 記号による計算（または成分展開）で

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V})]_i = \partial_i (\partial_j V_j) - \partial_j \partial_j V_i,$$

すなわち $\boxed{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}}$ 。

設問 2. Faraday 則の両辺に回転を取り、Gauss 則を併用すれば

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B} = 0, \quad \boxed{c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

設問 3. $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha)$ 、 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t + \alpha')$ がそれぞれ波動方程式の解になる必要十分条件（非自明な振幅）は

$$\boxed{\omega^2 = c^2 |\mathbf{k}|^2, \quad (\omega')^2 = c^2 |\mathbf{k}'|^2}.$$

設問 4. 発散が 0 なので $\boxed{\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{k}' \cdot \mathbf{B}_0 = 0}$ 。いずれも横波。

設問 5. Faraday 則・Ampère 則の位相依存を比較する ($\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0 \neq 0$)。 $\mathbf{k}'$ と ω' が一致しないと独立な位相を相殺できないので $\boxed{\mathbf{k}' = \mathbf{k}, \omega' = \omega, \alpha' = \alpha \pmod{2\pi}}$ （振幅の符号選択を固定した場合）。

設問 6. Faraday 則の振幅比較より $\boxed{\mathbf{B}_0 = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 / \omega}$ 。従って $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0 = 0$ 。

設問 7. 位相面 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{const}$ の進行速度は $\boxed{v_{\text{ph}} = \omega/|\mathbf{k}| = c}$ 。

設問 8. $|\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0| = |\mathbf{k}| E_0$ なので

$$\boxed{\frac{E_0}{H_0} = \mu_0 \frac{E_0}{B_0} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0}.$$

周波数に依存しない定数で単位は Ω （電気抵抗の次元）。補足： $\mathbf{S} = (1/\mu_0) \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ は $\mathbf{k}$ の向き。—

原題出典：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻・当該年度入学試験問題（H18phys.pdf）。本解答は独立作成であり、東京大学の公式模範解答・採点基準ではない。原題は本解答の直前に原文画像として収録。

2005

年度 電磁気学・古典力学

光電場と自由電子

原題 第3問

この直後に原題のPDFページを原文のまま掲載します。

続けて、独自に作成した非公式解答・導出を掲載します。

原題の問題番号・掲載年度は一次資料に準拠しています。

原題：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 公式入試問題

解答編集：taku（東京大学の公表模範解答ではありません）

takuphys.com

第3問

真空中で、高い強度の単色光（電磁波）と自由電子（質量 m 、電荷 $-e$ ）との相互作用を考える。電子にはたらく力 $\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ はそれぞれ光の電場と磁束密度, $\mathbf{v}$ は電子の速度) のうち, 光の磁場成分と電子との相互作用の寄与が十分小さいのはどのような場合かを具体的に考察しよう。空間内のある点で, x 方向に直線偏光した角振動数 ω を持つ単色平面波の電場を $E_x = E_0 \sin \omega t$ と表すとき, 以下の設問に答えよ。ただし, 真空中での光の速さを c とする。

1. 光の電場の振幅 E_0 と磁束密度の振幅 B_0 の比 E_0/B_0 が c であることに注意し, 電子にはたらく力のうち, 光の磁場成分と電子との相互作用の寄与が十分小さくなるための $\mathbf{v}$ の大きさに関する条件を求めよ。

以下の設問 2, 3, 5 では, 設問 1 で考察した光の磁場成分と電子との相互作用の寄与が十分小さく, 無視してよい場合を考える。

2. 時刻 $t = t_0$ で電子の速度が 0 であったとする。時刻 $t > t_0$ における光の電場 E_x 中での電子の運動エネルギーを求めよ。
3. 設問 2 で求めた運動エネルギーについて, 光の電場の 1 周期 $T = 2\pi/\omega$ にわたる平均を求めよ。また, 求めた平均が取りうる最小値を明示し, その物理的意味を簡潔に説明せよ。時間に依存するある物理量 $u(t)$ の 1 周期にわたる平均 $\langle u(t) \rangle$ は,

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t') dt'$$

で定義される。

4. 光の強度 I [W/m^2] がポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times (\mathbf{B}/\mu_0)$ (μ_0 は真空の透磁率) の大きさの 1 周期平均に相当することに注意し, 電場の振幅 E_0 を光の強度 I と $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ (ϵ_0 は真空の誘電率) を含む式で表せ。 Z_0 は真空の放射インピーダンスと呼ばれる。
5. 電子の運動エネルギーについて, 設問 3 で求めた平均が取りうる最小値を U と書く。設問 4 の結果を用い, U [J] の表式を, 光の強度 I [W/m^2], その波長 λ [m], 電子の質量 m [kg] と電荷の大きさ e [C], 光の速さ c [m/s], および Z_0 を用いて表せ。
6. 設問 5 で得られた U の表式に光の強度 I と波長 λ 以外の物理量を代入すると, 数値係数は 1.5×10^{-24} s となる。いま, $\lambda = 0.8 \mu\text{m} = 8 \times 10^{-7}$ m のとき, $I < 10^{18}$ W/m^2 であれば, 設問 1 で考察したように, 電子にはたらく力のうち, 光の磁場成分と電子との相互作用の寄与が十分小さいことを示せ。ただし, $m = 9 \times 10^{-31}$ kg とする。

2005 年度（平成 17 年度） 第 3 問：光電場と自由電子の運動

仮定：直線偏光 $E_x(t) = E_0 \sin \omega t$ 、電子電荷 $-e$ 、初速度 $v(t_0) = 0$ 、磁場の Lorentz 力は $v \ll c$ の極限で無視。

設問 1. 平面波では $E_0/B_0 = c$ 。電気力 eE_0 に対して磁気力の最大値は evB_0 なので、 $v/c \ll 1$ のとき磁場の寄与は小さい。

設問 2. 運動方程式 $m\dot{v} = -eE_0 \sin \omega t$ を積分すると

$$v(t) = \frac{eE_0}{m\omega}(\cos \omega t - \cos \omega t_0), \quad K(t) = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2}(\cos \omega t - \cos \omega t_0)^2.$$

設問 3. 1 周期平均では $\langle \cos \omega t \rangle = 0$ 、 $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$ だから

$$\overline{K}(t_0) = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \omega t_0 \right).$$

最小値は $\cos \omega t_0 = 0$ 、すなわち電場最大の時刻に放出される場合（電子は平均速度 0）で

$$U = \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2}.$$

この U が自由電子のポンドロモーティブエネルギー。

設問 4. Poynting 流束の周期平均は

$$I = \frac{E_0^2}{2Z_0}, \quad Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}.$$

設問 5. $\omega = 2\pi c/\lambda$ を代入すると

$$U = \frac{e^2 Z_0 I \lambda^2}{8\pi^2 m c^2}.$$

設問 6. 数値係数 $e^2 Z_0 / (8\pi^2 m c^2) \simeq 1.5 \times 10^{-24} \text{ s}$ 。指定 $\lambda = 0.8 \mu\text{m}$ 、 $I < 10^{18} \text{ W/m}^2$ では $U \lesssim 9.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ （約 6 eV）。平均運動エネルギーの最小値 U に対応する二乗平均平方根速度は $v_{\text{rms}} = \sqrt{2U/m} \lesssim 1.5 \times 10^6 \text{ m/s}$ 。ただし、**磁気力の無視を保証するには最大速度を調べる**。設問 2 の厳密な速度式から任意の放出位相に対して

$$|v(t)| \leq \frac{2eE_0}{m\omega} = 4\sqrt{\frac{U}{m}} \lesssim 4.2 \times 10^6 \text{ m/s}, \quad \frac{|v|}{c} \lesssim 1.4 \times 10^{-2} \ll 1.$$

従って磁場からの Lorentz 力は電気力に比べ十分小さく、**設問 1 の磁場無視の近似は自己無撞着である**。前問の U は 1 周期平均の最小値であり、粒子が自由に加速され続けるという意味ではない。

原題出典：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻・当該年度入学試験問題（H17phys.pdf）。本解答は独立作成であり、東京大学の公式模範解答・採点基準ではない。原題は本解答の直前に原文画像として収録。

2004

年度 電磁気学・古典力学

磁場中荷電粒子・重力散乱

原題 第3問・第4問

この直後に原題のPDFページを原文のまま掲載します。

続けて、独自に作成した非公式解答・導出を掲載します。

原題の問題番号・掲載年度は一次資料に準拠しています。

原題：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 公式入試問題

解答編集：taku（東京大学の公表模範解答ではありません）

takuphys.com

第3問

電磁場中での電荷 q 、静止質量 m をもつ粒子の加速を考える。電場 $\vec{E}$ 、磁場 $\vec{B}$ の下で荷電粒子はローレンツ力

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

を受ける。ここで、 $\vec{v}$ は粒子の速度で、磁場 $\vec{B}$ は常に z 軸方向に一樣で一定、つまり、 $\vec{B} = (0, 0, B)$ とする。また、荷電粒子の運動に伴う電磁波の放出を無視する。

まず、粒子の速度は光速 c に比べて十分小さく、したがって、相対論的効果を考えなくて良いとする。

1. 電場が存在せず、一樣な磁場だけがある場合、粒子を時刻 $t = 0$ に初速度 $\vec{v} = (v_0, 0, 0)$ で $\vec{x} = (0, 0, 0)$ から放出した場合にこの粒子の時刻 t での速度と位置を求めよ。
2. 一樣磁場に周期的に変動する電場 $\vec{E} = (-E \sin(\Omega t), -E \cos(\Omega t), 0)$ を加え、設問 1 と同じ初期条件で荷電粒子を放出した場合、時刻 t での粒子の速度を求めよ。ただし、 E は定数である。
3. $\Omega = qB/m$ のとき十分時間がたてば荷電粒子の運動エネルギーが時間とともに増大することを示せ。

次に、粒子の速度が光速に比べて無視できない（相対論的）場合を考える。このときは粒子の運動量 $\vec{p}$ 、エネルギー $\mathcal{E}$ は相対論的表式

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad \mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

で与えられる。ここで $v = |\vec{v}|$ である。また、相対論的な場合も式 (1) で与えられるローレンツ力 $\vec{F}$ を使って運動方程式は $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ と書ける。

4. 設問 1 と同じく一樣な磁場だけがあり、電場がない場合、粒子の速度が相対論的のときも、運動方程式の両辺と速度 $\vec{v}$ との内積をとることによって粒子の速さ v が運動中一定であることを示せ。
5. 前問までの結果を使って運動方程式を解き、粒子の速度 $\vec{v}(t)$ を求めよ。
6. 相対論的な場合の結果を考慮して、設問 3 と同じく一樣な磁場と振動数 $\Omega = qB/m$ で変動する電場が存在する場合、粒子の運動エネルギー $(\mathcal{E} - mc^2)$ の増加はとまる。その理由を述べよ。ただし、最初荷電粒子の速さは光速に比べて小さいとして、具体的に相対論的な運動方程式を解く必要はない。

第4問

宇宙探査機は燃料の不足を補うため、しばしばスイングバイという航法で加速を行うことがある。(例えばアポロ13号は月の重力を、火星探査機のぞみは地球の重力を使って加速した。) 中心力場の力学からこの原理について考える。

1. 2次元の極座標系 (r, ϕ) を用いて中心力ポテンシャル $U(r)$ 中を運動する質量 m の質点の Lagrangian を書き、Euler-Lagrange の方程式を用いて角運動量の保存則を導け。
2. 図1のように質量 m の探査機が質量 M の惑星に対して距離 b の漸近線 SS' に沿って無限遠方から速さ v で進入し、漸近線 TT' に沿って出てゆくものとする。ただし、 $M \gg m$ の関係があり、惑星は静止しているとみなしてよい。惑星の位置を原点とし、探査機の座標を (r, ϕ) とするとき次式が成り立つことを示せ。

$$\dot{\phi} = \frac{vb}{r^2} \quad (1)$$

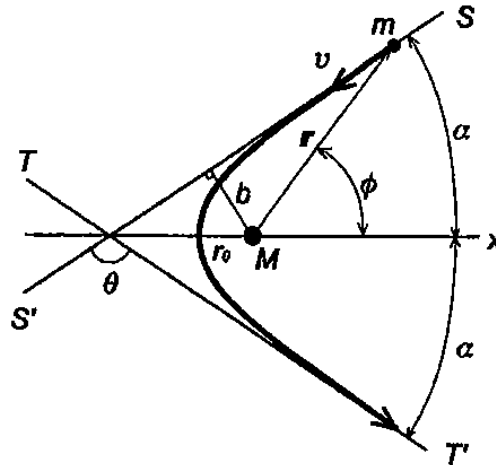


図1:

3. 探査機が惑星に最も近づいた時の惑星までの距離 r_0 を v, b, M と重力定数 G を用いて表わせ。ただし、ポテンシャル $U(r)$ は $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ と表わされる。
4. 探査機の (x, y) 座標系における速度を (v_x, v_y) とおくと、 v_x と ϕ の間に次の微分方程式が成立することを示せ。ただし、式(1)を用いてよい。

$$dv_x = -\frac{GM}{vb} \cos \phi d\phi \quad (2)$$

5. 入射前後における角度変化 θ が $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{GM}{v^2 b}$ で表わされることを示せ。ただし、式(2)を用いてよい。

6. 図2のように惑星が速度ベクトル $\vec{W}$ で太陽に対して運動していたところへ探査機がやってきた。探査機の太陽に対する相対速度ベクトルが入射前は $\vec{v}$ 、出射後は $\vec{u}$ であったとして、惑星の運動量の変化を無視せずに、入射前後における探査機のエネルギー変化、 $\frac{1}{2}m|\vec{u}|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$ を求めよ。ただし、惑星の引力圏内では、太陽からの引力は無視できるものとする。
7. 上の結果から探査機の加速が可能なことを示せ。また、増加した探査機のエネルギーはどこから来たか答えよ。

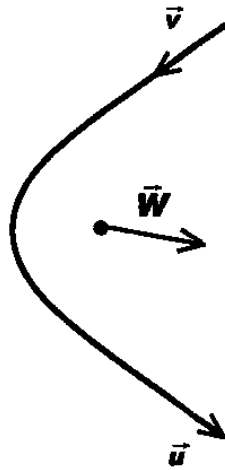


図 2:

2004 年度 (平成 16 年度) 第 3・4 問: 磁場中運動と重力散乱

第 3 問: ローレンツ力・円偏光によるサイクロトロン共鳴

$\omega_c = qB/m$ とする (q の符号付き)。座標 z は一様磁場方向。

設問第 3 問 1. $\mathbf{E} = 0$ 、 $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$ 。複素速度 $w = v_x + iv_y$ を置くと $\dot{w} = -i\omega_c w$ より

$$w = v_0 e^{-i\omega_c t}, \quad \boxed{x = \frac{v_0}{\omega_c} \sin \omega_c t, \quad y = \frac{v_0}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1), \quad z = 0.}$$

$\omega_c \rightarrow 0$ では $x = v_0 t, y = 0$ に連続的に戻る。

設問第 3 問 2. $\mathbf{E} = (-E \sin \Omega t, -E \cos \Omega t, 0)$ のとき

$$\dot{w} + i\omega_c w = -i \frac{qE}{m} e^{-i\Omega t}.$$

$\Omega \neq \omega_c$ では

$$\boxed{w(t) = v_0 e^{-i\omega_c t} - \frac{qE}{m} \frac{e^{-i\omega_c t} - e^{-i\Omega t}}{\Omega - \omega_c}}.$$

位置 $\zeta = x + iy$ についても積分すると ($\omega_c \Omega \neq 0$)

$$\boxed{\zeta(t) = v_0 \frac{1 - e^{-i\omega_c t}}{i\omega_c} + \frac{qE/m}{\Omega - \omega_c} \left[\frac{1 - e^{-i\Omega t}}{i\Omega} - \frac{1 - e^{-i\omega_c t}}{i\omega_c} \right]}, \quad z(t) = 0.$$

特殊な周波数はこの式の連続極限で得る。

設問第 3 問 3. 共鳴 $\Omega = \omega_c$ では極限を取ると

$$\boxed{w(t) = \left(v_0 - i \frac{qE}{m} t \right) e^{-i\omega_c t}}, \quad \boxed{K(t) = \frac{m}{2} \left[v_0^2 + \left(\frac{qE}{m} t \right)^2 \right]}.$$

従って時間の二乗に比例してエネルギーが増える。初期位相がこの問題の指定どおりであれば交差項はない。

設問第 3 問 4-5. $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ なら磁場のみで $\frac{d}{dt}(\gamma m c^2) = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = 0$ 。従って γ 一定、円運動で

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = v_0 (\cos \omega_r t, -\sin \omega_r t, 0)}, \quad \omega_r = \frac{qB}{\gamma m}, \quad \gamma = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}.$$

設問第 3 問 6. 電場によって γ が増すと実際の旋回周波数 $|q|B/(\gamma m)$ が低下し、固定電場周波数 $\Omega = qB/m$ との位相共鳴が崩れる。非相対論的な t^2 増大則を長時間そのまま外挿できない。

第 4 問：中心力場での双曲線散乱（重力スイングバイ）

設問第 4 問 1. 極座標で

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r), \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0.$$

動径の Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \left(mr\dot{\phi}^2 - \frac{GMm}{r^2}\right) = 0 \iff \boxed{\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{GM}{r^2}}.$$

また ϕ は循環座標なので $\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0$ 。無限遠での衝突径数 b 、入射速度 v から角運動量は $mr^2\dot{\phi} = mvb$ 。

設問第 4 問 2. 直ちに $\boxed{\dot{\phi} = vb/r^2}$ 。設問第 4 問 3. 近点 r_0 で $\dot{r} = 0$ 。エネルギー保存を使うと

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{mv^2b^2}{2r_0^2} - \frac{GMm}{r_0}, \quad \boxed{r_0 = \sqrt{b^2 + (GM/v^2)^2} - GM/v^2}.$$

設問第 4 問 4. 重力加速度の x 成分は $dv_x/dt = -GM \cos \phi / r^2$ 。 $dt = r^2 d\phi / (vb)$ を代入すれば

$$\boxed{dv_x = -\frac{GM}{vb} \cos \phi d\phi}.$$

設問第 4 問 5. 近点方向を $\phi = 0$ とし、無限遠における軌道の両端を $\phi = \pm\phi_\infty$ とおく。中心力散乱の対称性から $\phi_\infty = (\pi + \theta)/2$ 。式 (2) を積分すると

$$\Delta v_x = -\frac{GM}{vb} \int_{-\phi_\infty}^{\phi_\infty} \cos \phi d\phi = -\frac{2GM}{vb} \sin \phi_\infty = -\frac{2GM}{vb} \cos \frac{\theta}{2}.$$

一方、入射・出射速度の幾何から $\Delta v_x = -2v \sin(\theta/2)$ 。これらを等置すると

$$\boxed{\tan \frac{\theta}{2} = \frac{GM}{v^2b}}.$$

散乱角は $b \rightarrow \infty$ で 0、 $b \rightarrow 0$ で π に向かう。惑星の静止系では速さは一定でも、太陽系では惑星の公転速度を足すため探査機のエネルギーが変化し得る。

設問第 4 問 6. 惑星の太陽に対する速度を $\mathbf{W}$ 、探査機の惑星相対の入射・出射速度を $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ とする。太陽系速度はそれぞれ $\mathbf{W} + \mathbf{v}$ と $\mathbf{W} + \mathbf{u}$ 。弾性重力散乱では $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$ だから

$$\boxed{\Delta K_{\text{heliocentric}} = \frac{m}{2}(|\mathbf{W} + \mathbf{u}|^2 - |\mathbf{W} + \mathbf{v}|^2) = m\mathbf{W} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})}.$$

設問第 4 問 7. $\mathbf{W} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) > 0$ (図 2 のように出射相対速度の惑星公転方向成分が増す) ならば探査機は加速され、太陽系での運動エネルギーが増加する。エネルギー源は惑星の公転運動のエネルギーである。現実には惑星の反跳によるエネルギー減少が生じるが $M \gg m$ なので変化率は極めて小さい。

原題出典：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻・当該年度入学試験問題 (H16phys.pdf)。本解答は独立作成であり、東京大学の公式模範解答・採点基準ではない。原題は本解答の直前に原文画像として収録。

2003

年度 電磁気学・古典力学

同軸・偏心円筒導体

原題 第3問

この直後に原題のPDFページを原文のまま掲載します。

続けて、独自に作成した非公式解答・導出を掲載します。

原題の問題番号・掲載年度は一次資料に準拠しています。

原題：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 公式入試問題

解答編集：taku（東京大学の公表模範解答ではありません）

takuphys.com

問題 3

真空中に無限に長い直線状導線と半径 $R[\text{m}]$ の無限に長い中空の円筒導体が図 1 のように置かれている。導線は円筒の中心 O から x 軸方向に $x_0[\text{m}]$ ($0 \leq x_0 < R$) の位置にあるものとする。任意の点 A (中心 O から距離 $r[\text{m}]$ 、 x 軸からの角度 $\phi[\text{rad}]$) での動径方向と円周方向の電場を $E_r, E_\phi[\text{V/m}]$ 、磁束密度を $B_r, B_\phi[\text{Wb/m}^2]$ として、以下の設問に答えよ。ただし、真空中の誘電率と透磁率を ϵ_0, μ_0 とし、SI 単位系 (MKSA 単位系) を用いるものとする。

まず、導線が円筒の中心 O にある場合 ($x_0=0$) を考える。以下の設問に答えよ。

1. 導線に電流 $I[\text{A}]$ が紙面の下から上の方に、円筒導体にはその反対方向に電流 $I[\text{A}]$ が一様に流れているとする。円筒内 ($r < R$) 及び円筒外 ($r > R$) の各領域で、磁束密度 $B_r, B_\phi[\text{Wb/m}^2]$ を求めよ。

2. 導線が $\lambda[\text{C/m}]$ の線電荷密度 (単位長さ当りの電荷) で一様に帯電している場合を考える。ただし、円筒は接地されているものとする。

(a) 円筒内 ($r < R$) 及び円筒外 ($r > R$) の各領域で、電場 $E_r, E_\phi[\text{V/m}]$ を求めよ。

(b) 円筒面に生じる面電荷密度 $\sigma[\text{C/m}^2]$ と単位長さ当りの総電荷量 $\lambda_t[\text{C/m}]$ を求めよ。

(c) 円筒が接地されずに絶縁されていた場合、電場は円筒内と円筒外でどうなるか。ただし、絶縁前に帯電はされていないものとする。

次に、導線が円筒導体の中心 O からずれている場合 ($0 < x_0 < R$) を考える。以下の問いに答えよ。

3. 設問 1 と同様に、導線に電流 $I[\text{A}]$ が紙面の下から上の方に、円筒導体にはその反対方向に電流 $I[\text{A}]$ が一様に流れている。円筒外 ($r > R$) での磁束密度 $B_r, B_\phi[\text{Wb/m}^2]$ を求めよ。

4. 設問 2 と同様に、導線が $\lambda[\text{C/m}]$ の線電荷密度 (単位長さ当りの電荷) で一様に帯電している。ただし、円筒は接地されているものとする。

(a) 円筒導体に対する電気映像が、中心 O から x 軸方向に R^2/x_0 離れた位置にある線電荷密度 $-\lambda$ の無限に長い導線であることを示し、円筒内の電場 E_r, E_ϕ [V/m] を求めよ。

(b) 円筒面に生じる面電荷密度 σ [C/m²] を求めよ。

(c) 円筒を左右半分に分けて考えた時、 $x > 0$ の部分 ($0^\circ \leq \phi < 90^\circ$ 及び $270^\circ < \phi \leq 360^\circ$) と $x < 0$ の部分 ($90^\circ < \phi < 270^\circ$) の半円筒面に帯電する単位長さ当りの電荷 λ_+, λ_- [C/m] をそれぞれ求め、

$$\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} = S \cdot x_0$$

となる S を求めよ。ただし、 $x_0 \ll R$ として考えよ。

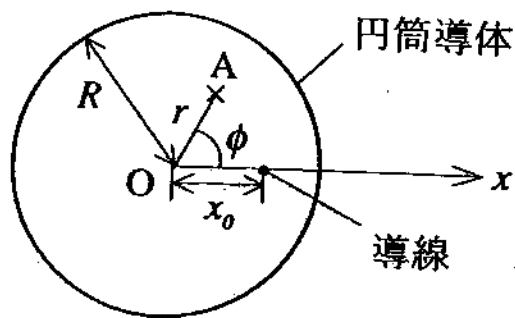


図 1

2003 年度（平成 15 年度） 第 3 問：円筒導体と偏心導線

幾何：無限長円筒導体の半径 R 、内部の直線導線は z 軸に平行で横位置 $\mathbf{a} = x_0 \hat{\mathbf{x}}$ 。電流は内線に $+I\hat{\mathbf{z}}$ 、薄い円筒面に総量 $-I$ が一様に流れる。

設問 1. 中心配置 $x_0 = 0$ 。Ampère 則を半径 r の円周に適用すると、内側に包まれる電流は I ($r < R$)、外側は $I - I = 0$ 。従って

$$B_r = 0, \quad B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r < R), \quad B_\phi = 0 \quad (r > R).$$

設問 2(a)(b). 中心導線の電荷密度を λ とすると、円筒接地時、Gauss 則と導体の等電位条件から

$$\mathbf{E}(r < R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{E}(r > R) = 0, \quad \sigma_{\text{inner}} = -\frac{\lambda}{2\pi R}, \quad \lambda_{\text{cylinder}} = -\lambda.$$

ここで σ は円筒の空洞側表面電荷。外側の表面電荷は接地により 0 となる。

設問 2(c). 円筒が接地されず、初期に中性なら内部に $-\lambda$ 、外部に $+\lambda$ が誘導される。空洞内は上式と同じ、円筒外には

$$\mathbf{E}(r > R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}.$$

設問 3. 内部 $\mathbf{a}$ への線電流と、円筒面上の一様な逆向き面電流がつくる磁場の和を取る。 $r > R$ で

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \times \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^2} - \frac{\mathbf{r}}{r^2} \right].$$

円筒外で全電流が 0 でも、偏心配置では完全消磁ではない（多極成分が残る）。

設問 4(a). 接地円筒の空洞内に λ を置いた場合、鏡像線電荷 $-\lambda$ を $b = R^2/x_0$ に置けば半径 R 上が等電位となる。 $\mathbf{b} = b\hat{\mathbf{x}}$ として

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^2} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|^2} \right], \quad r < R.$$

鏡像電荷は物理的な電荷ではなく、空洞内の境界値問題の数学的表現である。

設問 4(b). 導体内側表面の法線は $-\hat{\mathbf{r}}$ なので

$$\sigma(\phi) = -\frac{\lambda}{2\pi R} \frac{R^2 - x_0^2}{R^2 + x_0^2 - 2Rx_0 \cos \phi}.$$

設問 4(c). $x_0 \ll R$ なら $\sigma(\phi) = -\frac{\lambda}{2\pi R} [1 + 2(x_0/R) \cos \phi + O(x_0^2/R^2)]$ 。右半分を $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ 、左半分を $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$ とし積分すれば

$$\lambda_+ = -\frac{\lambda}{2} - \frac{2\lambda x_0}{\pi R} + O(x_0^2/R^2), \quad \lambda_- = -\frac{\lambda}{2} + \frac{2\lambda x_0}{\pi R} + O(x_0^2/R^2).$$

ゆえに

$$\boxed{\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} = \frac{4x_0}{\pi R} + O(x_0^2/R^2)}, \quad \boxed{S = \frac{4}{\pi R}}.$$

原題出典：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻・当該年度入学試験問題（H15phys.pdf）。本解答は独立作成であり、東京大学の公式模範解答・採点基準ではない。原題は本解答の直前に原文画像として収録。

2002

年度 電磁気学・古典力学

誘電体界面・Fresnel係数

原題 第3問

この直後に原題のPDFページを原文のまま掲載します。

続けて、独自に作成した非公式解答・導出を掲載します。

原題の問題番号・掲載年度は一次資料に準拠しています。

原題：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 公式入試問題

解答編集：taku（東京大学の公表模範解答ではありません）

takuphys.com

問題 3

角振動数 ω の単色電磁波が真空から誘電体に入射する場合を考える。
Maxwell の方程式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \frac{\partial (\epsilon \mathbf{E})}{\partial t}\end{aligned}$$

ここで $\mathbf{E}$ は電場、 $\mathbf{B}$ は磁場、 ϵ は誘電率、 μ は透磁率を表す。図のように、3次元空間において $x < 0$ が真空、 $x > 0$ が誘電体であるとする。真空の誘電率、透磁率をそれぞれ ϵ_0 , μ_0 で表し、誘電体の誘電率は $\epsilon_1 (> \epsilon_0)$, 透磁率は μ_0 で与えられるものとする。電場、磁場はそれぞれ、入射波に対しては $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t)$ 、屈折波に対しては $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)$ 、反射波に対しては $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}_2(\mathbf{r}, t)$ とする。以下の問に、解答に至る筋道を添えて答えよ。

1. 真空と誘電体の境界 $x = 0$ において、

$$E_{0,t}(0, y, z, t) + E_{2,t}(0, y, z, t) = E_{1,t}(0, y, z, t) \quad (1)$$

$$\epsilon_0 [E_{0,x}(0, y, z, t) + E_{2,x}(0, y, z, t)] = \epsilon_1 E_{1,x}(0, y, z, t) \quad (2)$$

$$B_{0,t}(0, y, z, t) + B_{2,t}(0, y, z, t) = B_{1,t}(0, y, z, t) \quad (3)$$

が成立する。ここで添字の t は各ベクトルの真空と誘電体の境界に平行な成分、添字の x は x 成分を表す。

- (a) (1) 式が成立することを示せ。

- (b) 誘導電荷密度 ρ と電場 $\mathbf{E}$ の間には関係式 $\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ が成立する。

誘電体の表面 ($x = +0$) における電荷の面密度 $\sigma(y, z, t)$ を

$E_{1,x}(0, y, z, t)$ 、 ϵ_0 、 ϵ_1 を用いて表せ。

2. 入射波の方向が xy 面にあるように座標軸をとり、 x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ で表す。入射波の進行方向の単位ベクトルを $\mathbf{n}_0 = \hat{x} \cos \theta_0 + \hat{y} \sin \theta_0$ ($0 < \theta_0 < \pi/2$) とし、入射波の磁場 $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t)$ が z 方向に直線偏光している場合、

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t) = \hat{z} B_0 \exp[i(k_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

を考える。入射波の電場は、

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp[i(k_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

と表す。

- (a) k_0 を ω 、 ϵ_0 、 μ_0 を用いて表せ。
 (b) 入射波の電場の振幅 E_0 を B_0 、 $\hat{z}$ 、 k_0 、 $\mathbf{n}_0$ 、 ω を用いて表せ。
 3. 屈折波、反射波の磁場をそれぞれ、

$$B_1(\mathbf{r}, t) = \hat{z} B_1 \exp[i(k_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

$$B_2(\mathbf{r}, t) = \hat{z} B_2 \exp[i(k_0 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

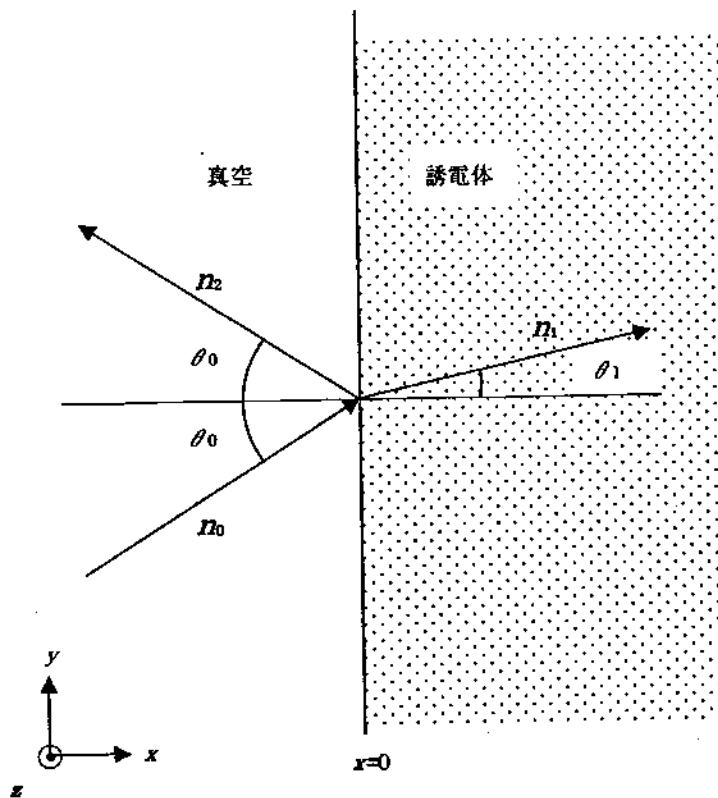
と表す。 $\mathbf{n}_1$ 、 $\mathbf{n}_2$ はそれぞれ屈折波、反射波の進行方向の単位ベクトルであり、これらを

$$\mathbf{n}_1 = \hat{x} \cos \theta_1 + \hat{y} \sin \theta_1$$

$$\mathbf{n}_2 = -\hat{x} \cos \theta_0 + \hat{y} \sin \theta_0$$

と表す。

- (a) (3) 式を用いて入射角 θ_0 と屈折角 θ_1 の関係式を求めよ。
 (b) (1) 式と (3) 式を用いて B_1 、 B_2 を求めよ。答えは k_0 、 k_1 、 θ_0 、 θ_1 、 B_0 を用いて表せ。
 (c) $\theta_0 + \theta_1 = \pi/2$ のとき、何が起こるか。



2002 年度 (平成 14 年度) 第 3 問: 誘電体界面の反射・屈折

設定: $x < 0$ 真空 (ε_0, μ_0)、 $x > 0$ 誘電体 (ε_1, μ_0)。入射・反射・透過の $\mathbf{B}$ は z 偏光。複素表示 $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ 。

設問 1(a). 境界をまたぐ微小長方形に $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -d\Phi_B/dt$ を適用し、面積を 0 にすると

$$\mathbf{E}_{0t} + \mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t}.$$

Ampère-Maxwell の積分形から自由表面電流がなければ $\mathbf{H}_t$ も連続となる。Gauss の法則から自由表面電荷がなければ D_n が連続する。

設問 1(b). 線形誘電体の分極 $\mathbf{P} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\mathbf{E}_1$ 。誘電体領域 $x > 0$ の外向き法線は $-\hat{\mathbf{x}}$ なので、束縛面電荷密度は

$$\sigma_{\text{bound}} = \mathbf{P} \cdot (-\hat{\mathbf{x}}) = (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)E_{1x}.$$

これは自由表面電荷 $\sigma_{\text{free}} = 0$ と区別する。

設問 2(a)(b). 波動方程式より $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ Faraday 則 $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mathbf{B}$ を用い、 $\mathbf{n} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ かつ $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ なら

$$\mathbf{E} = \frac{\omega B}{k}(-\sin\theta, \cos\theta, 0).$$

入射波では $k = k_0$ 、 $\theta = \theta_0$ 、 $B = B_0$ を代入する。

設問 3(a). 界面に平行な位相が全ての (y, t) で一致するから

$$k_0 \sin\theta_0 = k_1 \sin\theta_1, \quad \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_1} = \frac{k_1}{k_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}.$$

設問 3(b). H_z の連続性 (共通の μ_0) から $B_0 + B_2 = B_1$ 。 E_y の連続性と前問の結果より

$$\frac{\omega}{k_0}(B_0 - B_2) \cos\theta_0 = \frac{\omega}{k_1}B_1 \cos\theta_1.$$

これらを解いて

$$\frac{B_2}{B_0} = \frac{k_1 \cos\theta_0 - k_0 \cos\theta_1}{k_1 \cos\theta_0 + k_0 \cos\theta_1}, \quad \frac{B_1}{B_0} = \frac{2k_1 \cos\theta_0}{k_1 \cos\theta_0 + k_0 \cos\theta_1}.$$

ここでは磁場振幅の係数であり、教科書によくある電場振幅の反射係数と符号が異なる場合がある。

設問 3(c). $B_2 = 0$ になる条件は $k_1 \cos\theta_0 = k_0 \cos\theta_1$ 。Snell 則と合わせると $\theta_0 + \theta_1 = \pi/2$ となる。すなわち Brewster 角

$$\tan\theta_B = k_1/k_0 = \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0}.$$

検算: $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ では $B_2 = 0$, $B_1 = B_0$ 。 _____

原題出典: 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻・当該年度入学試験問題 (H14phys.pdf)。本解答は独立作成であり、東京大学の公式模範解答・採点基準ではない。原題は本解答の直前に原文画像として収録。

2001

年度 電磁気学・古典力学

等加速度ロケット・固有時

原題 第4問

この直後に原題のPDFページを原文のまま掲載します。

続けて、独自に作成した非公式解答・導出を掲載します。

原題の問題番号・掲載年度は一次資料に準拠しています。

原題：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 公式入試問題

解答編集：taku（東京大学の公表模範解答ではありません）

takuphys.com

[問題 4]

ロケットの等加速度運動を相対論的に考察する。以下では一次元的な運動のみを考え、静止した観測者の系で時刻 t におけるロケットの座標を $x(t)$ と書く。

1. ロケットに固定された時計が示す時間を固有時間 τ と呼ぶ。観測系における時刻 t_1 から t_2 の間の固有時間の経過は光速を c として

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2}$$

で与えられることを、ローレンツ変換を用いて示せ。ここでローレンツ変換とは、ある座標系 (t, x) とそれに対して x 軸方向に速度 v で運動している座標系 (t', x') の間では次のように定義される、

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} ct - \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} x \\ x' &= -\frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} ct + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} x \end{aligned}$$

2. 相対論的な速度ベクトルおよび加速度ベクトルは $(u^\mu) = (c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau})$, $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$, $(\mu = 0, 1)$ で記述される。このとき常に

$$u^\mu u_\mu = c^2, \quad u^\mu a_\mu = 0 \quad (1)$$

が成立することを示せ。ただし $u^\mu v_\mu \equiv u^0 v^0 - u^1 v^1$

3. 以下ではロケットの等加速度運動、すなわち運動する物体の静止系において正方向に定数 g (> 0) で加速されている状況を考察する。このときロケットの加速度ベクトルが $a^\mu a_\mu = -g^2$ をみたすことを示せ。またそれと (1) を用いて u^μ に対する次の運動方程式を導け。

$$\frac{du^0(\tau)}{d\tau} = \frac{g}{c} u^1(\tau) \quad \frac{du^1(\tau)}{d\tau} = \frac{g}{c} u^0(\tau) \quad (2)$$

4. 初期条件 $\tau = 0$ で $t = x = \frac{dx}{d\tau} = 0$ という初期条件のもとに運動方程式 (2) を解き、 t, x をロケットの固有時間 τ の関数として求めよ。
5. これから例えば g を地表の重力加速度 ($\approx 10\text{m/秒}^2$) とした場合、地球から銀河の中心まで行くのに (距離約 3 万光年) ロケットの固有時間はどれくらい経過するか。有効数字二桁で答えよ。ただし $\ln(10) \approx 2.3$, $1\text{年} \approx 3.1 \times 10^7$ 秒を用いて良い。
6. 地球からこのロケットを観測するため、信号を光速で送りそれがロケットで反射して返ってくるまでの時間を計測する。時刻 t に送った信号が返ってくるまでの時間間隔を求めよ。特にこの観測が不能になるのはどのような場合か理由とともに考察せよ。

2001 年度 (平成 13 年度) 第 4 問: 等加速度ロケットと固有時

解法の骨格: Minkowski 計量 $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$ 、4 元速度、固有加速度一定の双曲線運動、光信号の零測地線。

設問 1. Lorentz 変換を $ct' = \gamma(ct - \beta x)$ 、 $x' = \gamma(x - \beta ct)$ と置く。微小な移動に対して

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2.$$

したがって固有時はどちらの慣性系でも $d\tau = dt \sqrt{1 - v_x^2/c^2}$ と書ける。Lorentz 不変なのは微小固有時 $d\tau = dt \sqrt{1 - v_x^2/c^2}$ 全体である。平方根因子 $\sqrt{1 - v_x^2/c^2}$ 単独は Lorentz 不変ではない (観測系によって速度が変わるため)。

設問 2. 4 元速度 $u^\mu = (c dt/d\tau, dx/d\tau)$ の規格化は

$$u^\mu u_\mu = c^2, \quad \frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) = 2u^\mu a_\mu = 0.$$

従って $u^\mu a_\mu = 0$ 。計量の符号は $(+, -)$ を採用した。

設問 3. 静止系で加速度の大きさが常に g ならば固有加速度 $a^\mu a_\mu = -g^2$ 。 u^μ を rapidity η で

$$u^0 = c \cosh \eta, \quad u^1 = c \sinh \eta, \quad a^\mu = c \frac{d\eta}{d\tau} (\sinh \eta, \cosh \eta)$$

と書けば $|d\eta/d\tau| = g/c$ 。初期静止・正方向加速を選ぶと $\eta = g\tau/c$ であり、原題 (2) の連立方程式を得る。

設問 4. $u^0(0) = c$, $u^1(0) = 0$ を用いた解とその積分は

$$\boxed{ct(\tau) = \frac{c^2}{g} \sinh \frac{g\tau}{c}}, \quad \boxed{x(\tau) = \frac{c^2}{g} \left(\cosh \frac{g\tau}{c} - 1 \right)}.$$

世界線は $(x + c^2/g)^2 - c^2 t^2 = (c^2/g)^2$ を満たす。

設問 5. 地球との座標距離を L とすると

$$\tau_L = \frac{c}{g} \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{gL}{c^2} \right).$$

$g = 10 \text{ m s}^{-2}$, $L = 3 \times 10^4$ 光年、1 光年 $\simeq 9.46 \times 10^{15} \text{ m}$ を代入すると、 $gL/c^2 \simeq 3.16 \times 10^4$ より $g\tau_L/c \simeq 11.1$ 、 $\tau_L \simeq 3.3 \times 10^8 \text{ s}$ 、すなわち **約 10 年** (有効数字 1 桁)。地球系の座標時間ではない点に注意。

設問 6. 地球から t_e に発せられた光の直線は $x = c(t - t_e)$ 。ロケットの反射時刻を (t, x) とすると $t_e = t - x/c$ 、地球への帰着時刻は $t_r = t + x/c$ 。上の世界線から

$$t_e = \frac{c}{g}(1 - e^{-g\tau/c}), \quad t_r = \frac{c}{g}(e^{g\tau/c} - 1), \quad \boxed{t_r - t_e = \frac{2x(\tau)}{c}}.$$

$t_e \rightarrow c/g$ が上限となる。 $t_e \geq c/g$ に出した信号は永遠にロケットに追いつかない (加速度地平線)。発信時刻が限界に近づくと帰着までの時間は発散する。 _____

原題出典: 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻・当該年度入学試験問題 (H13phys.pdf)。本解答は独立作成であり、東京大学の公式模範解答・採点基準ではない。原題は本解答の直前に原文画像として収録。

東京大学大学院 理学系研究科・物理学専攻

院試数学 問題・詳解集

2026年度 → 2001年度

新しい年度から読む・降順再編集版

収録：25年度分（2021年度は原資料なし）

各年度の原題と独立作成の解答・解説を組み合わせ掲載

本文は既刊の数学編13巻から再配置

編集方針：出題年度ごとに原題を先に、そのあと解答を掲載。

非公式解答集／大学公表の模範解答ではありません。

年度別目次

2026年度から2001年度へ降順 問題 → 解答の順

2026 年度	p. 3	2012 年度	p. 93
2025 年度	p. 9	2011 年度	p. 100
2024 年度	p. 14	2010 年度	p. 109
2023 年度	p. 20	2009 年度	p. 117
2022 年度	p. 26	2008 年度	p. 124
2020 年度	p. 33	2007 年度	p. 133
2019 年度	p. 39	2006 年度	p. 140
2018 年度	p. 47	2005 年度	p. 147
2017 年度	p. 55	2004 年度	p. 154
2016 年度	p. 62	2003 年度	p. 159
2015 年度	p. 70	2002 年度	p. 165
2014 年度	p. 78	2001 年度	p. 172
2013 年度	p. 85		

注：2021年度は原資料に含まれません。付録（復習一覧）は p. 180 から。

数学 | 年度別問題

2026

年度

出題テーマ / 編集上の分類

冪零行列・行列指数／特性曲線

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2026年度

冪零行列・行列指数 / 特性曲線法

出典：既刊数学編 2026年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第4問

1. ゼロでない実数 $a \in \mathbb{R}$ を用いて $N \times N$ 実行列 $A = (A_{ij})$ ($i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$) を

$$A_{ij} = \begin{cases} a, & i = j + 1 \text{ のとき} \\ 0, & i \neq j + 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

により定める。このとき以下の設問に答えよ。

- (a) $N = 4$ の場合

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

である。このとき A^2 , A^3 , A^4 を求めよ。

- (b) I を $N \times N$ の単位行列とする。 $(I - A)^{-1}$ の (i, j) 成分 $((I - A)^{-1})_{ij}$ を求めよ。

- (c) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ に関する常微分方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

を考える。ただし、 $\top$ は転置記号である。この常微分方程式の解 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))^\top$ が $t = 0$ で

$$x_i(0) = \begin{cases} 1, & i = 1 \text{ のとき} \\ 0, & i \neq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

を満たすとき、 $t > 0$ に対して $x_i(t)$ を求めよ。

- (d) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ に対して $A^{N-1}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ とする。このとき、 $\mathbf{x}$, $A\mathbf{x}$, $\dots$, $A^{N-1}\mathbf{x}$ は互いに線形独立であること、すなわち、 $c_0, c_1, \dots, c_{N-1} \in \mathbb{R}$ に対して

$$c_0\mathbf{x} + c_1A\mathbf{x} + \dots + c_{N-1}A^{N-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

が成り立つのは $c_0 = c_1 = \dots = c_{N-1} = 0$ の場合に限られることを示せ。

- (e) A は対角化できないことを示せ。

2. 偏微分方程式

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (1)$$

の解 $u(x, y)$ は xyu 空間内の曲面 $S: u = u(x, y)$ を表している。このことに関して以下の設問に答えよ。

- (a) $(1, 0, \frac{\partial u}{\partial x})^\top$ および $(0, 1, \frac{\partial u}{\partial y})^\top$ は S 上の点 $(x, y, u(x, y))$ における接平面内の 2 つの独立なベクトルを表している。 $n = (n_x, n_y, -1)^\top$ がこの点における S の法線ベクトルを表すとき n_x, n_y を求めよ。
- (b) n はベクトル $d = (a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u))^\top$ と直交することを示せ。
- (c) パラメータ $s \in \mathbb{R}$ を用いて定義される常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = a(x, y, u), \\ \frac{dy}{ds} = b(x, y, u), \\ \frac{du}{ds} = c(x, y, u) \end{cases} \quad (2)$$

の解 $(x(s), y(s), u(s))$ は式 (1) を満たすことを示せ。

(b) および (c) は、常微分方程式 (2) の解 $(x(s), y(s), u(s))$ が、偏微分方程式 (1) を満たす任意の点からベクトル場 $d(x, y, u)$ に沿って伸びる、 S 上に拘束された曲線（特性曲線）を表すことを意味している。このことを用いると、式 (2) を解くことで式 (1) の解を求めることができる。

- (d) $a(x, y, u) = 1, b(x, y, u) = 1, c(x, y, u) = -u$ の場合を考える。 $s = 0$ における条件 $x(0) \in \mathbb{R}, y(0) = 0, u(0) = \cos(x(0))$ の下で式 (2) を解き、パラメータ s を消去することにより、境界条件

$$u(x, 0) = \cos(x)$$

を満たす式 (1) の解を求めよ。ただし、解の一意性は示さなくてよい。

- (e) $a(x, y, u) = u, b(x, y, u) = 1, c(x, y, u) = 0$ の場合を考える。 $x \in \mathbb{R}$ で定義された微分可能な関数 $h(x)$ により、式 (1) に対する境界条件

$$u(x, 0) = h(x)$$

が与えられたとする。 $h'(\xi) < 0$ となる $\xi \in (-\infty, +\infty)$ が存在する場合には、ある $y \in (0, +\infty)$ と、ある $x \in (-\infty, +\infty)$ に対して偏微分係数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ が発散することを示せ。

第 4 問・問題 1：冪零行列・行列指数と連立常微分方程式

非零実数 a を用い、 $N \times N$ 行列を

$$A_{ij} = \begin{cases} a & (i = j + 1), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (1)$$

で定義します。 A は 1 つ下の行に成分を移す shift 型の冪零行列です。

準備： A の冪の一般公式 $Ae_j = ae_{j+1}$ (ただし $j = N$ なら 0) なので、帰納法で

$$(A^k)_{ij} = \begin{cases} a^k & i = j + k, \\ 0 & \text{それ以外}, \end{cases} \quad A^N = 0.$$

特に $a \neq 0$ と $N \geq 2$ の下で $A^{N-1} \neq 0$ です。

(a) $N = 4$ で A^2, A^3, A^4

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = 0_{4 \times 4}.$$

(b) $(I - A)^{-1}$ の (i, j) 成分 冪零性より等比級数は有限で止まり

$$(I - A)(I + A + \cdots + A^{N-1}) = I - A^N = I.$$

従って

$$((I - A)^{-1})_{ij} = \begin{cases} a^{i-j} & i \geq j, \\ 0 & i < j. \end{cases}$$

(c) 初期値 $x(0) = e_1$ の $\dot{x} = Ax$ 定数係数線形系の解は $x(t) = e^{tA}e_1$ です。冪零性を使って指数関数を有限和にすると

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

$A^k e_1 = a^k e_{k+1}$ だから、各成分は

$$x_i(t) = \frac{a^{i-1} t^{i-1}}{(i-1)!} \quad (1 \leq i \leq N).$$

直接微分すると $\dot{x}_1 = 0$ 、 $\dot{x}_i = ax_{i-1}$ ($i \geq 2$) が成立し、初期条件も満たします。

(d) $x, Ax, \dots, A^{N-1}x$ の線形独立性 $A^{N-1}x \neq 0$ とし、

$$c_0x + c_1Ax + \dots + c_{N-1}A^{N-1}x = 0$$

を仮定します。左から A^{N-1} を作用させると $c_0A^{N-1}x = 0$ なので $c_0 = 0$ 。残る式に A^{N-2} を作用させれば $c_1A^{N-1}x = 0$ 、よって $c_1 = 0$ 。これを繰り返し $c_0 = \dots = c_{N-1} = 0$ が得られます。従って線形独立です。

(e) 対角化できないこと ($N \geq 2$) $A^N = 0$ から、任意の固有値 λ は $\lambda^N = 0$ を満たし $\lambda = 0$ のみです。もし対角化可能なら $A = P \operatorname{diag}(0, \dots, 0) P^{-1} = 0$ ですが、 $a \neq 0$ なら $(A)_{21} = a \neq 0$ 。矛盾です。

$$N \geq 2, a \neq 0 \implies A \text{ は対角化不能.}$$

例外： $N = 1$ なら $A = (0)$ で対角化可能です。原題 (e) は暗黙に $N \geq 2$ を想定しているものと解釈されます。 $N = 1$ を含めたままでは、命題としては成り立ちません。

第 4 問・問題 2：1 階偏微分方程式と特性曲線法

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u), \quad u = u(x, y). \quad (2)$$

曲面 S は $F(x, y, u) = u - u(x, y) = 0$ で定義されます（右辺の u を独立な高さ座標と区別して解釈）。

(a) 接平面の法線 曲面のパラメータ表示は $r(x, y) = (x, y, u(x, y))$ 。接ベクトルは

$$r_x = (1, 0, u_x)^T, \quad r_y = (0, 1, u_y)^T.$$

両者と直交する法線として

$$n = (u_x, u_y, -1)^T.$$

原題で n_x, n_y を求めるので $n_x = u_x, n_y = u_y$ です。

(b) n と (a, b, c) の直交性

$$n \cdot (a, b, c) = au_x + bu_y - c = 0$$

となり、これは与えられた偏微分方程式そのものです。

(c) 特性曲線が偏微分方程式を満たすこと 特性曲線 $x = x(s), y = y(s), u = u(s)$ の微分方程式を

$$\dot{x} = a(x, y, u), \quad \dot{y} = b(x, y, u), \quad \dot{u} = c(x, y, u)$$

とします。曲面上で $u(s) = u(x(s), y(s))$ の形で表せるなら連鎖律で

$$\frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds} = au_x + bu_y = c.$$

従って特性曲線と PDE は整合しています。これは局所的に滑らかな解が存在する領域での議論です。

(d) $a = b = 1, c = -u, u(x, 0) = \cos x, \dot{x} = 1, \dot{y} = 1, \dot{u} = -u, s = 0$ で $x(0) = \xi, y(0) = 0, u(0) = \cos \xi$ とおくと

$$x = \xi + s, \quad y = s, \quad u = e^{-s} \cos \xi.$$

$\xi = x - y, s = y$ を代入して

$$u(x, y) = e^{-y} \cos(x - y).$$

検算： $u_x = -e^{-y} \sin(x - y), u_y = -e^{-y} \cos(x - y) + e^{-y} \sin(x - y)$ 。和は $-u$ で、 $y = 0$ では $\cos x$ に一致します。

(e) $a = u, b = 1, c = 0$ の勾配発散 原題の PDE は

$$u_y + uu_x = 0, \quad u(x, 0) = h(x).$$

初期位置 ξ をラベルとして特性曲線を求めると

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = 1, \quad \dot{u} = 0, \quad x(0) = \xi, y(0) = 0, u(0) = h(\xi).$$

従って

$$x = \xi + yh(\xi), \quad u(x, y) = h(\xi). \quad (3)$$

ξ で微分すれば

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + yh'(\xi), \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = h'(\xi).$$

従って特性写像が局所可逆な間は

$$u_x(x, y) = \frac{h'(\xi)}{1 + yh'(\xi)}, \quad x = \xi + yh(\xi).$$

仮定により $h'(\xi_0) < 0$ なる ξ_0 が存在します。この特性で

$$y_* = -\frac{1}{h'(\xi_0)} > 0, \quad x_* = \xi_0 + y_*h(\xi_0)$$

とすれば分母が $y \uparrow y_*$ において 0 へ近づき、 u_x は $-\infty$ の方向に発散します。別の見方では、特性上の $w = u_x$ は $w' = -w^2$ を満たし、 $w(y) = w(0)/(1 + yw(0))$ です。**成立範囲への注意：**最初に特性が交差する以前には滑らかな解が存在し、この議論が有効です。もし他の位置で先に特性が交差すれば、古典解がその前に破綻しています。問題が示そうとしているのは、負の初期勾配を持つデータから、正の時間に古典的な滑らかさが失われるという現象 (gradient catastrophe) です。

二つの大問をつなぐ見方

問題 1 の指数関数 e^{tA} は線形 ODE の時間発展演算子、問題 2 の特性写像 $\xi \mapsto \xi + yh(\xi)$ は非線形 PDE の局所的な座標変換です。どちらも「適切な表現に移すと微分方程式が解ける」という点で共通しています。しかし後者は Jacobian が消える時点で逆写像が失われ、微分の発散が起こります。**原典：** R8Master.pdf (令和 8 年度専門科目) p.8–9。数学第 4 問の問題 1・2、全 10 小問を収録しました。独立解答であり、大学の公式模範解答ではありません。

数学 | 年度別問題

2025年度

出題テーマ / 編集上の分類

Pauli行列／直交多項式

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2025年度

Pauli 行列 / 直交多項式

出典：既刊数学編 2024・2025年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第4問

以下の設問1, 2, 3に答えよ。

1. 以下の問いに答えよ。ただし記号 i は虚数単位とし、 $A^\dagger$ は行列 A のエルミート共役（転置の複素共役）を表す。

- (a) H をエルミート ($H^\dagger = H$) かつトレースレス ($\text{tr} H = 0$) な2行2列の複素行列とする。そのような H は、常に3つの実数 x, y, z とパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

を用いて

$$H = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 \quad (2)$$

と表せる。 H の行列式 $\det H$ を x, y, z を用いて表せ。

- (b) H をエルミートかつトレースレスな2行2列の複素行列、 U をユニタリーな2行2列の複素行列 ($U^{-1} = U^\dagger$) とするとき、

$$H' = U^\dagger H U \quad (3)$$

で与えられる行列 H' が以下の3つの性質を満たすことを示せ。

- (i) $H'^\dagger = H'$
 - (ii) $\text{tr} H' = 0$
 - (iii) $\det H' = \det H$
- (c) 設問(b)より、式(3)で与えられる H' もエルミートかつトレースレスなので、3つの実数 x', y', z' を用いて $H' = x'\sigma_1 + y'\sigma_2 + z'\sigma_3$ と表すことができる。 H が式(2)で表され、ユニタリー行列 U が

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad (4)$$

で与えられるとき、ベクトル $\vec{X}' = (x', y', z')$ を x, y, z, θ を用いて表せ。また θ が0から 2π まで変化するとき、 $\vec{X}'$ が3次元空間上でどのように変化するかを説明せよ。

2. $Q(x) = x(x-1)$ とし, 実数 x の関数

$$f_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} [Q(x)^n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

を考える。ただし $f_0(x) = 1$ とする。 $f_n(x)$ は x の n 次多項式になっている。以下の問いに答えよ。

(a) $f_1(x)$ を求めよ。

(b) 整数 m が $0 \leq m < n$ を満たすとき, $\frac{d^m}{dx^m} [Q(x)^n]$ が $x = 0$ と $x = 1$ でゼロになることを示せ。

(c) $g_m(x)$ を x の m 次多項式とする。ただし m は $0 \leq m < n$ を満たす整数である。このとき,

$$\int_0^1 g_m(x) f_n(x) dx = 0 \quad (6)$$

が成り立つことを示せ。ここから $f_n(x)$ の直交性 $\int_0^1 f_m(x) f_n(x) dx = 0 \ (m \neq n)$ も分かる。

次に微分演算子

$$\hat{L} = \frac{d}{dx} \left[Q(x) \frac{d}{dx} \right] \quad (7)$$

を考える。

(d) 任意の x の多項式 $g(x), h(x)$ に対して

$$\int_0^1 g(x) (\hat{L}h(x)) dx = \int_0^1 (\hat{L}g(x)) h(x) dx \quad (8)$$

が成り立つことを示せ。

(e) $f_n(x)$ が $\hat{L}$ の固有関数になっていること, つまり

$$\hat{L}f_n(x) = c_n f_n(x) \quad (9)$$

を満たすことを示し, c_n を求めよ。

(ヒント: 一般に n 次多項式は $f_0, f_1, \dots, f_n$ の線型結合で書くことができる。)

3. 以下の各命題について真偽を答え, 「真」の場合は命題を証明し, 「偽」の場合には反例を1つ示せ。反例は具体的な例を挙げることを。

(a) X を n 行 n 列の正方行列とする。このとき $X^2 = X$ ならば, $X = I$ または $X = O$ である。ただし I は単位行列, O は全ての成分がゼロの行列を表す。

(b) $f(z)$ を複素数 z の関数とし, 複素平面上の経路 C を $z = 0$ を中心とした半径1の円上を一周する積分経路とする。このとき $\oint_C f(z) dz = 0$ ならば $f(z)$ は $|z| < 1$ で正則である。

2025 年度第 4 問・問 1 : Pauli 行列とユニタリ共役

原題のトレース零エルミート行列 H を $H = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3$ と表します。

(a) 行列式

$$H = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\det H = -(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

(b) エルミート・トレース零・行列式の不変性 $H' = U^\dagger H U$ とすると

$$(H')^\dagger = (U^\dagger H U)^\dagger = U^\dagger H U = H',$$

$$\operatorname{tr} H' = \operatorname{tr}(U U^\dagger H) = \operatorname{tr} H = 0, \quad \det H' = \det(U^\dagger) \det H \det U = \det H.$$

ここでは $U^\dagger U = I$ と $|\det U| = 1$ を使いました。

(c) $U = \operatorname{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ 非対角成分に注目すると

$$x' - iy' = e^{-2i\theta}(x - iy).$$

実部と虚部を比較して

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

z 軸周りの 2θ 回転です。 $\theta \in [0, 2\pi]$ の変化で角度 2θ は 2 周し、 $\theta = \pi$ で $U = -I$ となるため共役作用としては既に元へ戻ります。

2025 年度第 4 問・問 2 : 直交多項式と Sturm–Liouville 作用素

$$Q(x) = x(x-1), \quad f_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}[Q(x)^n], \quad f_0 = 1.$$

(a) 最初の多項式 $Q'(x) = 2x - 1$ なので

$$f_1(x) = 2x - 1.$$

(b) 端点での消失 $Q(x)^n = x^n(x-1)^n$ は $x = 0, 1$ でともに n 位の零点を持ちます。ゆえに任意の整数 $0 \leq m < n$ に対し、 m 階微分は両端点で零です。

(c) 直交性 $\deg g_m = m < n$ とする。部分積分を n 回実施し、境界項が (b) によって消えるので

$$\int_0^1 g_m(x) f_n(x) dx = (-1)^n \int_0^1 g_m^{(n)}(x) Q(x)^n dx = 0.$$

$\deg f_m = m$ であるから $m \neq n$ のとき

$$\int_0^1 f_m(x) f_n(x) dx = 0.$$

(d) 演算子の対称性 $\hat{L}h = \frac{d}{dx}[Q(x)h'(x)]$ とすると

$$\int_0^1 g \hat{L}h dx = [gQh']_0^1 - \int_0^1 Qg'h' dx = - \int_0^1 Qg'h' dx, \quad (6)$$

同様に $\int_0^1 (\hat{L}g)h dx = - \int_0^1 Qg'h' dx$ 。 $Q(0) = Q(1) = 0$ により境界項は零で、両者は等しくなります。

(e) 固有値 $\hat{L}$ は次数 n の多項式を次数高々 n の多項式へ写します。 f_n の次数は n で、(c) の直交性と (d) の対称性により $\hat{L}f_n$ は $f_0, \dots, f_{n-1}$ のいずれにも直交します。従って $\hat{L}f_n = c_n f_n$ です。最高次の項で比較すれば、 $\hat{L}(x^n) = n(n+1)x^n + \text{低次数項}$ 。よって

$$\hat{L}f_n = n(n+1)f_n.$$

補足：これは区間 $[0, 1]$ の shifted Legendre 多項式で、 $f_n = n!P_n(2x-1)$ 。従って $\int_0^1 f_n^2 dx = (n!)^2/(2n+1)$ も得られます（原題外の復習事項）。

2025 年度第 4 問・問 3：命題の反例

(a) $X^2 = X$ なら $X = I$ または 0 か？ 偽。 $n = 2$ で

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^2 = X$$

ですが、 $X \neq I$ かつ $X \neq 0$ です。一般に $X^2 = X$ を満たす行列は射影行列と呼ばれます。

(b) 周回積分が零なら単位円板で正則か？ 偽。 $f(z) = z^{-2}$ を選ぶと、 $|z| = 1$ の反時計回り周回について

$$\oint_{|z|=1} z^{-2} dz = 0$$

ですが、 f は円板内の原点に 2 位の極を持ち、正則ではありません。周回積分が一度だけ零になるという条件は、正則性を結論づけるには足りません。

数学 | 年度別問題

2024年度

出題テーマ / 編集上の分類

Fourier変換／固有値

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2024年度

Fourier 変換 / 3 次行列の固有値

出典：既刊数学編 2024・2025年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第4問

以下の設問に答えよ。ただし、記号 i は虚数単位とする。

1. 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx \quad (1)$$

で定義する。 $\alpha > 0$ とし、関数 $g_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}$ のフーリエ変換 $\hat{g}_\alpha(\omega)$ を求めることを考える。

(a) $\hat{g}_\alpha(\omega)$ は ω の実関数として偶関数か奇関数かを答えよ。

$\omega \leq 0$ のとき、 $\hat{g}_\alpha(\omega)$ は z についての複素積分の極限として以下のように表せる。

$$\hat{g}_\alpha(\omega) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{-i\omega z} g_\alpha(z) dz \quad (2)$$

ただし、 C_R は $z = -R$ から $z = R$ までの実軸上の経路と上半平面の半径 R の半円周とからなる積分経路である (図1)。

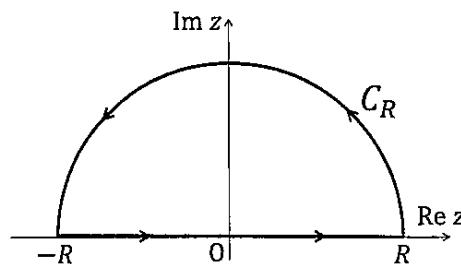


図1: 積分経路。Re z と Im z はそれぞれ z の実部と虚部を表す。

(b) 被積分関数 $e^{-i\omega z} g_\alpha(z)$ の極をすべて求めよ。

(c) 式(2)の複素積分を解答の過程を示した上で実行し、 $\hat{g}_\alpha(\omega)$ を求めよ。

次に上記の $g_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2$) と未知関数 $f(x)$ を含む以下の積分方程式を考える。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x-y) f(y) dy + \delta(x) - g_2(x) \quad (3)$$

ただし、ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ は、 $\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} g_\alpha(x)$ で定義される。

(d) たたみ込み積分 $(g_1 * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x-y) f(y) dy$ のフーリエ変換を $\widehat{(g_1 * f)}(\omega)$ とする。 $\widehat{(g_1 * f)}(\omega)$ と $\hat{g}_1(\omega)$, $\hat{f}(\omega)$ の間に成り立つ関係を理由とともに述べよ。

(e) 積分方程式(3)の解 $f(x)$ を求めよ。

2. z を $z \neq 0$, $0 \leq \arg z < \frac{\pi}{2}$ を満たす複素数として, 次の 3 次正方行列

$$A(z) = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & z^{-1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

を考える。

- (a) $A(z)$ のトレース $\text{tr}A(z)$ および行列式 $\det A(z)$ を求めよ。
- (b) $A(z)$ の逆行列 $A(z)^{-1}$ を求めよ。
- (c) $A(z)$ のすべての固有値を求めよ。また, それらがすべて実数となる z の範囲を複素平面上に図示せよ。
- (d) $A(z)$ が重複する固有値を持つ場合がある。このときの z の値を求めよ。また, このとき $A(z)$ が対角化可能か否かを理由とともに述べよ。
- (e) I を 3 次単位行列, $\vec{v}$ を 3 次元実列ベクトルとして, 3 次正方行列

$$B = A(1) + I + \vec{v}\vec{v}^T \quad (5)$$

を定義する。ただし, $\vec{v}^T$ は $\vec{v}$ の転置である。 B の最小固有値は 0 以上であることを示せ。

2024 年度第 4 問・問 1：Fourier 変換と畳み込み

原題では $\alpha > 0$ に対して

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}, \quad \widehat{g}_\alpha(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} g_\alpha(x) dx \quad (1)$$

を考えます。

(a) **偶奇性** g_α は実数値の偶関数です。従って変換の虚部を作る $\sin(\omega x)g_\alpha(x)$ は奇関数になり積分は零。余弦は ω の偶関数なので、 $\widehat{g}_\alpha$ は実数値・偶関数です。

(b) **複素積分の極** $e^{-i\omega z}$ は整関数なので、極は $z^2 + \alpha^2 = 0$ の零点

$$z = +i\alpha, \quad z = -i\alpha$$

にある、それぞれ単純極です。 $\omega < 0$ のとき上半平面で $e^{-i\omega z}$ が減衰するため上半円を使えます。 $\omega = 0$ も上半円寄与は $O(R^{-1})$ で消えます。

(c) **留数計算** 上半平面内の極 $z = i\alpha$ で

$$\operatorname{Res}_{z=i\alpha} [e^{-i\omega z} g_\alpha(z)] = \frac{\alpha}{\pi} \frac{e^{-i\omega(i\alpha)}}{2i\alpha} = \frac{e^{\alpha\omega}}{2\pi i}. \quad (2)$$

半円積分は $R \rightarrow \infty$ で零。留数定理より $\omega \leq 0$ で $\widehat{g}_\alpha(\omega) = e^{\alpha\omega}$ 。(a) の偶関数性を用いれば

$$\widehat{g}_\alpha(\omega) = e^{-\alpha|\omega|} \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

(d) **畳み込み定理** 原題の $(g_1 * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} g_1(x-y)f(y) dy$ に対し、積分順序を交換して $u = x-y$ と置くと

$$\widehat{g_1 * f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} g_1(x-y)f(y) dy dx \quad (3)$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega u} g_1(u) du \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega y} f(y) dy \right) = \widehat{g}_1(\omega) \widehat{f}(\omega). \quad (4)$$

積分交換が正当化される可積分条件（または分布の枠組み）を仮定しています。

(e) **積分方程式** 式 $f = g_1 * f + \delta - g_2$ の Fourier 変換を取ると

$$(1 - e^{-|\omega|}) \widehat{f}(\omega) = 1 - e^{-2|\omega|}.$$

$\omega \neq 0$ で因数分解して $\widehat{f} = 1 + e^{-|\omega|}$ 。 $\omega = 0$ でも連続延長により整合します。 $\widehat{\delta} = 1$ なので

$$f(x) = \delta(x) + \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (\text{分布の意味}).$$

検算： $g_1 * g_1 = g_2$ は (c)(d) より従うので $g_1 * f + \delta - g_2 = g_1 + g_2 + \delta - g_2 = f$ です。**非一意性の注意：** 原題には無限遠の境界条件が明記されていません。 $\int_{\mathbb{R}} g_1(x) dx = 1$ より、任意の定数 C に対して $f = \delta + g_1 + C$ も方程式を満たします（畳み込みが定義される通常の関数・分布の枠組み）。従って追加条件なしに一意性は主張できません。 $f - \delta$ が可積分または無限遠で零になる場合には $C = 0$ となり、上記の代表解が選ばれます。

2024 年度第 4 問・問 2：3 次対称行列

$$A(z) = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & z^{-1} \end{pmatrix}, \quad z \neq 0, \quad 0 \leq \arg z < \frac{\pi}{2}.$$

(a) 跡と行列式 直接計算により

$$\operatorname{tr} A = z + z^{-1}, \quad \det A = -(z + z^{-1}).$$

指定領域では $z = \pm i$ を含まないので $z^2 + 1 \neq 0$ 、従って逆行列が存在します。

(b) 逆行列 余因子行列から

$$A(z)^{-1} = \frac{1}{z^2 + 1} \begin{pmatrix} z & 1 & -z \\ 1 & -z & z^2 \\ -z & z^2 & z \end{pmatrix}.$$

行列積 $AA^{-1} = I$ を直接検算できます。

(c) 固有値とそれがすべて実数になる範囲 固有多項式を計算すると

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - z - z^{-1}). \quad (5)$$

従って

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = z + z^{-1}.$$

 $z = re^{i\theta}, r > 0, 0 \leq \theta < \pi/2$ とすると

$$\operatorname{Im}(z + z^{-1}) = (r - r^{-1}) \sin \theta.$$

従って実固有値を持つ領域は

$$z \in \{r : r > 0\} \cup \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta < \pi/2\}.$$

複素平面上では正の実軸と、第 1 象限の単位円弧 (i は含まず) が該当します。(d) 固有値の重複と対角化可能性 $z + z^{-1} = 1$ または -1 で重複が発生します。後者は指定領域では解を持たず、前者は $z^2 - z + 1 = 0$ となります。領域内の唯一の解は

$$z = e^{i\pi/3}$$

です。このとき固有値 1 の代数的重複度は 2 です。一方、 $A - I$ の左上 2×2 小行列の行列式は $-z \neq 0$ 。従って $\operatorname{rank}(A - I) \geq 2$ 。 $\det(A - I) = 0$ から階数は 2 なので、固有空間の次元は 1。よって

$$A(e^{i\pi/3}) \text{ は対角化できない.}$$

(e) 半正定値性 $z = 1$ で $A(1)$ の固有値は $2, 1, -1$ 。従って $A(1) + I$ の固有値は $3, 2, 0$ で半正定値です。任意の $v \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$x^T B x = x^T (A(1) + I) x + (v^T x)^2 \geq 0.$$

従って B は半正定値であり

$$\lambda_{\min}(B) \geq 0.$$

これは vv^T が半正定値であるという一般原理にも基づきます。

数学 | 年度別問題

2023

年度

出題テーマ / 編集上の分類

留数定理／行列指数

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2023年度

留数定理 / 行列指数関数

出典：既刊数学編 2022・2023年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第 4 問

以下の設問に答えよ。ただし、記号 i は虚数単位 ($i^2 = -1$ をみたす複素数) とする。

1. 実数 θ に関する次の実積分を複素積分を用いて求めることを考える。ただし、 n は正の整数であり、 a, b は $0 < b < a$ をみたす実数とする。

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)}{a + b \cos \theta} d\theta \quad (1)$$

- (a) 複素数 $e^{i\theta}$ を実数 x, y を用いて $e^{i\theta} = x + iy$ と表したときの x と y を、 θ を用いて表せ。ただし、 θ は実数とする。
- (b) $z = e^{i\theta}$ において変数変換をし、式 (1) の実積分を $I = \int_C f(z) dz$ の形の複素積分で表したときの $f(z)$ を求めよ。また、このときの積分経路 C を複素平面上で図示せよ。ただし、積分経路 C は、 $z = e^{i\theta}$ の変数変換によって定めるとする。
- (c) 積分経路 C の内部にある $f(z)$ の極をすべて求めよ。
- (d) $n = 2$ の場合について複素積分を実行し、 I を求めよ。
2. (a) 正方行列 X に対して、 e^X を

$$e^X = \mathbb{I} + X + \frac{1}{2!} X^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \quad (2)$$

と定義する。ただし、式 (2) の $\mathbb{I}$ は単位行列である。 V が逆行列を持つ行列 (正則行列) のとき、 $e^{VXV^{-1}} = Ve^X V^{-1}$ が成立することを証明せよ。

- (b) 次の行列 A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

のすべての固有値と、それぞれの固有値に対応する規格化された固有ベクトルを求めよ。

- (c) 式 (3) の行列 A はユニタリ行列 U と対角行列 D を用いて $A = UDU^{-1}$ と表すことができる。 U と D を求めよ。
- (d) 式 (3) の行列 A に対して、 e^{itA} を 4×4 行列で表せ。ただし、 t は実数とする。

4 2023 年度：第 4 問・設問 1（留数定理と三角積分）

原題出典：R5master.pdf・PDF 第 10 ページ（冊子 7 ページ）

4.1 (a) Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta. \quad (24)$$

4.2 (b) 単位円の複素積分へ変換

原題の積分は

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)}{a + b \cos \theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 < b < a. \quad (25)$$

$z = e^{i\theta}$ と置くと、 $d\theta = dz/(iz)$ である。さらに

$$\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \cos(n\theta) = \frac{z^n + z^{-n}}{2}. \quad (26)$$

単位円 C は反時計回りに一周する。したがって

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z^n + z^{-n}}{i(bz^2 + 2az + b)} dz, \quad f(z) = \frac{z^n + z^{-n}}{i(bz^2 + 2az + b)}. \quad (27)$$

4.3 (c) 積分経路の内側の極

二次式の零点は

$$r_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b}. \quad (28)$$

$\Delta = \sqrt{a^2 - b^2}$ 、 $r = r_+ = (-a + \Delta)/b = -b/(a + \Delta)$ と書くと、

$$-1 < r < 0, \quad r_- < -1, \quad r_+ r_- = 1. \quad (29)$$

従って $|z| < 1$ の極は、 $z = 0$ (n 位の極) と $z = r$ (単純極) の 2 点だけである。

4.4 (d) $n = 2$ の積分

$n = 2$ では

$$f(z) = \frac{z^2 + z^{-2}}{i(bz^2 + 2az + b)}. \quad (30)$$

原点近くで

$$\frac{1}{bz^2 + 2az + b} = \frac{1}{b} \left(1 - \frac{2a}{b} z + O(z^2) \right) \quad (31)$$

だから $z = 0$ の留数は $\text{Res}(f, 0) = 2ia/b^2$ 。また r で

$$\text{Res}(f, r) = \frac{r^2 + r^{-2}}{2i(br + a)} = \frac{r^2 + r^{-2}}{2i\Delta}. \quad (32)$$

従って留数定理により

$$I = 2\pi i [\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, r)] \quad (33)$$

$$= -\frac{4\pi a}{b^2} + \frac{\pi(r^2 + r^{-2})}{\Delta}. \quad (34)$$

$r^{-2} - r^2 = 4a\Delta/b^2$ を用いると

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right)^2. \quad (35)$$

4.5 別解・検算：一般の n まで一度に求める

$r = -b/(a + \Delta)$ とすれば

$$a + b \cos \theta = \frac{a + \Delta}{2} (1 - 2r \cos \theta + r^2). \quad (36)$$

Poisson 核の展開と $\Delta = (a + \Delta)(1 - r^2)/2$ を用いて

$$\frac{1}{a + b \cos \theta} = \frac{1}{\Delta} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos(m\theta) \right). \quad (37)$$

三角関数の直交性から $n \geq 1$ について

$$I_n = \frac{2\pi r^n}{\Delta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left(\frac{-b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \right)^n. \quad (38)$$

$n = 2$ は式(35)と一致する。 $b \rightarrow 0$ では $n \geq 1$ の積分が 0 に近づき、符号も奇数 n で負となるため、検算に有効である。

5 2023 年度：第 4 問・設問 2（固有値と行列指数）

原題出典：R5master.pdf・PDF 第 10 ページ（冊子 7 ページ）

5.1 (a) 相似変換と行列指数関数

任意の正方行列 X と可逆行列 V に対して

$$(VXV^{-1})^k = VX^kV^{-1} \quad (39)$$

が帰納的に成立する。行列指数のべき級数の絶対収束により、項別に移して

$$\boxed{e^{VXV^{-1}} = Ve^XV^{-1}.} \quad (40)$$

5.2 (b) 4×4 行列 A の固有値・固有ベクトル

問題で与えられた行列は

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ c & 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (41)$$

$\text{span}\{e_1, e_4\}$ 上の制限は

$$\begin{pmatrix} c & -c \\ c & c \end{pmatrix}, \quad (42)$$

すなわち角度 $\pi/4$ の回転行列である。よって固有値は

$$\boxed{\lambda_+ = e^{i\pi/4}, \lambda_- = e^{-i\pi/4}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.} \quad (43)$$

互いに直交する規格化固有ベクトルは例えば

$$\boxed{\mathbf{u}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -i)^T, \quad \mathbf{u}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, i)^T, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3.} \quad (44)$$

直接 $A\mathbf{u}_+ = \lambda_+\mathbf{u}_+$ などを計算して検算できる。

5.3 (c) ユニタリ対角化

固有ベクトルを順番に並べて

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 0 & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(e^{i\pi/4}, 1, -1, e^{-i\pi/4}). \quad (45)$$

列が正規直交しているため $U^{-1} = U^\dagger$ であり、

$$\boxed{A = UDU^{-1} = UDU^\dagger.} \quad (46)$$

5.4 (d) e^{itA} を行列で表す

(a) により $e^{itA} = Ue^{itD}U^\dagger$ 。 $s = t/\sqrt{2}$ 、 $h = e^{it/\sqrt{2}}$ と置くと

$$\frac{e^{it\lambda_+} + e^{it\lambda_-}}{2} = h \cosh s, \quad (47)$$

$$\frac{e^{it\lambda_+} - e^{it\lambda_-}}{2i} = ih \sinh s. \quad (48)$$

したがって

$$e^{itA} = \begin{pmatrix} h \cosh s & 0 & 0 & -ih \sinh s \\ 0 & e^{it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it} & 0 \\ ih \sinh s & 0 & 0 & h \cosh s \end{pmatrix}. \quad (49)$$

重要 指数の係数が it でも、 A の固有値は一部複素数なので、式中に双曲線関数 $\cosh, \sinh$ が現れる。

5.5 独立検算

$t = 0$ を代入すると $e^{itA} = I_4$ になる。 $t = 0$ で微分すると

$$\left. \frac{d}{dt} e^{itA} \right|_{t=0} = iA \quad (50)$$

が得られる。 $(1, 4)$ 成分の微分が $-i/\sqrt{2}$ 、 $(4, 1)$ 成分が $+i/\sqrt{2}$ であることも一致する。また $\text{tr}(e^{itA})$ は 4 個の固有値 $e^{it\lambda_j}$ の和に一致する。

数学 | 年度別問題

2022 年度

出題テーマ / 編集上の分類

複素積分／階数1摂動・安定性

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2022年度

複素積分 / 階数 1 摂動と安定性

出典：既刊数学編 2022・2023年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第 4 問

以下の設問 1 および 2 に答えよ。

1. $f(z)$ を、実軸上を含む複素上半平面で正則な関数とする。複素上半平面で $|z| \rightarrow \infty$ としたとき、 $f(z)$ は 0 に収束する。また、 x_0 は実数である。

- (i) 経路 C_- と C_+ を、 $z = x_0$ を下半平面及び上半平面に迂回した、 $z = -\infty$ から $z = \infty$ までの、実軸上の経路とする (図 1)。以下の積分 I_- と I_+ を求めよ。

$$I_- = \int_{C_-} dz \frac{f(z)}{z - x_0}, \quad I_+ = \int_{C_+} dz \frac{f(z)}{z - x_0}$$

ただし、 $f(z)$ は C_- 上および C_- の複素上半平面側においても正則とする。解答は $f(x_0)$ を用いて表してよい。

- (ii) θ_n ($n = 1, 2$) を $0 < \theta_n < \pi$ を満たす実数、また、 $z_n = x_0 + ae^{i\theta_n}$ (a は正の実数) とする。 C_{12} を、 z_1 を始点とし z_1 と z_2 をつなぐ線分で与えられる経路とする (図 1)。以下の量を θ_1 , θ_2 , $f(x_0)$ を用いて表せ。

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_{C_{12}} dz \frac{f(z)}{z - x_0}$$

- (iii) A をある定数として以下の関係式が成り立つことを示すと同時に、定数 A を求めよ。

$$\operatorname{Re} f(x_0) = A \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \epsilon} dx \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - x_0} + \int_{x_0 + \epsilon}^{\infty} dx \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - x_0} \right]$$

ただし上式で、 x に関する積分は実軸上の積分である。また、 $\operatorname{Re} f(z)$ と $\operatorname{Im} f(z)$ はそれぞれ関数 $f(z)$ の実部と虚部を表す。

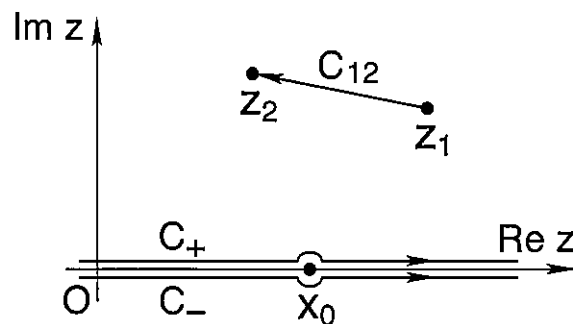


図 1: 積分経路。ただし、経路 C_- と C_+ は実軸上からずらして表示している。

2. n を $n \geq 2$ の自然数として, I を n 次元単位行列, $\vec{v}$ を n 次元実単位ベクトルとする ($\vec{v}^T \vec{v} = 1$, ただし $\vec{v}^T$ は $\vec{v}$ の転置ベクトル). そして, $n \times n$ 実行列 C を以下のように与える。

$$C = pI - q\vec{v}\vec{v}^T$$

ただし p と q は正の実数である。

- (i) $\vec{v}$ は C の固有ベクトルである。対応する固有値を求めよ。
- (ii) $\vec{w}$ を $\vec{v}$ と直交するベクトルとすると, $\vec{w}$ は C の固有ベクトルである。対応する固有値を求めよ。
- (iii) 行列式 $\det C$ を求めよ。

次に, A を $n \times n$ の実対称行列とし,

$$B = CA$$

とする。 A の固有値は 0 を含まない。行列 B は, $q = q_0$ で $\det B = 0$ となるとする。

- (iv) q_0 を p を用いて表せ。
- (v) 行列 B が実行列であることを注意して, β が B の固有値であればその複素共役 β^* も B の固有値であることを示せ。

さらに, n 次元実ベクトル $\vec{g}(t)$ は以下の微分方程式に従うとする。

$$\frac{d}{dt}\vec{g} = -B\vec{g} \tag{1}$$

- (vi) A の固有値が全て正の場合を考える。 $q > q_0$ のとき, 任意の n 次元実単位ベクトル $\vec{v}$ に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{g}(t)\| = \infty$ となるような微分方程式 (1) の解が存在することを示せ。ただし, $\|\vec{g}\| \equiv \sqrt{\vec{g}^T \vec{g}}$ である。
- (vii) A が一つだけ負の固有値を持つ場合を考える。 $q > q_0$ のとき, $\vec{v}$ をうまく選ぶと微分方程式 (1) の任意の解が $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{g}(t)\| = 0$ となる。このような $\vec{v}$ が存在することを示せ。

1 収録範囲と読み方

入学年度	原 題 ペ ー ジ	テ ー マ
2022 年度	原 題 7-8 頁	(1) Cauchy 積分と分散関係、(2) 階数 1 摂動と固有値、線形流の安定性
2023 年度	原題 7 頁	(1) 三角積分と留数、(2) ユニタリ対角化と行列指数

この冊子の構成は「設問ごとの詳解」→「別解・検算」→「付録：原題画像」の順である。年度は入学年度であり、実施年ではない。

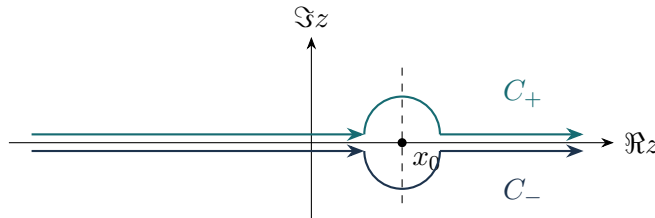
注意 問題文は原題画像を参照し、数式の記号や積分経路などは原題の定義に従う。途中で一般化する際には追加の条件を明記した。

2 2022 年度：第 4 問・設問 1（複素積分）

原題出典：R4master.pdf・PDF 第 10 ページ（冊子 7 ページ）

2.1 設定と積分経路

実軸および複素上半平面で正則で、上半平面の無限遠で 0 に収束する関数 $f(z)$ と、実数 x_0 を考える。原題の C_- は x_0 の下を、 C_+ は上を迂回して、実軸を左から右へ進む経路である。



図は積分経路の概念図。迂回の半径は極限で 0 にする。

2.2 (i) 積分 $I_{\pm}$

上半円を付け足し、閉曲線の半径を無限大にする。無限遠の円弧積分が消えることは、原題の減衰条件のもとで考える（必要なら円弧に関する一様減衰を仮定する）。

C_+ は極 x_0 を積分領域から除外するので、Cauchy の定理より $I_+ = 0$ 。 C_- は x_0 を内部に含むため留数定理により

$$\boxed{I_+ = 0, \quad I_- = 2\pi i f(x_0).} \quad (1)$$

別の導出では、迂回経路の極限が

$$I_+ = \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx - i\pi f(x_0), \quad (2)$$

$$I_- = \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + i\pi f(x_0) \quad (3)$$

であることを用いる。差を取っても式(1)を得る。

2.3 (ii) 小線分 C_{12} の積分

$z = x_0 + ae^{i\theta}$ 、 $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ とパラメータ化する。このとき $dz = ia e^{i\theta} d\theta$ であり、

$$\int_{C_{12}} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = i \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(x_0 + ae^{i\theta}) d\theta. \quad (4)$$

f の連続性を使うと

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \int_{C_{12}} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = i(\theta_2 - \theta_1) f(x_0). \quad (5)$$

ここで原題の線分は z_1 から z_2 へ向かうため、角度の差は $\theta_2 - \theta_1$ である。

2.4 (iii) 実部と虚部の分散関係

(i) と迂回の表式を比較すると

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = i\pi f(x_0). \quad (6)$$

両辺の虚部を取ると

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im f(x)}{x - x_0} dx = \pi \Re f(x_0). \quad (7)$$

原題の $x_0 \pm \epsilon$ を用いる主値の定義と一致する。したがって

$$\Re f(x_0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \epsilon} \frac{\Im f(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \epsilon}^{\infty} \frac{\Im f(x)}{x - x_0} dx \right], \quad A = \frac{1}{\pi}. \quad (8)$$

これは Kramers–Kronig 型の分散関係の一つである。 I_+ と I_- の向きによる符号差が最も重要な検算点となる。

3 2022 年度：第 4 問・設問 2（階数 1 の行列）

原題出典：R4master.pdf・PDF 第 11 ページ（冊子 8 ページ）

3.1 (i)–(iii) $C = npI - qvv^T$ の固有値と行列式

$v^T v = 1$ とする。射影

$$P = vv^T, \quad P^2 = P, \quad \text{rank } P = 1 \quad (9)$$

を導入すると $C = npI - qP$ と書ける。したがって

$$Cv = (np - q)v, \quad (10)$$

$$Cw = npw \quad (w \perp v). \quad (11)$$

v に沿う 1 次元と直交補空間の $(n - 1)$ 次元は互いに直交するため、これで全固有空間を尽くす。

$$\lambda_{\parallel} = np - q, \quad \lambda_{\perp} = np \quad (\text{重複度 } n - 1). \quad (12)$$

よって積の公式から

$$\det C = (np - q)(np)^{n-1}. \quad (13)$$

3.2 (iv) $\det B = 0$ になる q_0

$B = CA$ で $\det A \neq 0$ だから

$$\det B = \det C \det A = (np - q)(np)^{n-1} \det A. \quad (14)$$

$p > 0$ であるため、

$$q_0 = np. \quad (15)$$

3.3 (v) 複素共役固有値が対で現れる理由

$B = CA$ は実行列であり、特性多項式 $\det(\lambda I - B)$ は実係数多項式である。 $Bz = \beta z$ の両辺を複素共役すると

$$Bz^* = \beta^* z^* \quad (16)$$

となる。したがって

$$\beta \in \sigma(B) \implies \beta^* \in \sigma(B). \quad (17)$$

3.4 (vi) A が正定値の場合：発散解の存在

$q > q_0 = np$ では C の固有値は負 1 個、正 $(n - 1)$ 個である。 A は実対称正定値なので $A^{1/2}$ が存在し、

$$A^{1/2}BA^{-1/2} = A^{1/2}CA^{1/2} =: S. \quad (18)$$

S は実対称で、合同変換に対する Sylvester の慣性法則より、負固有値を 1 個持つ。相似な B にも負の実固有値 $\beta_- < 0$ が存在する。その固有ベクトル u_- を初期値として

$$g(t) = e^{-\beta_- t} u_- \quad (19)$$

とすれば、 $g' = -Bg$ を満たし

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|g(t)\| = \infty. \quad (20)$$

3.5 (vii) A が負固有値を 1 個持つ場合：安定化する v

A の負固有値を $a_- < 0$ 、対応する規格化固有ベクトルを u_- とする。 $v = u_-$ を選ぶ。このとき A と C は同じ固有ベクトルで対角化できる。 $B = CA$ の固有値は

$$(np - q)a_- > 0, \quad np a_j > 0 \quad (j = 2, \dots, n) \quad (21)$$

となる ($q > np$ 、 $a_j > 0$)。よって B は正の固有値を持つ実対称行列である。任意の初期値をその直交固有基底で展開すると

$$g(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{-\beta_j t} u_j, \quad \beta_j > 0 \quad (22)$$

だから

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} \|g(t)\| = 0 \quad (\text{任意の初期値}) .} \quad (23)$$

結論： 同じ $q > np$ でも、 A の符号と v の向きによって線形流の安定性が変わる。

数学 | 年度別問題

2020年度

出題テーマ / 編集上の分類

移流拡散／巡回行列

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2020年度

移流拡散方程式 / 巡回行列

出典：既刊数学編 2019・2020年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第1問

以下の設問に答えよ。解答の際、ガウスの積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2+ipx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{p^2}{2a}}$$

を用いてよい。公式中で、 $a > 0$, p は実数, i は虚数単位である。

1. 誤差関数

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x d\xi e^{-\xi^2}$$

について以下の小問に答えよ。

- (i) $x = 0$ の周りのテイラー展開（マクローリン展開）を与えよ。
- (ii) $x = \infty$ の周りで漸近展開すると、最初の2項は次のように与えられることを示せ。
ヒント: $\xi^2 = \eta$ のように積分変数を変更し、部分積分を用いて求めよ。

$$\operatorname{erf}(x) \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}x} e^{-x^2} + (\text{高次の項})$$

2. 偏微分方程式

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -c \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

を時刻 $t = 0$ における初期条件 $u(x,t)|_{t=0} = U(x)$ のもとで、領域 $t \geq 0$, $-\infty < x < \infty$ で解く。パラメータの定義域は $c > 0$, $\lambda \geq 0$ とする。

- (i) $\lambda = 0$ の場合の解を求めよ。ただし、 $U(x)$ は任意の微分可能な関数とする。

以下の小問では $\lambda > 0$ の場合を考える。

- (ii) $u(x,t)$ の x に関するフーリエ変換を

$$\tilde{u}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} u(x,t)$$

と定義する。 $\tilde{u}(k,t)$ が満たす微分方程式と初期条件を求めよ。

- (iii) $U(x) = \delta(x)$ とするときの解 $u(x,t)$ を $G(x,t)$ と書く。ここで $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。 x に関するフーリエ逆変換を用いて $G(x,t)$ を求めよ。
- (iv) $U(x)$ が

$$U(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

のように与えられた場合の偏微分方程式の解を誤差関数を用いて書き表せ。また時刻 t の経過とともに $u(x,t)$ の概形がどのように変化するか説明せよ。

第2問

d を $d \geq 2$ の自然数とし、 $d \times d$ 行列 X, Z を次のように定義する。

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & w^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & w^{d-1} \end{pmatrix}$$

ここで、 $w = e^{i\frac{2\pi}{d}}$ である。ただし、 i を虚数単位とする。すなわち、 X は、その j 行 $j-1$ 列成分が $X_{j,j-1} = 1$ ($j = 2, 3, \dots, d$) および 1 行 d 列成分が $X_{1,d} = 1$ で与えられ、これら以外の行列成分がすべて 0 の行列である。また、 Z はその対角成分が $Z_{j,j} = w^{j-1}$ ($j = 1, 2, \dots, d$) で与えられ、非対角成分がすべて 0 の行列である。

さらに、 $n, m = 0, 1, \dots, d-1$ について、次の行列

$$U^{(n,m)} = X^n Z^m = \underbrace{X \cdots X}_{n \text{ 個}} \underbrace{Z \cdots Z}_{m \text{ 個}}$$

を定義する。

また、複素 d 次元空間の二つの複素列ベクトル $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}$ と $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$ の内積 $\langle u, v \rangle$

は、 $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^d u_i^* v_i$ で与えられる。ただし、 $*$ は複素共役を表す。

以下の設問に答えよ。解答を導く計算過程も解答用紙に記述すること。

1. Z のトレースが 0 となることを示せ。
2. XZ と ZX の間には、 c を複素数として、 $ZX = cXZ$ の関係が成り立つ。このときの c の値を求めよ。
3. $U^{(1,m)} = XZ^m$ と同時対角化可能な行列 $U^{(n',m')}$ の n', m' が満たすべき条件を求めよ。
4. $U^{(1,m)}$ の固有値をすべて求めよ。

以下の設問では、 $d = 3$ の場合について考える。

5. $U^{(1,m)}$ の正規化した固有列ベクトルを $e_j^{(m)}$ ($j = 1, 2, 3$) とする。 $e_j^{(m)}$ を求めよ。
6. 任意の $m, m' = 0, 1, 2$ (ただし $m' \neq m$) と任意の $j, j' = 1, 2, 3$ に対して $|\langle e_j^{(m)}, e_{j'}^{(m')} \rangle|^2 = \frac{1}{3}$ が成り立つことを示せ。

3. 2020 年度 第 1 問：誤差関数と移流拡散方程式

3.1 1. 誤差関数の級数と漸近形

【(i)】 $e^{-\xi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi^{2n} / n!$ を項別積分すれば

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

よって

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \cdots \right)$$

【(ii)】 $x > 0$ で $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$ と書く。 $\eta = \xi^2$ の変数変換と部分積分により

$$\int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi^2} d\xi.$$

2 項目は $O(e^{-x^2}/x^3)$ だから

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x} + O\left(\frac{e^{-x^2}}{x^3}\right) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

さらに展開すれば $\operatorname{erfc}(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x} (1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4x^4} - \cdots)$ 。

3.2 2. 移流拡散方程式の初期値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = U(x).$$

【(i) $\lambda = 0$ 】 特性曲線に沿って $x - ct$ が保存される。よって

$$u(x, t) = U(x - ct)$$

【(ii) Fourier 空間】 対称的規格化の Fourier 変換を用いると、部分積分で

$$\mathcal{F}[u_x] = ik\tilde{u}, \quad \mathcal{F}[u_{xx}] = -k^2\tilde{u}.$$

従って

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \left(-ick - \frac{\lambda}{2} k^2 \right) \tilde{u}, \quad \tilde{u}(k, 0) = \tilde{U}(k)$$

これを解けば $\tilde{u}(k, t) = e^{-ickt - \lambda k^2 t/2} \tilde{U}(k)$ である。【(iii) $U = \delta$ 】 $\tilde{U}(k) = (2\pi)^{-1/2}$ なので、Gaussian 積分で逆変換することにより

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda t}} \exp\left[-\frac{(x - ct)^2}{2\lambda t}\right] \quad (t > 0)$$

$\int_{\mathbb{R}} G(x, t) dx = 1$ であり、 $t \downarrow 0$ に $\delta(x)$ へ分布収束する。【(iv) 階段状初期条件】 $U(y) = 1$ ($y < 0$)、 $U(y) = 0$ ($y \geq 0$) ならば畳み込みで

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^0 \frac{\exp[-(x - y - ct)^2/(2\lambda t)]}{\sqrt{2\pi\lambda t}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(x-ct)/\sqrt{2\lambda t}}^{\infty} e^{-v^2} dv. \end{aligned}$$

従って

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x - ct}{\sqrt{2\lambda t}}\right) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x - ct}{\sqrt{2\lambda t}}\right) \right]$$

解釈：段差の中心は速度 c で右へ移り、遷移領域の幅は $\sqrt{\lambda t}$ のオーダーで時間とともに広がる。初期の不連続点での値は $t \downarrow 0$ の点 wise 極限に依存し、解は通常の L^1_{loc} や分布の意味で初期条件に収束する。

4. 2020 年度 第 2 問：巡回行列と Weyl 関係

$w = e^{2\pi i/d}$ 、 $Xe_j = e_{j+1}$ (添字 d で巡回)、 $Ze_j = w^{j-1}e_j$ 、 $U^{(n,m)} = X^n Z^m$ とする。

4.1 設問 1： Z のトレース

$w^d = 1$ 、 $w \neq 1$ なので等比級数から

$$\operatorname{tr} Z = \sum_{j=0}^{d-1} w^j = \frac{1 - w^d}{1 - w} = 0$$

4.2 設問 2：交換関係

任意の標準基底 e_j に対して

$$ZXe_j = w^j e_{j+1}, \quad XZe_j = w^{j-1} e_{j+1}.$$

従って

$$ZX = wXZ \quad (c = w)$$

4.3 設問 3：同時対角化の条件

交換関係から $Z^m X^{n'} = w^{mn'} X^{n'} Z^m$ である。よって

$$U^{(n,m)} U^{(n',m')} = w^{mn'} X^{n+n'} Z^{m+m'},$$

$$U^{(n',m')} U^{(n,m)} = w^{m'n} X^{n+n'} Z^{m+m'}.$$

いずれもユニタリ（したがって正規）なので、同時ユニタリ対角化ができる必要十分条件は可換性である。結論は

$$mn' - m'n \equiv 0 \pmod{d}$$

4.4 設問 4： $U^{(n,m)}$ の固有値（一般の d ）

$g = \gcd(n, d)$ 、 $L = d/g$ とする。添字を $0, 1, \dots, d-1$ で表すと、

$$U^{(n,m)} e_j = w^{mj} e_{j+n \pmod{d}}.$$

$j \mapsto j+n$ は g 個の長さ L の巡回軌道に分かれる。各軌道の代表 $r = 0, 1, \dots, g-1$ に対し、 L 回作用すると

$$(U^{(n,m)})^L e_r = w^{m[Lr+nL(L-1)/2]} e_r.$$

従って各軌道の固有値は L 次根であり、求める d 個の固有値（重複度込み）は

$$\mu_{r,k} = \exp \left[\frac{2\pi i}{L} \left(k + \frac{mr}{g} + \frac{mn(L-1)}{2g} \right) \right], \quad (*)$$

$$r = 0, \dots, g-1, \quad k = 0, \dots, L-1.$$

$n=0$ では $g=d, L=1$ として $\mu_{r,0} = w^{mr}$ を与え、 Z^m の固有値と一致する。循環ブロックの位相積から出た式なので、各固有値の重複も自動的に数えられる。

4.5 設問 5 : $d=3$ の規格化固有ベクトル

$w = e^{2\pi i/3}$ 、 $\mu_j = w^{j-1}$ とする。 $U^{(1,m)} = XZ^m$ の固有値は式 (*) から $1, w, w^2$ で、 m に依存しない。 $v = (a, b, c)^T$ に対する固有値方程式は

$$w^{2m}c = \mu a, \quad a = \mu b, \quad w^m b = \mu c.$$

$a=1$ と定めれば $b = \mu^{-1}$ 、 $c = w^m \mu^{-2}$ となる。各成分の絶対値は 1 なので

$$e_j^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ w^{-(j-1)} \\ w^{m-2(j-1)} \end{pmatrix} \quad (j=1, 2, 3; m=0, 1, 2)$$

j が異なれば固有値が異なり、ユニタリ行列の固有ベクトルとして直交する。

4.6 設問 6 : 異なる基底の相互不偏性

$m \neq m'$ とし、 $\rho = w^{j-j'}$ 、 $\sigma = w^{m'-m} \in \{w, w^2\}$ と置く。前問の結果から

$$\langle e_j^{(m)}, e_{j'}^{(m')} \rangle = \frac{1}{3} (1 + \rho + \sigma \rho^2).$$

$\rho^3 = 1$ 、 $\rho \in \{1, w, w^2\}$ 、 $\sigma \in \{w, w^2\}$ を用いると直接計算で

$$|1 + \rho + \sigma \rho^2|^2 = 3.$$

よって

$$|\langle e_j^{(m)}, e_{j'}^{(m')} \rangle|^2 = \frac{1}{3} \quad (m \neq m')$$

これは原題の $d=3$ における相互不偏基底 (mutually unbiased bases) の性質である。 $m=m'$ では通常の正規直交性 $\delta_{jj'}$ が成り立つ。

解答の独立検算・資料注記

- **2019 第 1 問**：行列単位を使って $[T_7, T_1] = iT_2$ 、 $[T_5, T_6] = 2iT_8$ を確かめ、 H の全 64 成分を基底展開で再計算した。
- **2019 第 2 問**：固有値の式に境界条件を代入して確認し、 $D = \cos(\pi m_2) / \cos(\pi m_1)$ は既知の余弦の無限積でも照合した。
- **2020 第 1 問**：Fourier 空間の解に逆変換を行い、Green 関数の全積分が 1 になることを確認した。

数学 | 年度別問題

2019 年度

出題テーマ / 編集上の分類

Hermite行列・SU(3)／スペクトル

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2019年度

Hermite 行列と $SU(3)$ / スペクトルゼータ

出典：既刊数学編 2019・2020年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第1問

以下の設問に答えよ。ただし正方行列 X, Y に対して $\text{tr} X$ は X のトレース, $\det X$ は X の行列式を表し, $[X, Y] = XY - YX$, $e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$ とする。また, 行列 X に対して, X^T は X の転置, $X^\dagger$ は X のエルミート共役 (転置の複素共役) を表す。ベクトル $\mathbf{x}$ に対して $\mathbf{x}^T$ および $\mathbf{x}^\dagger$ も同様である。 I は単位行列を表す。虚数単位を i とする。

1. A, B をエルミート ($A^\dagger = A, B^\dagger = B$) かつトレースレス ($\text{tr} A = \text{tr} B = 0$) な有限次元の行列とする。以下の (i)~(iii) を示せ。ただしエルミート行列 A が対角行列 D とユニタリー行列 V ($V^\dagger V = I$) を用いて $A = V^\dagger D V$ と対角化できること, および同じ型の正方行列 X, Y に対して $\det(XY) = \det X \det Y$ が成り立つことを用いてもよい。
 - (i) $i[A, B]$ はエルミートかつトレースレスである。
 - (ii) $U = e^{iA}$ はユニタリー行列 ($U^\dagger U = I$) である。
 - (iii) $U = e^{iA}$ は $\det U = 1$ をみたす。

任意のトレースレスな3行3列エルミート行列 T は8つの実数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ と8つのトレースレスな3行3列エルミート行列 $T_1, T_2, \dots, T_8$ を用いて以下のように表すことができる。

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_7 & \alpha_1 - i\alpha_2 & \alpha_3 - i\alpha_4 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_8 & \alpha_5 - i\alpha_6 \\ \alpha_3 + i\alpha_4 & \alpha_5 + i\alpha_6 & -\alpha_7 - \alpha_8 \end{pmatrix} = \sum_{a=1}^8 \alpha_a T_a$$

2. 行列 T_1, T_2 および T_7 の具体形を書け。
3. 設問1の (i) より, 実数 $A_{ab,c}$ ($a, b, c = 1, 2, \dots, 8$) を用いて $[T_a, T_b] = i \sum_{c=1}^8 A_{ab,c} T_c$ と書ける。 $A_{71,2}$ および $A_{56,8}$ を求めよ。
4. 実数 θ を用いて行列 U を $U = e^{i\theta T} = \exp\left(i\theta \sum_{a=1}^8 \alpha_a T_a\right)$ と定義し, 複素3成分のベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, およびそれらに U をかけたベクトル $\mathbf{x}' = U\mathbf{x}$, $\mathbf{y}' = U\mathbf{y}$ を考える。
 - (i) $G_a = \mathbf{x}^\dagger T_a \mathbf{y}$, $G'_a = \mathbf{x}'^\dagger T_a \mathbf{y}'$ とする ($a = 1, 2, \dots, 8$)。 G'_a を θ の1次まで展開すると, $G'_a = G_a + i\theta \sum_{b=1}^8 H_{ab} G_b + \mathcal{O}(\theta^2)$ の形に書けることを示し, H_{ab} を求めよ。
 - (ii) $z_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_j y_k$, $z'_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x'_j y'_k$ とし, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$, $\mathbf{z}' = (z'_1, z'_2, z'_3)^T$ とする。 $\mathbf{z}'$ を θ の1次まで展開すると $\mathbf{z}' = (I + i\theta M)\mathbf{z} + \mathcal{O}(\theta^2)$ の形に書けることを示し, 行列 M を求めよ。ただし ε_{ijk} は3階の完全反対称テンソルで, $\varepsilon_{123} = 1$, $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji}$ である。 $\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{k\ell m} = \delta_{i\ell} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{j\ell}$ を用いてもよい ($\delta_{i\ell}$ 等はクロネッカーの δ 記号を表す)。

第2問

x 軸上の区間 $[0, \pi]$ で定義された関数に作用する以下の演算子を考える。

$$H_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} - m_\alpha^2$$

ここで, m_α は正の実数定数, $\alpha = 1, 2$ である。 H_α の n 番目に小さい固有値を $\lambda_\alpha^{(n)}$, 対応する固有関数を $f_\alpha^{(n)}(x)$ とする ($n = 1, 2, 3, \dots$)。

$$H_\alpha f_\alpha^{(n)}(x) = \lambda_\alpha^{(n)} f_\alpha^{(n)}(x)$$

固有関数 $f_\alpha^{(n)}(x)$ は $x = 0$ と $x = \pi$ で, それぞれ以下の境界条件を満たすものとする。

$$\left. \frac{df_\alpha^{(n)}(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad f_\alpha^{(n)}(\pi) = 0$$

ただし, $f_\alpha^{(n)}(x) = 0$ という自明な解は考えない。

1. $\lambda_\alpha^{(n)}$ と $f_\alpha^{(n)}(x)$ を求めよ。固有関数は規格化しなくてよい。
2. $m_\alpha < \frac{1}{2}$ として, 次の量 D を計算することを考える。

$$D = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}}$$

そのため, s に関して解析的な関数 $Z(s)$ を導入する。

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} [(\lambda_2^{(n)})^{-s} - (\lambda_1^{(n)})^{-s}]$$

(s の実部が小さく上の無限和が収束しない領域では, $Z(s)$ は解析接続により与える。)

以下, s に関する微分を

$$Z'(s) = \frac{d}{ds} Z(s)$$

と表す。また, 必要であれば以下の式を用いてもよい。

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

ただし, C_0 は z の複素平面上で原点を反時計回りに 1 周する閉曲線, i は虚数単位である。

- (i) λ を定数として, 次の微分を実行せよ。

$$\frac{d}{ds} \lambda^{-s}$$

- (ii) D を $Z'(0)$ を用いて表せ。
- (iii) λ を $-m_\alpha^2$ より大きい実数定数として、以下の微分方程式と境界条件を満たす関数 $g_\alpha(x; \lambda)$ を求めよ。

$$H_\alpha g_\alpha(x; \lambda) = \lambda g_\alpha(x; \lambda), \quad g_\alpha(0; \lambda) = 1, \quad \left. \frac{\partial g_\alpha(x; \lambda)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

- (iv) 前問で与えられた関数 $g_\alpha(x; \lambda)$ の $x = \pi$ における値を用いて

$$\tilde{g}_\alpha(\lambda) = g_\alpha(x = \pi; \lambda)$$

とする。 λ が複素数である場合、 $\tilde{g}_\alpha(\lambda)$ は解析接続により与える。 $\tilde{g}_\alpha(\lambda)$ のゼロ点は $\lambda = \lambda_\alpha^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であり、その近傍で $\tilde{g}_\alpha(\lambda) = k_\alpha^{(n)}(\lambda - \lambda_\alpha^{(n)}) + O[(\lambda - \lambda_\alpha^{(n)})^2]$ ($k_\alpha^{(n)}$ はゼロでない定数) となることに注意し、以下の関係式が成り立つことを示すとともに定数 A を求めよ。

$$Z(s) = A \int_C \lambda^{-s} \left[\frac{1}{\tilde{g}_2(\lambda)} \frac{d\tilde{g}_2(\lambda)}{d\lambda} - \frac{1}{\tilde{g}_1(\lambda)} \frac{d\tilde{g}_1(\lambda)}{d\lambda} \right] d\lambda$$

ただし、積分経路 C は λ の複素平面上で全ての固有値 $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を囲む実軸に沿った経路、 λ^{-s} のブランチカット (切断線) は原点 O から実軸との角度 θ ($\theta \neq 0$) の方向に伸びる半直線とする (図 1 参照)。また s の実部は上の積分が収束する程度に大きいとしてよい。

- (v) $Z'(0)$ を $\tilde{g}_1(0)$ と $\tilde{g}_2(0)$ を用いて表せ。前問に与えられた積分において、経路を C から C_{in} と C_{out} を合成した経路 (図 1 参照) に変形できることを用いてよい。
- (vi) $\tilde{g}_\alpha(0)$ を具体的に計算し、 D を m_1 と m_2 を用いて表せ。

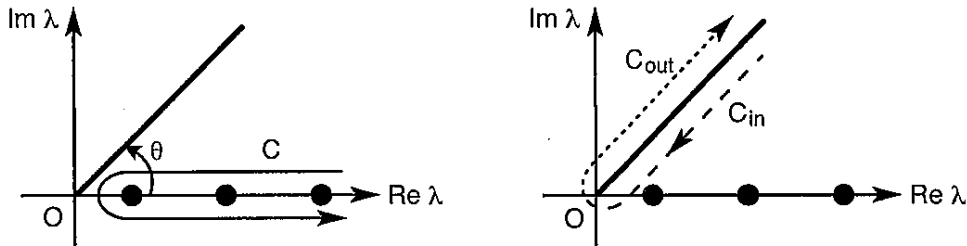


図 1: 積分経路 C (実線), C_{in} (破線), 及び C_{out} (点線)。図中の黒丸は $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 太い実線はブランチカット (切断線) を表す。

1. 2019 年度 第 1 問：Hermite 行列・SU(3)

1.1 1. 交換子と指数行列の性質

【(i)】 $A^\dagger = A$ 、 $B^\dagger = B$ のとき、

$$[A, B]^\dagger = (AB - BA)^\dagger = BA - AB = -[A, B].$$

したがって $(i[A, B])^\dagger = i[A, B]$ で Hermite 行列である。また trace の巡回性より

$$\mathrm{tr}(i[A, B]) = i\{\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA)\} = 0.$$

【(ii)】 e^{iA} の随伴は $(e^{iA})^\dagger = e^{-iA}$ だから

$$U^\dagger U = e^{-iA} e^{iA} = I.$$

【(iii)】 Hermite 行列 A の固有値を $a_j \in \mathbb{R}$ とすれば、

$$\det e^{iA} = \prod_j e^{ia_j} = e^{i\sum_j a_j} = e^{i\mathrm{tr} A} = 1.$$

よって $U = e^{iA} \in SU(N)$ である。

1.2 2. 指定された行列の具体形

原題の表示と照合すると、 T_1 は $\alpha_1 = 1$ 、 T_2 は $\alpha_2 = 1$ 、 T_7 は $\alpha_7 = 1$ に対応する。したがって

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.3 3. 交換関係の係数

E_{jk} を行列単位とする。 $T_1 = E_{12} + E_{21}$ 、 $T_2 = -iE_{12} + iE_{21}$ 、 $T_7 = E_{11} - E_{33}$ なので

$$[T_7, T_1] = E_{12} - E_{21} = iT_2.$$

同様に $T_5 = E_{23} + E_{32}$ 、 $T_6 = -iE_{23} + iE_{32}$ より

$$[T_5, T_6] = 2i(E_{22} - E_{33}) = 2iT_8.$$

$$A_{712} = 1, \quad A_{568} = 2$$

1.4 4. 微小な SU(3) 変換

$T = \sum_{c=1}^8 \alpha_c T_c$ 、 $U = e^{i\theta T}$ 、 $G_a = x^\dagger T_a y$ とする。

(i) G_a の変換と H_{ab}

$U^\dagger = I - i\theta T + O(\theta^2)$ より

$$\begin{aligned} G'_a &= x^\dagger U^\dagger T_a U y \\ &= G_a + i\theta x^\dagger [T_a, T] y + O(\theta^2) \\ &= G_a + i\theta \sum_{b,c} \alpha_c A_{acb} G_b + O(\theta^2). \end{aligned}$$

従って

$$H_{ab} = \sum_{c=1}^8 \alpha_c A_{acb}$$

係数の具体的な 8×8 行列は本節末尾に掲載する。この基底の第 7・第 8 行列は標準的な正規直交基底ではないため、 H が通常の反対称行列になるとは限らない点に注意。

(ii) 外積型ベクトルの変換と M

$z_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} x_j y_k$ とおく。Levi-Civita 記号の恒等式から任意の正則行列 U について

$$(Ux) \times (Uy) = (\det U) U^{-T} (x \times y)$$

が従う。今回 $\det U = 1$ かつ $U^{-T} = I - i\theta T^T + O(\theta^2)$ なので

$$z' = (I + i\theta M)z + O(\theta^2), \quad M = -T^T.$$

具体的には

$$M = - \begin{pmatrix} \alpha_7 & \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_3 + i\alpha_4 \\ \alpha_1 - i\alpha_2 & \alpha_8 & \alpha_5 + i\alpha_6 \\ \alpha_3 - i\alpha_4 & \alpha_5 - i\alpha_6 & -\alpha_7 - \alpha_8 \end{pmatrix}.$$

補足：設問 4(i) の H の成分

α_i の略記を a_i とした場合、交換子の直接計算で

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -a_7 + a_8 & -a_6 & a_5 & -a_4 & a_3 & 2a_2 & -2a_2 \\ a_7 - a_8 & 0 & -a_5 & -a_6 & a_3 & a_4 & -2a_1 & 2a_1 \\ a_6 & a_5 & 0 & -2a_7 - a_8 & -a_2 & -a_1 & 2a_4 & 0 \\ -a_5 & a_6 & 2a_7 + a_8 & 0 & a_1 & -a_2 & -2a_3 & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & 0 & -a_7 - 2a_8 & 0 & 2a_6 \\ -a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 & a_7 + 2a_8 & 0 & 0 & -2a_5 \\ -a_2 & a_1 & -2a_4 & 2a_3 & -a_6 & a_5 & 0 & 0 \\ a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 & -2a_6 & 2a_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 2019 年度 第 2 問：スペクトルゼータ関数

2.1 1. 固有値と固有関数

方程式 $-f'' - m_\alpha^2 f = \lambda f$ を書き換えると

$$f'' + k^2 f = 0, \quad k^2 = \lambda + m_\alpha^2.$$

$f'(0) = 0$ から $f(x) = C \cos(kx)$ 。さらに $f(\pi) = 0$ より $\cos(k\pi) = 0$ だから $k_n = n - \frac{1}{2}$ ($n \geq 1$)。したがって

$$\lambda_\alpha^{(n)} = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - m_\alpha^2, \quad f_\alpha^{(n)}(x) = C_n \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right)$$

原題は規格化不要。条件 $m_\alpha < 1/2$ により全固有値が正である。

2.2 2. 正則化した無限積と微分公式

【(i)】 $\lambda > 0$ を定数とすると

$$\frac{d}{ds} \lambda^{-s} = -\lambda^{-s} \log \lambda$$

【(ii)】 原題の $Z(s)$ を微分し $s = 0$ に形式的に代入すると

$$Z'(0) = -\sum_{n \geq 1} \log \lambda_2^{(n)} + \sum_{n \geq 1} \log \lambda_1^{(n)}.$$

この等式は解析接続による定義として理解すべきで、無限和の個々の項を無条件で分離するものではない。よって

$$D = \exp[-Z'(0)]$$

【(iii)】 $\lambda > -m_\alpha^2$ として $g'' + (\lambda + m_\alpha^2)g = 0$ を解く。 $g(0) = 1$ 、 $g'(0) = 0$ であるから

$$g_\alpha(x; \lambda) = \cos(x\sqrt{\lambda + m_\alpha^2})$$

【(iv)】 $\tilde{g}_\alpha(\lambda) = g_\alpha(\pi; \lambda)$ は

$$\tilde{g}_\alpha(\lambda) = \cos(\pi\sqrt{\lambda + m_\alpha^2}).$$

この関数は λ の整関数（余弦の偶冪級数による）で、零点は $\lambda_\alpha^{(n)}$ である。単純零点なので、対数微分は各零点で留数 1 を持つ。閉曲線 C に関する留数定理から

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \lambda^{-s} \left(\frac{\tilde{g}'_2(\lambda)}{\tilde{g}_2(\lambda)} - \frac{\tilde{g}'_1(\lambda)}{\tilde{g}_1(\lambda)} \right) d\lambda = \sum_n [(\lambda_2^{(n)})^{-s} - (\lambda_1^{(n)})^{-s}].$$

従って原題の係数は

$$A = \frac{1}{2\pi i}$$

2.3 3. 積分路の変形と $Z'(0)$

【(v)】 図の C を原点側の C_{in} と無限遠側の C_{out} へ変形する。 λ^{-s} を解析接続したうえで $s = 0$ 付近で微分すると、両 $\tilde{g}_\alpha$ の大 $|\lambda|$ 漸近は同じであるため差の無限遠寄与は相殺する。一方、原点の小輪郭は対数微分 $\log(\tilde{g}_2/\tilde{g}_1)$ の値を与える。結果は

$$Z'(0) = -\log \frac{\tilde{g}_2(0)}{\tilde{g}_1(0)}$$

独立検証：より直接的には Weierstrass 積

$$\cos(\pi m) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{m^2}{(n - \frac{1}{2})^2}\right)$$

を用いると、分子分母で共通の $(n - \frac{1}{2})^2$ が相殺され、同じ結果になる。これは原題の輪郭積分法とは別の確認方法である。【(vi)] $\tilde{g}_\alpha(0) = \cos(\pi m_\alpha)$ なので

$$D = \frac{\cos(\pi m_2)}{\cos(\pi m_1)}$$

$m_1, m_2 < 1/2$ なので両余弦は正で、 $\log$ の枝に関する曖昧さは生じない。

数学 | 年度別問題

2018 年度

出題テーマ / 編集上の分類

最小ノルム解／非線形方程式

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2018年度

最小ノルム解 / 非線形方程式

出典：既刊数学編 2017・2018年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第1問

2成分の行ベクトル $A = (a, b)$ について考える。ただし a, b はゼロでない実数とする。また、以下では T は行列の転置を表す。例えば、 A^T は A を転置した列ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を表し、 $A^T A$ は次のような2行2列の行列となる。

$$A^T A = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

1. $A^T A$ の全ての固有値と固有ベクトルを求めよ。
2. 2成分の行ベクトル B と2行2列の行列 V を用いて $A = BV$ と分解する。ここで B は、正の実数 c を用いて $B = (c, 0)$ という形をとり、 V は実対称直交行列となるように選ぶ。 c と V をそれぞれ a, b を用いて表せ。
3. $\tilde{B}\tilde{B} = 1$ を満たし、 $\tilde{B}\tilde{B}$ が2行2列の実対称行列となるような列ベクトル $\tilde{B}$ を c を用いて書け。
4. $\tilde{A}\tilde{A} = 1$ を満たし、 $\tilde{A}\tilde{A}$ が2行2列の実対称行列となるような列ベクトル $\tilde{A}$ は一意に定まる。 $\tilde{A}$ を $\tilde{B}$ と V を用いて書け。

つぎに、 n 成分の行ベクトル $A_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ について考える。ただし $a_1, a_2, \dots, a_n$ はゼロでない実数であり、 $n \geq 3$ とする。

5. ゼロでない実数 v に対して、 $A_n X = v$ を満たす n 成分の列ベクトル X のうち、 $\|X\|^2 = X^T X$ が最小となる $X = X_0$ を求めよ。また、このように求めた X_0 は、 v によらない列ベクトル $\tilde{A}_n$ を用いて $X_0 = v\tilde{A}_n$ と書ける。このとき、 $A_n \tilde{A}_n = 1$ が成り立ち、 $\tilde{A}_n A_n$ が実対称行列であることを示せ。
6. 任意の行列 M に対して、 $M^T M$ のゼロでない固有値は、 MM^T の固有値となることを示せ。このことを用いて、 n 行 n 列の行列 $A_n^T A_n$ の全ての固有値を求めよ。
7. 一般には、重複する固有値を持つ行列は対角化可能であるとは限らない。 $A_n^T A_n$ が対角化可能か否かを理由とともに述べよ。

第2問

1. 二変数関数 $u(t, x)$ が次の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

を満たすとする。微分可能な関数 $f(x)$ を用いて

$$u(t = 0, x) = f(x)$$

と初期条件が与えられるとき、 $t > 0$ での解 $u(t, x)$ を書け。

2. 一変数関数 $u(x)$ が次の微分方程式

$$u \frac{du}{dx} = \frac{d^2 u}{dx^2} \quad (1)$$

を満たすとする。ただし、 $u(x)$ は無限領域上で微分可能とする。

- (i) 式 (1) を

$$\frac{d}{dx} F = 0$$

の形に表したときの F を、 u と $\frac{du}{dx}$ を用いて書け。

- (ii) 境界条件

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) &= W \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) &= -W \\ u(x = 0) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす解 $u(x)$ を求めよ。ここで、 W は正の定数である。

3. 二変数関数 $u(t, x)$ が次の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

を満たすとする。ここで、 D は正の定数である。この非線形方程式を線形方程式に帰着させて解く手順を考える。

- (i) 次の偏微分方程式

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + D \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (3)$$

を満たす関数 $s(t, x)$ によって

$$u^*(t, x) = -\frac{\partial s(t, x)}{\partial x}$$

と与えられる $u^*(t, x)$ は、式 (2) の解となることを示せ。

(ii) 関数 $\phi(t, x)$ が次の線形偏微分方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (4)$$

を満たすとする。ある関数 $S(\phi)$ によって

$$s^*(t, x) = S(\phi(t, x))$$

と与えられる $s^*(t, x)$ が式 (3) の解となるとき、 $S(\phi)$ が満たす微分方程式を導け。さらに $S(\phi)$ を求めよ。

(iii) $\phi(t, x)$ は、次のように定義されるフーリエ変換によって

$$\phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(t, k) e^{ikx} dk$$

と表されとする。ここで、 i は虚数単位を表す。 $\tilde{\phi}(t, k)$ が満たす微分方程式を式 (4) から導け。さらに、関数 $g(k)$ を用いて

$$\tilde{\phi}(t=0, k) = g(k)$$

と初期条件が与えられるとき、 $t > 0$ での解 $\tilde{\phi}(t, k)$ を求めよ。

3. 2018 年度 | 第 1 問 階数 1 行列と最小ノルム

原題の $A = (a, b)$ は行ベクトルで、 $a, b \neq 0$ とする。 $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ とおく。

3.1 設問 1: $A^T A$ の固有値・固有ベクトル

$$A^T A = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}.$$

$A^T A A^T = (a^2 + b^2)A^T = r^2 A^T$ だから r^2 は固有値。 $(-b, a)^T$ は A と直交するので $A^T A(-b, a)^T = 0$ 。したがって

$$\lambda_1 = r^2, \mathbf{v}_1 = \frac{1}{r}(a, b)^T; \quad \lambda_2 = 0, \mathbf{v}_2 = \frac{1}{r}(-b, a)^T$$

3.2 設問 2: $A = BV$ の分解

$B = (c, 0)$ 、 $V^T V = I$ に加えて $V^T = V$ を要求する。 $A = BV$ の両辺のノルムから $c = r$ 。 V の第 1 行は $(a/r, b/r)$ なので、直交かつ対称な選択は

$$c = r, \quad V = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$V^T = V$ 、 $V^2 = I$ 、 $BV = A$ を直接確認できる。

3.3 設問 3: 列ベクトル $\tilde{B}$

$B\tilde{B} = 1$ と $\tilde{B}B$ の対称性を要求する。 $\tilde{B} = (u, v)^T$ とおけば $ru = 1$ 。さらに

$$\tilde{B}B = \begin{pmatrix} ru & 0 \\ rv & 0 \end{pmatrix}$$

が対称になる条件は $rv = 0$ 。 $r > 0$ だから

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1/r \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.4 設問 4: 列ベクトル $\tilde{A}$

$A = BV$ と $V^{-1} = V^T = V$ を用いて

$$\tilde{A} = V^T \tilde{B} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

このとき

$$A\tilde{A} = 1, \quad \tilde{A}A = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

は対称である。対称性から $\tilde{A}$ は A^T と平行でなければならず、 $A\tilde{A} = 1$ から唯一に定まる。

$$\tilde{A} = V^T \tilde{B} = \frac{A^T}{AA^T}$$

3.5 設問 5 : n 次元での最小ノルム解

$A_n = (a_1, \dots, a_n)$ 、 $A_n X = v \neq 0$ とする。Cauchy-Schwarz の不等式から

$$|v|^2 = |A_n X|^2 \leq \|A_n\|^2 \|X\|^2.$$

等号が成り立つのは X が A_n^T と平行のときだけである。ゆえに

$$X_0 = \frac{v}{\|A_n\|^2} A_n^T, \quad \tilde{A}_n = \frac{A_n^T}{\|A_n\|^2}.$$

また $A_n \tilde{A}_n = 1$ 、 $\tilde{A}_n A_n = A_n^T A_n / \|A_n\|^2$ は対称である。

$$X_0 = \frac{v}{\sum_{j=1}^n a_j^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

3.6 設問 6 : 非零固有値と特異値

任意の実行列 M に対し、 $M^T M x = \lambda x$ 、 $\lambda \neq 0$ なら $Mx \neq 0$ かつ

$$M M^T (Mx) = M(M^T M x) = \lambda(Mx).$$

逆も M^T により同様である。したがって $M^T M$ と $M M^T$ の非零固有値は重複度込みで一致する (非零固有空間は M により同型)。 $M = A_n$ なら $A_n A_n^T = (\sum a_j^2)$ は 1 行 1 列の行列なので

$$\text{Spec}(A_n^T A_n) = \left\{ \sum_{j=1}^n a_j^2, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1} \right\}$$

3.7 設問 7 : 対角化可能性

$A_n^T A_n$ は実対称行列である。実対称行列はスペクトル定理により直交行列で対角化できる。非零固有値が重複しているかどうかは妨げにならない。実際、 $A_n^T / \|A_n\|$ と、その直交補空間の任意の正規直交基底を並べれば固有ベクトル基底になる。【答】 $A_n^T A_n$ は必ず直交対角化可能である。

4. 2018 年度 | 第 2 問 輸送・非線形拡散

4.1 設問 1 : 一次の輸送方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(0, x) = f(x).$$

特性曲線 $x - t = \xi$ に沿う $u(t, x)$ は一定なので

$$u(t, x) = f(x - t)$$

4.2 設問 2 : 定常 Burgers 型の常微分方程式

(i) 保存量 F

$$u \frac{du}{dx} = \frac{d^2 u}{dx^2} \implies \frac{d}{dx} \left(u' - \frac{u^2}{2} \right) = 0.$$

$$\boxed{F = u' - \frac{1}{2}u^2}$$

(ii) 境界条件を満たす解

$u(x) \rightarrow W$ ($x \rightarrow -\infty$)、 $u(x) \rightarrow -W$ ($x \rightarrow +\infty$)、 $u(0) = 0$ 、 $W > 0$ 。 u の両端の有限極限と $u' = F + u^2/2$ から、端点で $u' \rightarrow 0$ でなければならない。従って定数 $F = -W^2/2$ で

$$u' = \frac{u^2 - W^2}{2}.$$

変数分離して

$$\int \frac{du}{u^2 - W^2} = \frac{x}{2} + C \implies \frac{1}{2W} \log \left| \frac{u - W}{u + W} \right| = \frac{x}{2} + C.$$

$u(0) = 0$ より定数を定め、両端の境界条件に適合する枝を選ぶと

$$\boxed{u(x) = -W \tanh\left(\frac{Wx}{2}\right)}$$

【検算】 $u' = -(W^2/2) \operatorname{sech}^2(Wx/2) = (u^2 - W^2)/2$ 。 $x \rightarrow \pm\infty$ の極限と $u(0) = 0$ も満たす。

4.3 設問 3 : 非線形偏微分方程式の線形化

$$u_t + uu_x = Du_{xx}, \quad D > 0.$$

(i) $u^* = -s_x$ が解になること

$s_t = \frac{1}{2}s_x^2 + Ds_{xx}$ とする。 x で微分すれば

$$s_{xt} = s_x s_{xx} + Ds_{xxx}.$$

$u^* = -s_x$ とおくと

$$\begin{aligned} u_t^* + u^* u_x^* &= -s_{xt} + (-s_x)(-s_{xx}) \\ &= -(s_x s_{xx} + Ds_{xxx}) + s_x s_{xx} \\ &= -Ds_{xxx} = Du_{xxx}^*. \end{aligned}$$

よって所望の非線形偏微分方程式を満たす。

(ii) Cole-Hopf 変換 $s = S(\phi)$

$\phi_t = D\phi_{xx}$ と仮定して $s = S(\phi)$ を代入する。

$$s_t = DS'(\phi)\phi_{xx}, \quad s_x = S'(\phi)\phi_x, \quad s_{xx} = S''(\phi)\phi_x^2 + S'(\phi)\phi_{xx}.$$

両辺で ϕ_{xx} の項が消え、 ϕ_x^2 の係数比較から

$$DS''(\phi) + \frac{1}{2}(S'(\phi))^2 = 0.$$

$p = S'$ とおけば $p' = -p^2/(2D)$ だから、非定数の解は

$$p(\phi) = \frac{2D}{\phi + C_1}, \quad S(\phi) = 2D \ln |\phi + C_1| + C_2.$$

【答】 代表例として正值の ϕ を用いれば

$$s = 2D \ln \phi, \quad u = -2D \partial_x \ln \phi$$

これが Cole–Hopf 変換である。 S が定数の場合も形式的には解だが、一般の非線形解の線形化には上の非定数の枝を用いる。

(iii) Fourier 変換による熱方程式の解

原題の規約

$$\phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(t, k) e^{ikx} dk$$

で代入すると $\partial_x^2 \mapsto -k^2$ なので

$$\frac{\partial \tilde{\phi}(t, k)}{\partial t} = -Dk^2 \tilde{\phi}(t, k).$$

$\tilde{\phi}(0, k) = g(k)$ の初期条件から

$$\tilde{\phi}(t, k) = e^{-Dk^2 t} g(k)$$

必要なら逆変換して $\phi(t, x) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-Dk^2 t} g(k) e^{ikx} dk$ を得る。

数学 | 年度別問題

2017 年度

出題テーマ / 編集上の分類

Laplace変換／回転

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2017年度

Laplace 変換 / 行列と 3 次元回転

出典：既刊数学編 2017・2018年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第1問

実数 $t \geq 0$ において定義されている関数 $f(t)$ に対するラプラス変換 $L[f(t)]$ は、複素数 s を用いて積分

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

で定義される。また、 $t \geq 0$ における $F(s)$ の逆ラプラス変換 $L^{-1}[F(s)] = f(t)$ は、 s に関する複素積分を用いて

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (1)$$

と表される。ここで式 (1) の積分路は、実部が γ で虚軸に平行な直線であり、 γ は $F(s)$ のすべての特異点が積分路の左側になるように選ぶ。以下の設問に答えよ。

1. 実数 $t \geq 0$ において定義されている以下の (i)~(iii) の関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めよ。また、ラプラス変換の積分が収束するための s に対する条件を各々示せ。

(i) $f(t) = t$

(ii) $f(t) = \sin \omega t$ (ω は正の実数)

(iii) $f(t) = \sqrt{t}$ (≥ 0)

2. ラプラス変換を用いて次の積分方程式の解 $f(t)$ を求める。

$$f(t) = \sin t + \int_0^t \sin(t-t') f(t') dt' \quad (t \geq 0) \quad (2)$$

- (i) 一般に関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ のたたみ込みを $(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t-t') f_2(t') dt'$ と定義する。 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ の各々のラプラス変換を $F_1(s)$, $F_2(s)$ とするとき、 $(f_1 * f_2)(t)$ のラプラス変換は

$$L[(f_1 * f_2)(t)] = F_1(s) F_2(s) \quad (3)$$

となることを示せ。

- (ii) 式 (3) を用いて式 (2) の両辺をラプラス変換し、 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めよ。

- (iii) $f(t)$ を求めよ。

3. $F(s) = \frac{s}{(s-1)^2}$ の逆ラプラス変換 $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ を求めよ。

第2問

3次元実ベクトル空間について、以下の設問に答えよ。

ただし、 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ を単位ベクトル、すなわち $\sum_{i=1}^3 a_i^2 = 1$ を満たす3次元ベクトルとする。

1. $\vec{x}$ を任意の3次元ベクトルとすると、外積 $\vec{a} \times \vec{x}$ は行列 $J(\vec{a})$ を用いて $\vec{a} \times \vec{x} = J(\vec{a})\vec{x}$ と書くことができる。行列 $J(\vec{a})$ を求めよ。
2. 行列 $J(\vec{a})$ の固有値をすべて求めよ。
3. $P(\vec{a}) = -J(\vec{a})^2$ と定義する。以下の (i)~(iii) の等式を示せ。
 - (i) $P(\vec{a})\vec{a} = 0$
 - (ii) $\vec{a}$ と直交するすべてのベクトル $\vec{b}$ に対して $P(\vec{a})\vec{b} = \vec{b}$
 - (iii) $P(\vec{a})^2 = P(\vec{a})$
4. θ を任意の実数とする行列 $\exp(\theta J(\vec{a}))$ は、次のように展開することができる。

$$\exp(\theta J(\vec{a})) = f_1(\theta)I + f_2(\theta)P(\vec{a}) + f_3(\theta)J(\vec{a})P(\vec{a})$$

ここで I は単位行列であり、 $f_i(\theta)$ ($i = 1, 2, 3$) は $\vec{a}$ によらない θ の関数である。 $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, $f_3(\theta)$ を求めよ。ただし、行列の指数関数は $\exp(\theta J(\vec{a})) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} J(\vec{a})^n$ と定義される。

5. $\vec{a}$ と直交する単位ベクトルの一つを $\vec{b}$ とし、 $\vec{c}$ を $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ と定義すると、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は正規直交基底となる。行列 $\exp(\theta J(\vec{a}))$ と $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ それぞれとの積を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の線形和で表し、この行列が $\vec{a}$ を軸とした角度 θ の回転を表すことを示せ。
6. $\vec{b}, \vec{c}$ を設問5で与えたベクトルとする。任意の実数 θ, φ に対して、実数 χ と単位ベクトル $\vec{e}$ を選ぶことにより

$$\exp(\theta J(\vec{a})) \exp(\varphi J(\vec{b})) \exp(-\theta J(\vec{a})) = \exp(\chi J(\vec{e}))$$

と書くことができる。 $\vec{e}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の線形和で表し、 χ を求めよ。

1. 2017 年度 | 第 1 問 Laplace 変換

1.1 設問 1 : 三つの関数の Laplace 変換と収束域

Laplace 変換の定義は

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

である。 s は複素数とする。

(i) $f(t) = t$

【導出】 $\Re s > 0$ ならば部分積分により

$$\int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \left[-\frac{t e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}.$$

$$\boxed{\mathcal{L}[t](s) = \frac{1}{s^2} \quad (\Re s > 0)}$$

(ii) $f(t) = \sin(\omega t)$, $\omega > 0$

【導出】 指数表示を用いると

$$\mathcal{L}[\sin \omega t](s) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\sin \omega t](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\Re s > 0)}$$

(iii) $f(t) = \sqrt{t}$

【導出】 $u = st$ を実数正の s について先に用い、 $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ を使う。右半平面へ解析接続して

$$\mathcal{L}[\sqrt{t}](s) = s^{-3/2} \int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) s^{-3/2}.$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\sqrt{t}](s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} \quad (\Re s > 0)}$$

ここで $s^{3/2}$ は右半平面上で解析的な枝を選ぶ。 $\Re s = 0$ では上記の通常の広義積分は一般に収束しない。

1.2 設問 2 : 畳み込みと積分方程式

(i) 畳み込み定理を証明する

【導出】 $(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t-u)f_2(u) \, du$ とおく。十分大きい $\Re s$ で絶対収束するなら、Fubini の定理と $v = t - u$ により

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1 * f_2](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f_1(t-u)f_2(u) \, du \, dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f_1(v)f_2(u) \, dv \, du \\ &= \left(\int_0^\infty e^{-sv} f_1(v) \, dv \right) \left(\int_0^\infty e^{-su} f_2(u) \, du \right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[f_1 * f_2](s) = F_1(s)F_2(s)}$$

(ii) 与えられた積分方程式の変換

原題の式は

$$f(t) = \sin t + \int_0^t \sin(t-t')f(t') \, dt'.$$

$F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ 、 $S(s) = \mathcal{L}[\sin t](s) = 1/(s^2 + 1)$ とおくと

$$F = S + SF \implies F(1 - S) = S.$$

したがって

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{s^2} \quad (\Re s > 0)}$$

(iii) $f(t)$ を求める

設問 1(i) から $\mathcal{L}^{-1}[s^{-2}](t) = t$ であり、

$$\boxed{f(t) = t \quad (t \geq 0)}$$

【検算】 $\int_0^t \sin(t-u)u \, du = t - \sin t$ なので、右辺は $\sin t + t - \sin t = t$ 。

1.3 設問 3：極の重複した有理関数の逆変換

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)^2} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}.$$

第一項は e^t 、第二項は te^t の Laplace 変換だから

$$\boxed{f(t) = (1+t)e^t \quad (t \geq 0)}$$

原題の Bromwich 積分を使う場合、 $s = 1$ の二重極での留数を計算しても同じ結果になる。収束半平面は $\Re s > 1$ 。

2. 2017 年度 | 第 2 問 外積行列と回転

2.1 設問 1 : 外積を行列で表す

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ 、 $\|\mathbf{a}\| = 1$ とする。外積の成分表示から

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

$$J(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 設問 2 : 固有値

$J\mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ なので 0 は固有値。三重積の公式から

$$J^2 \mathbf{x} = \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{x},$$

すなわち $J^2 = \mathbf{a}\mathbf{a}^T - I$ 。また J は実反対称行列である。 $\mathbf{a}$ に垂直な 2 次元平面では $J^2 = -I$ だから、残りの固有値は $\pm i$ 。

$$\text{Spec } J(\mathbf{a}) = \{0, i, -i\}$$

2.3 設問 3 : $P = -J^2$ の射影性

$\|\mathbf{a}\| = 1$ から

$$P(\mathbf{a}) = -J^2 = I - \mathbf{a}\mathbf{a}^T.$$

$$(i) \quad P\mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{a}(\mathbf{a}^T \mathbf{a}) = 0.$$

$$(ii) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ なら } P\mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b}.$$

$$(iii) \quad P^2 = (I - \mathbf{a}\mathbf{a}^T)^2 = I - 2\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \mathbf{a}(\mathbf{a}^T \mathbf{a})\mathbf{a}^T = P.$$

したがって P は $\mathbf{a}$ に垂直な平面への直交射影である。

2.4 設問 4 : 行列指数の展開

$J^3 = -J$ 、 $J^4 = P$ および $JP = J$ を使って奇数冪・偶数冪をまとめると

$$\begin{aligned} e^{\theta J} &= I + (\sin \theta)J + (1 - \cos \theta)J^2 \\ &= I + (\cos \theta - 1)P + (\sin \theta)JP. \end{aligned}$$

したがって原題の f_1, f_2, f_3 は

$$f_1(\theta) = 1, \quad f_2(\theta) = \cos \theta - 1, \quad f_3(\theta) = \sin \theta$$

2.5 設問 5 : a, b, c の基底での表示

$b \perp a$ かつ $\|b\| = 1$ 、 $c = a \times b$ とする。すると

$$Ja = 0, \quad Jb = c, \quad Jc = -b.$$

よって

$$R(\theta) := e^{\theta J(a)} \Rightarrow \begin{cases} Ra = a, \\ Rb = b \cos \theta + c \sin \theta, \\ Rc = -b \sin \theta + c \cos \theta. \end{cases}$$

【答】 R は a を固定し、右手系で a のまわりに角度 θ だけ回す回転を表す。

2.6 設問 6 : 回転行列の共役作用

$R = e^{\theta J(a)}$ とおく。行列指数の相似変換と、 R が $\det R = 1$ の直交行列であることから

$$Re^{\varphi J(b)}R^{-1} = e^{\varphi R J(b) R^{-1}}, \quad R J(b) R^{-1} = J(Rb).$$

最後の等式は任意の x に作用させて、 $R(b \times R^{-1}x) = (Rb) \times x$ から従う。設問 5 より $Rb = b \cos \theta + c \sin \theta$ なので

$$\boxed{e = b \cos \theta + c \sin \theta, \quad \chi = \varphi}$$

これが原題の等式を満たす一つの選び方である（角度は 2π の周期性を持つ）。

数学 | 年度別問題

2016 年度

出題テーマ / 編集上の分類

行列漸化式／非線形波動

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2016年度

行列漸化式 / 非線形波動方程式

出典：既刊数学編 2015・2016年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第1問

1. 二つの2次正方行列

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (1)$$

から、以下のような規則で行列 M_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を生成する。まず, $M_0 = B, M_1 = A$ と定義し, 次に一般の $n \geq 2$ については

$$M_n = M_{n-1}M_{n-2} \quad (2)$$

という漸化式により行列 M_n を定義する。このとき, 以下の設問に答えよ。

(i) 一般の n について, M_n が次の性質を満たすことを示せ。ただし, E は2次の単位行列である。

$$(a) \det M_n = 1, \quad (b) \operatorname{Tr} M_n = \operatorname{Tr} (M_n)^{-1}, \quad (c) M_n + (M_n)^{-1} = (\operatorname{Tr} M_n)E$$

以下では, $x_n = \operatorname{Tr} M_n$ が満たす性質を調べる。

(ii) $M_{n+1} + (M_{n-2})^{-1}$ を M_n と M_{n-1} で表せ。また, それを用いて, x_n が漸化式

$$x_{n+1} = x_n x_{n-1} - x_{n-2} \quad (3)$$

を満たすことを示せ。

(iii) (3) の漸化式を用いて, x_n, x_{n+1}, x_{n+2} から構成される

$$I_n = x_{n+2}^2 + x_{n+1}^2 + x_n^2 - x_{n+2} x_{n+1} x_n \quad (4)$$

が n に依存しない量であることを証明せよ。また, その値を求めよ。

2. 次の N 次正方行列 C を考える。

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & & \\ & b_2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{N-1} \\ 0 & & & b_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

すなわち, $C_{i,i+1} = C_{i+1,i} = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) であり, これら以外の成分はすべて0であるものとする。また, すべての i について, $b_i > 0$ であるとする。このとき, 以下の設問に答えよ。

- (i) $N = 3$ の場合について、行列 C の固有値をすべて求めよ。
- (ii) 列ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T$ が、行列 C の固有ベクトルであるとき、 $v_1 \neq 0$ であることを証明せよ。
- (iii) 行列 C の固有値がすべて互いに異なることを証明せよ。(設問 (ii) の結果を用いてもよい。)

第2問

1. $y(x, t)$ に対する偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \lambda^2 y = 0 \quad (1)$$

を考える。(λは正の定数とする。)

- (i) 初期条件, $y(x, 0) = \cos kx$, $\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ の下で, $y(x, t)$ を求めよ。(kは正の定数とする。) ただし, この条件のとき, 解が $y(x, t) = f(t)g(x)$ と書けることを用いてもよい。
- (ii) 設問 (i) で得られた解を, x 軸の正の方向に進む波と負の方向に進む波との2つに分解せよ。

2. 次に

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\lambda^2(y^3 - y) = 0 \quad (2)$$

を考える。(λは正の定数とする。)

- (i) まず, t に依存しない解 $y(x, t) = u(x)$ を考える。 $u(x)$ に対する微分方程式

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + 2\lambda^2(u^3 - u) = 0 \quad (3)$$

の両辺に $\frac{du}{dx}$ をかけて, その積分を求めることにより

$$\frac{du}{dx} = \pm \lambda \sqrt{u^4 - 2u^2 + A} \quad (4)$$

が成立することを示せ。ここで, A は積分定数である。

- (ii) 設問 (i) の $u(x)$ が満たす境界条件を

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -1 \quad (5)$$

とする。このとき A の値を求めよ。

- (iii) 設問 (ii) の境界条件の下で $u(x)$ を求めよ。ただし $|u(x)| \leq 1, u(0) = 0$ としてよい。

- (iv) 次に, (3) を満たす $u(x)$ を用いて $y(x, t) = u(x) + z(x, t)$ とおき, z が満たす偏微分方程式を求めよ。ただし z は微小であるとして, z^2, z^3 に比例する項は無視してよい。

- (v) (3) を使って, 設問 (iv) で求めた z の偏微分方程式の1つの解が

$$z_0(x, t) = e^{i\omega t} \frac{du}{dx} \quad (6)$$

で与えられることを示せ。また, そのときの ω の値を求めよ。

3 2016 年度 第 1 問：行列漸化式と Jacobi 行列

3.1 設問 1(i) : $SL(2)$ 行列の恒等式

与えられた A, B について、直接計算から $\det A = \det B = 1$ 。 $M_n = M_{n-1}M_{n-2}$ なので帰納法により全ての n で

$$\det M_n = 1.$$

任意の 2×2 行列について $\operatorname{Tr} M^{-1} = (\operatorname{Tr} M)/(\det M)$ だから

$$\operatorname{Tr} M_n = \operatorname{Tr}(M_n^{-1}).$$

さらに Cayley-Hamilton の定理は $M_n^2 - (\operatorname{Tr} M_n)M_n + I = 0$ 。右から M_n^{-1} を掛ければ

$$M_n + M_n^{-1} = (\operatorname{Tr} M_n)I.$$

3.2 設問 1(ii) : トレースの 3 項漸化式

$M_n = M_{n-1}M_{n-2}$ から $M_{n-2}^{-1} = M_n^{-1}M_{n-1}$ 。よって

$$\begin{aligned} M_{n+1} + M_{n-2}^{-1} &= M_n M_{n-1} + M_n^{-1} M_{n-1} \\ &= (M_n + M_n^{-1}) M_{n-1} \\ &= x_n M_{n-1}. \end{aligned}$$

両辺のトレースを取り、 $\operatorname{Tr} M_{n-2}^{-1} = x_{n-2}$ を使うと

$$x_{n+1} = x_n x_{n-1} - x_{n-2}.$$

3.3 設問 1(iii) : 3 変数の不変量

$a = x_n, b = x_{n+1}, c = x_{n+2}$ と置く。漸化式により $x_{n+3} = bc - a$ である。

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= (bc - a)^2 + c^2 + b^2 - (bc - a)bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - abc = I_n. \end{aligned}$$

よって n に依らない。初期値は

$$x_0 = \operatorname{Tr} B = \sqrt{3}, \quad x_1 = \operatorname{Tr} A = \sqrt{2}, \quad x_2 = \operatorname{Tr}(AB) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

この 3 値を代入して

$$I_n = 4 \quad (n \geq 0).$$

A, B はともに平面回転行列なので可換であり、この数値結果とも整合する。

3.4 設問 2(i) : 3 次の対称三重対角行列

$N = 3$ では

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

特性多項式を計算すると

$$\det(\mu I - C) = \mu(\mu^2 - b_1^2 - b_2^2).$$

従って固有値は

$$\mu = 0, \quad \mu = \pm \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

3.5 設問 2(ii) : 固有ベクトルの第 1 成分は非零

$Cv = \mu v$ とすると最初の成分は $b_1 v_2 = \mu v_1$ 。 $v_1 = 0$ なら $b_1 > 0$ から $v_2 = 0$ 。次に第 2 成分の式から $b_2 v_3 = 0$ 、以下同様に帰納すると全成分がゼロとなり、固有ベクトルであることに矛盾する。従って

$$v_1 \neq 0.$$

3.6 設問 2(iii) : 固有値の単純性

$Cv = \mu v$ の成分表示は

$$b_{j-1}v_{j-1} + b_j v_{j+1} = \mu v_j, \quad b_0 = b_N = 0.$$

$b_j > 0$ なので、 v_1 を指定すると各成分は再帰的に一意に決まる。従って任意の固有値 μ に対応する固有空間の次元は高々 1。 C は実対称で直交対角化可能だから、幾何学的重複度と代数的重複度は一致する。よって

$$C \text{ の固有値はすべて相異なる。}$$

4 2016 年度 第 2 問：波動方程式と非線形 kink

4.1 設問 1(i)：質量項のある波動方程式

$y_{tt} - y_{xx} + \lambda^2 y = 0$ を考える。 $y = \cos(kx)F(t)$ と置くと

$$F''(t) + (k^2 + \lambda^2)F(t) = 0.$$

$F(0) = 1, F'(0) = 0$ なので

$$\boxed{y(x, t) = \cos(kx) \cos(\Omega t)}, \quad \Omega = \sqrt{k^2 + \lambda^2}.$$

4.2 設問 1(ii)：右進行波と左進行波

積和公式から

$$\boxed{y(x, t) = \frac{1}{2} \cos(kx - \Omega t) + \frac{1}{2} \cos(kx + \Omega t)}.$$

第 1 項は正の x 方向、第 2 項は負の x 方向に進む。位相速度の大きさは Ω/k である ($k > 0$)。

4.3 設問 2(i)：静的解の第 1 積分

非線形方程式 $y_{tt} - y_{xx} + 2\lambda^2(y^3 - y) = 0$ に対し、 $y = u(x)$ と置けば

$$-u'' + 2\lambda^2(u^3 - u) = 0.$$

両辺に u' を掛けて積分すると

$$-\frac{1}{2}(u')^2 + \frac{\lambda^2}{2}(u^4 - 2u^2) = \text{const.}$$

従って積分定数 A を用いて

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \pm \lambda \sqrt{u^4 - 2u^2 + A}}.$$

4.4 設問 2(ii)：両端の境界条件から $A = 1$

$u(+\infty) = 1, u(-\infty) = -1$ 。この非特異な静的 kink では両端で $u' \rightarrow 0$ となるので、第 1 積分に $u = \pm 1$ を代入して

$$0 = \lambda^2(1 - 2 + A) \implies \boxed{A = 1}.$$

4.5 設問 2(iii) : kink の解析解

$A = 1$ なら

$$(u')^2 = \lambda^2(1 - u^2)^2.$$

増加する枝と $|u| \leq 1$ を採用すると $u' = \lambda(1 - u^2)$ 。変数分離より

$$\operatorname{arctanh} u = \lambda(x - x_0), \quad u(x) = \tanh(\lambda(x - x_0)).$$

$x_0 = 0$ (原点で $u = 0$) と選べば

$$\boxed{u(x) = \tanh(\lambda x)}.$$

4.6 設問 2(iv) : kink の周りの線形化

$y = u + z$ とし、 z^2, z^3 を無視すると

$$(u + z)^3 - (u + z) = (u^3 - u) + (3u^2 - 1)z + O(z^2).$$

u が静的方程式を満たすことから定常部分を相殺して

$$\boxed{z_{tt} - z_{xx} + 2\lambda^2(3u(x)^2 - 1)z = 0}.$$

4.7 設問 2(v) : 並進対称性からの零モード

静的方程式 $-u'' + 2\lambda^2(u^3 - u) = 0$ を x で微分すると

$$-u''' + 2\lambda^2(3u^2 - 1)u' = 0.$$

すなわち u' は線形化された空間微分作用素の固有値ゼロの固有関数である。 $z_0 = e^{i\omega t}u'$ を代入すると $-\omega^2 u' = 0$ 。 $u' \neq 0$ なので

$$\boxed{\omega = 0}, \quad \boxed{z_0(x, t) = u'(x) = \lambda \operatorname{sech}^2(\lambda x)}.$$

これは kink の中心 x_0 を微小にずらしても解が保たれるという、空間並進対称性に伴う零モードである。

数学 | 年度別問題

2015 年度

出題テーマ / 編集上の分類

Cayley-Hamilton / 熱核

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2015年度

Cayley-Hamilton / 熱方程式 Green 関数

出典：既刊数学編 2015・2016年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第1問

1. n 次の正方行列 A に対して, 変数 x に対する方程式

$$\det(xE - A) = 0 \quad (1)$$

を特性方程式, 左辺を特性多項式と呼ぶ。ただし, E は単位行列である。以下では $n = 2$ の場合を考える。

- (i) 特性方程式を, $\text{Tr } A$, $\det A$ を用いて表せ。
 (ii) 特性多項式において x に行列 A を代入して得られる行列はゼロ行列であり, このため A^N (ただし, $N = 2, 3, \dots$) は A のより低い冪の線形結合で表される。このことを用いて, $\det A = 1$ の場合には,

$$U_N(\xi) - 2\xi U_{N-1}(\xi) + U_{N-2}(\xi) = 0 \quad (2)$$

という漸化式を満たす関数列 $U_N(\xi)$ により, A^N が

$$A^N = U_{N-1}(\xi)A - U_{N-2}(\xi)E \quad (3)$$

のように表されることを示せ。ここで $\xi = \frac{1}{2}\text{Tr } A$ である。

2. 次に, $a \leq x \leq b$ で

$$\mathcal{L}u(x) \equiv \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] \quad (4)$$

により定義された2階微分演算子 $\mathcal{L}$ を考える。ここで, $p(x)$ は x の実関数であり, $p(a) = p(b) = 0$ を満たすものとする。このとき,

$$\int_a^b v^*(x) \mathcal{L}u(x) dx = \int_a^b u(x) (\mathcal{L}v(x))^* dx \quad (5)$$

が成り立つことを示せ。ただし $u(x)$ と $v(x)$ は x の複素関数である。

3. 式 (4) で定義された演算子 $\mathcal{L}$ に対して, 2階微分方程式

$$\mathcal{L}u(x) = \lambda w(x)u(x) \quad (6)$$

を考える。ただし, $w(x)$ は x の実関数であり, $a < x < b$ において正の値をとる。この微分方程式が成立すれば, λ は実数であることを示せ。

また, $\lambda = \lambda_1$ に対する微分方程式 (6) の解を $u_1(x)$, $\lambda = \lambda_2$ に対する解を $u_2(x)$ としたときに, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ であれば

$$\int_a^b u_1(x) u_2^*(x) w(x) dx = 0 \quad (7)$$

であることを示せ。

4. 上記の設問 1 における $U_N(x)$ は, $-1 \leq x \leq 1$ において

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}U_N(x) - 3x\frac{d}{dx}U_N(x) + N(N+2)U_N(x) = 0 \quad (8)$$

という微分方程式を満たすことが知られている。この微分方程式が, 式 (4) において $p(x)$ を適当に選んだ $\mathcal{L}$ により与えられる方程式 (6) の形になることを示せ。さらに, $M \neq N$ に対して

$$\int_{-1}^1 U_M(x)U_N(x)(1-x^2)^{1/2}dx \quad (9)$$

を, 解答の筋道を示した上で求めよ。

第2問

実数 t および x の複素関数 $f(t, x)$ が

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} + S(t, x) \quad (1)$$

という微分方程式を満たすとする。ただし λ は正の実定数、 $S(t, x)$ は与えられた関数である。 $f(t, x)$ は x に関してフーリエ変換可能な関数であるとして、以下の設問に答えよ。

1. $S(t, x) = 0$ のとき、方程式 (1) の一般解は

$$f(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) \exp(-\lambda k^2 t - ikx) \quad (2)$$

という形に表されることを示せ。ただし、 $\tilde{f}(k)$ は k の関数である。

2. 関数 $G(t, x, t', x')$ が

$$\frac{\partial G(t, x, t', x')}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 G(t, x, t', x')}{\partial x^2} + \delta(t - t') \delta(x - x') \quad (3)$$

という方程式を満たすとする。ただし、 $\delta(x)$ はデルタ関数である。このとき

$$f(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(t, x, t', x') S(t', x') \quad (4)$$

という関数が方程式 (1) の解となることを示せ。

3. 複素定数 C と α を適切に選べば

$$G(t, x, t', x') = C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{i\omega(t-t') - ik(x-x')}}{\omega - i\alpha\lambda k^2} \quad (5)$$

という関数は方程式 (3) を満たすことを示せ。また、そのような C と α を求めよ。

4. 式 (5) において、まず ω についての積分を、 $t < t'$ および $t > t'$ それぞれの場合について行え。ただし、設問3で得られた C と α の値を用いること。
5. さらに式 (5) の k についての積分を行い、 $t < t'$ および $t > t'$ それぞれの場合について、 $G(t, x, t', x')$ の具体的な関数形を求めよ。ただし、必要であれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \quad (6)$$

という公式を用いよ。

6. 関数 $S(t, x)$ が

$$S(t, x) = \delta(t) \cos(px) \quad (7)$$

という形に与えられているとする。ただし、 p は実定数である。このとき $t < 0$ で $f(t, x) = 0$ となるような $f(t, x)$ を求めよ。また、得られた関数 $f(t, x)$ について、 t をある正の値に固定した場合の最大値と、その最大値を与える x を求めよ。

1 2015 年度 第 1 問：特性多項式と直交多項式

1.1 設問 1(i)：2 次正方行列の特性方程式

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ と置くと}$$

$$\begin{aligned} \det(xI - A) &= \det \begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} \\ &= (x-a)(x-d) - bc \\ &= x^2 - (\operatorname{Tr} A)x + \det A. \end{aligned}$$

解答：1(i) $\boxed{x^2 - (\operatorname{Tr} A)x + \det A = 0}$ 。

1.2 設問 1(ii)：Cayley–Hamilton と Chebyshev 型漸化式

特性多項式に A 自身を代入する Cayley–Hamilton の定理により

$$A^2 - (\operatorname{Tr} A)A + (\det A)I = 0.$$

$\det A = 1$, $\xi = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A$ なら $A^2 = 2\xi A - I$ となる。 $A^N = c_N A + d_N I$ と仮定すれば

$$\begin{aligned} A^{N+1} &= c_N(2\xi A - I) + d_N A \\ &= (2\xi c_N + d_N)A - c_N I. \end{aligned}$$

ここで $U_{-1} = 0$, $U_0 = 1$, $U_1 = 2\xi$ を初期条件とする

$$U_N(\xi) = 2\xi U_{N-1}(\xi) - U_{N-2}(\xi)$$

を導入すると、 $A = U_0 A - U_{-1} I$ から帰納的に

$$\boxed{A^N = U_{N-1}(\xi)A - U_{N-2}(\xi)I} \quad (N \geq 1)$$

が得られる。 $N = 2$ では $A^2 = 2\xi A - I$ と一致し、帰納の起点を確かめられる。

1.3 設問 2：自己共役性の部分積分による証明

$\mathcal{L}u = (pu')'$, $p(a) = p(b) = 0$, p 実数とする。部分積分を 1 回行えば

$$\int_a^b v^* \mathcal{L}u \, dx = [v^* pu']_a^b - \int_a^b (v')^* pu' \, dx.$$

境界項は $p(a) = p(b) = 0$ により消える。他方

$$\int_a^b u(\mathcal{L}v)^* dx = [up(v')^*]_a^b - \int_a^b u'p(v')^* dx.$$

両式の右辺が一致するので

$$\boxed{\int_a^b v^* \mathcal{L}u dx = \int_a^b u(\mathcal{L}v)^* dx}.$$

ここでは端点近傍で境界項が存在して消える程度の正則性を仮定した。

1.4 設問 3：固有値の実性・固有関数の直交性

$\mathcal{L}u = \lambda wu$, $w(x) > 0$, $u \neq 0$ とする。自己共役性から

$$\lambda \int_a^b w|u|^2 dx = \int_a^b u^* \mathcal{L}u dx = - \int_a^b p|u'|^2 dx \in \mathbb{R}.$$

重み付きノルムは正なので $\lambda \in \mathbb{R}$ である（さらに $p \geq 0$ なら $\lambda \leq 0$ ）。異なる固有値 λ_1, λ_2 に対応する u_1, u_2 について

$$\lambda_1 \int_a^b u_2^* w u_1 dx = \int_a^b u_2^* \mathcal{L}u_1 dx = \int_a^b u_1(\mathcal{L}u_2)^* dx = \lambda_2 \int_a^b u_2^* w u_1 dx.$$

従って $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なら

$$\boxed{\int_a^b u_1(x)u_2(x)^* w(x) dx = 0}.$$

1.5 設問 4：第 2 種 Chebyshev 多項式の直交性

与えられた微分方程式は

$$(1-x^2)U_N'' - 3xU_N' + N(N+2)U_N = 0.$$

$w(x) = \sqrt{1-x^2}$, $p(x) = (1-x^2)^{3/2}$ と選ぶ。実際

$$(pU_N')' = \sqrt{1-x^2} [(1-x^2)U_N'' - 3xU_N'] = -N(N+2)wU_N.$$

すなわち $\mathcal{L}U_N = \lambda_N wU_N$, $\lambda_N = -N(N+2)$ である。 U_N は多項式で端点で有限、 $p(\pm 1) = 0$ だから前問の直交性を適用できる。 $M \neq N$ なら固有値が異なるため

$$\boxed{\int_{-1}^1 U_M(x)U_N(x)\sqrt{1-x^2} dx = 0 \quad (M \neq N)}.$$

参考として、 $x = \cos \theta$ による直接計算でも $U_N(\cos \theta) = \sin((N+1)\theta)/\sin \theta$ を使えば同じ結果が得られる。

2 2015 年度 第 2 問：熱方程式と Green 関数

2.1 設問 1：熱方程式の Fourier モード

$S = 0$ とすると $\partial_t f = \lambda \partial_x^2 f$ 。問題文に合わせて

$$f(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{f}(t, k) e^{-ikx}$$

と置く。 $\partial_x^2 e^{-ikx} = -k^2 e^{-ikx}$ から

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = -\lambda k^2 \hat{f}, \quad \hat{f}(t, k) = \hat{f}(0, k) e^{-\lambda k^2 t}.$$

したがって $\tilde{f}(k) = \hat{f}(0, k)$ として、求める一般解は

$$f(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{-\lambda k^2 t - ikx}.$$

2.2 設問 2：Green 関数による非斉次方程式の解

$\mathcal{D} = \partial_t - \lambda \partial_x^2$ と書くと、問題文の Green 関数は $\mathcal{D}G = \delta(t - t')\delta(x - x')$ を満たす。

$$f(t, x) = \int dt' \int dx' G(t, x, t', x') S(t', x')$$

とおき、 $\mathcal{D}$ を積分内へ作用させれば

$$\begin{aligned} \mathcal{D}f &= \int dt' \int dx' \delta(t - t') \delta(x - x') S(t', x') \\ &= S(t, x). \end{aligned}$$

これは特解の構成である。初期条件が別途指定される場合は、必要に応じて斉次方程式の解を足す。

2.3 設問 3：複素周波数積分の係数と極

$\tau = t - t'$, $r = x - x'$ とする。問題文の Ansatz は

$$G = C \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{i\omega\tau - ikr}}{\omega - i\alpha\lambda k^2}.$$

$\mathcal{D}$ を作用させると、積分核には $i\omega + \lambda k^2$ が掛かる。分母をこれと比例させるには

$$\alpha = 1, \quad i\omega + \lambda k^2 = i(\omega - i\lambda k^2).$$

ゆえに $\mathcal{D}G = iC \int (d\omega/2\pi)(dk/2\pi) e^{i\omega\tau - ikr}$ 。この積分を $\delta(\tau)\delta(r)$ にするには $iC = 1$ が必要なので

$$\alpha = 1, \quad C = -i.$$

2.4 設問 4: ω 積分と因果性

$k \neq 0$ で極は $\omega = i\lambda k^2$ (上半平面) にある。 $\tau > 0$ では $e^{i\omega\tau}$ が上半平面で減衰するので、上へ閉じる輪郭で留数を拾う。

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega - i\lambda k^2} = e^{-\lambda k^2 \tau} \quad (\tau > 0).$$

$\tau < 0$ では下半平面で閉じ、極はないから結果は 0。分布としては、これを $\theta(\tau)e^{-\lambda k^2 \tau}$ と書く ($k = 0$ は極の処方の極限で理解する)。

2.5 設問 5: k 積分から熱核へ

従って

$$G = \theta(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp(-\lambda k^2 \tau - ikr).$$

$\tau > 0$ について平方完成して Gaussian 積分を実行すれば

$$G(t, x, t', x') = \frac{\theta(t - t')}{\sqrt{4\pi\lambda(t - t')}} \exp\left[-\frac{(x - x')^2}{4\lambda(t - t')}\right].$$

因果的な Green 関数なので $t < t'$ でゼロ。 $t \downarrow t'$ では空間的にデルタ分布へ収束する。

2.6 設問 6: 余弦波の衝撃応答・最大値

$S(t, x) = \delta(t) \cos(px)$ 、 $t < 0$ で $f = 0$ である。熱方程式に対する余弦モードは固有関数だから

$$f(t, x) = \theta(t)e^{-\lambda p^2 t} \cos(px).$$

$t > 0$ を固定すると、 $p \neq 0$ での最大値は

$$f_{\max}(t) = e^{-\lambda p^2 t}, \quad x = \frac{2\pi n}{|p|} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$p = 0$ なら $f(t, x) = 1$ であり、全ての x で最大値 1 をとる。 $t = 0$ は分布的な右極限で扱う。

数学 | 年度別問題

2014 年度

出題テーマ / 編集上の分類

常微分方程式／巡回行列

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2014年度

常微分方程式 / 巡回行列

出典：既刊数学編 2013・2014年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第1問

以下の設問に答えよ。変数 x や t は実数であり、関数 y, y_1, y_2 は実関数である。

1. 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha y$$

を満たす関数 $y(x)$ を求めよ。 $y(b) = A$ とする。 α, b, A は実定数である。

2. 連立微分方程式

$$\frac{dy_1}{dx} = -\alpha y_1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \beta y_1 - \gamma y_2$$

を満たす関数 $y_1(x), y_2(x)$ を求めよ。 $y_1(0) = A, y_2(0) = 0$ とする。 α, β, γ, A は正の実定数であり、 $\alpha \neq \gamma$ とする。 $y_1(x), y_2(x)$ の符号はどうなるか述べよ。

3. 連立微分方程式

$$\frac{dy_1}{dx} = -c y_1 + \sqrt{3} c y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \sqrt{3} c y_1 - 3 c y_2$$

を満たす関数 $y_1(x), y_2(x)$ を求めよ。ここで、 c は実定数であり、 $y_1(0) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, y_2(0) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ とする。

4. 偏微分方程式

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

の解 $y(x, t)$ を見つけたい。境界条件としては、実定数 $a > 0$ に対し、 $x \leq -a$ 及び $x \geq a$ では $y(x, t) = 0$ とする。 $-a < x < a$ で微分可能な解を一つ以上示せ。ただし、 $y = \text{定数}$ なる解は考慮しない。

5. 非斉次微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha(1 - \beta y)y$$

を満たす関数 $y(x)$ を求めよ。 α, β は正定数である。 $y(0) = A$ とする。ここで、 A は正定数である。

第2問

1. 次の $n(\geq 3)$ 次元正方行列 $A(\epsilon, t)$ について, 設問 (i) から (v) に答えよ。

$$A(\epsilon, t) \equiv \begin{pmatrix} \epsilon & t & & & & t \\ t & \epsilon & t & & & \\ & t & \epsilon & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & t & \\ & & & t & \epsilon & t \\ t & & & & t & \epsilon \end{pmatrix},$$

すなわち, $A_{i,i} = \epsilon$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = t$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), $A_{n,1} = A_{1,n} = t$, であり, これら以外の成分はすべて 0 であるものとする。また, ϵ, t は実数, 特に $t > 0$ であるとする。

- (i) 任意の n 個の実数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を成分に持つ n 次元縦ベクトルに対して,

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}$$

となるような行列 P を具体的に成分で表せ。

- (ii) $PA - AP$ を求めよ。

(iii) P の互いに線形独立な n 個の固有縦ベクトル, $u_1, u_2, \dots, u_n$, 及び, それぞれの固有値を求めよ。

(iv) P の 2 つの互いに異なる固有値に対応する固有縦ベクトルを x, y とする。このとき, $x^\dagger A y = 0$ であることを示せ。ここで, $x^\dagger \equiv {}^t x^*$ は x のエルミート共役である。

(v) $D \equiv U^\dagger A U$ が対角行列であるようなユニタリ行列 U と, そのときの D とを求めよ。

2. 次の $2n$ 次元正方行列 B について, 設問 (i), (ii) に答えよ。

$$B \equiv \begin{pmatrix} A(0, t) & \lambda I \\ \lambda I & A(0, 2t) \end{pmatrix}$$

ただし, $A(\epsilon, t)$ は前問で定義された行列, I は n 次元単位行列, λ は正の実数である。

- (i) B の $2n$ 個の固有値をすべて求めよ。

(ii) (i) で求めた固有値を $\lambda = 0$ の場合と比較せよ。とくに, λ が小さく $0 < \lambda \ll t$ である場合, λ がゼロでないことによって生じる固有値の微小な変化が λ の何乗に比例するかを答えよ。

解答・解説：2014 年度第 1 問

1. 1 階線形微分方程式

$y' = -\alpha y$, $y(b) = A$. 変数分離または積分因子で

$$y(x) = Ae^{-\alpha(x-b)}.$$

2. 三角型連立方程式

$y'_1 = -\alpha y_1$ から $y_1 = Ae^{-\alpha x}$. さらに

$$y'_2 + \gamma y_2 = \beta Ae^{-\alpha x}, \quad y_2(0) = 0$$

を積分因子 $e^{\gamma x}$ で解けば

$$y_1(x) = Ae^{-\alpha x}, \quad y_2(x) = \frac{\beta A}{\gamma - \alpha} (e^{-\alpha x} - e^{-\gamma x}) \quad (\alpha \neq \gamma).$$

$\alpha, \beta, \gamma, A > 0$ の下では、 $y_1(x) > 0$ は全 x で成立し、 y_2 は $x > 0$ で正、 $x = 0$ で零、 $x < 0$ で負となる。実際、 $y_2 = \beta A \int_0^x e^{-\gamma(x-s)} e^{-\alpha s} ds$ の表示から符号は積分区間の向きで決まる。

3. 対称行列のスペクトル分解

系の係数行列は

$$M = c \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{固有値 } 0, -4c.$$

対応する規格化固有ベクトルは

$$v_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

初期値は $y(0) = v_0 + v_-$ と一致する。従って

$$y_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{e^{-4cx}}{2}, \quad y_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-4cx}.$$

代入すると $y' = My$, $y(0)$ は原題の初期値と一致する。

4. 有限区間の熱方程式

$y_t = y_{xx}$, $y(\pm a, t) = 0$ の非定数解の一例は

$$y(x, t) = e^{-\pi^2 t / (4a^2)} \cos \frac{\pi x}{2a} \quad (-a < x < a).$$

外側では $y = 0$ と定義する。内部では $y_t = y_{xx}$ が成立し、 $x = \pm a$ で値は零である。原題は境界における微分可能性を要求していないので、内部での古典解として十分である。非定数な境界値を持つ拡張解を想定する場合は追加条件が必要。

5. 非斉次ではない非線形方程式

$y' = -\alpha(1 - \beta y)y$, $y(0) = A > 0$. $v = 1/y$ とおくと

$$v' = \alpha v - \alpha\beta, \quad v(x) = \beta + (A^{-1} - \beta)e^{\alpha x}.$$

よって

$$y(x) = \frac{A}{\beta A + (1 - \beta A)e^{\alpha x}} \quad (\text{分母が零でない区間}).$$

$\beta A < 1$ なら $x \geq 0$ で正のまま 0 へ減衰する。 $\beta A = 1$ なら定数解 $1/\beta$ 。 $\beta A > 1$ なら有限の正の $x_* = \alpha^{-1} \log\{\beta A/(\beta A - 1)\}$ で分母が零になり発散する。したがって全実数上の有限解と断定してはいけない。

解答・解説：2014 年度第 2 問

1. 環状の実対称行列 $A(\varepsilon, t)$

P を $(Px)_j = x_{j+1}$ (最後は $x_{n+1} = x_1$) で定める巡回置換行列とする。成分は

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$P^\top = P^{-1}$ だから

$$A(\varepsilon, t) = \varepsilon I + t(P + P^{-1}).$$

従って $PA = AP$ である。

(iii) フーリエ固有ベクトル。 $\omega = e^{2\pi i/n}$ 、 $k = 0, 1, \dots, n-1$ とし

$$\mathbf{u}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{(n-1)k})^\top.$$

$P\mathbf{u}^{(k)} = \omega^k \mathbf{u}^{(k)}$ であり、 ω^k は相異なる。従って線形独立な n 本の固有ベクトルを得る。

(iv) 異なる固有値の直交性。 P はユニタリなので $\langle Px, Py \rangle = \langle x, y \rangle$ 。 $Px = \omega^k x$, $Py = \omega^l y$ を代入すると $(1 - \overline{\omega^k} \omega^l) \langle x, y \rangle = 0$ 。 $k \neq l$ なら $\langle x, y \rangle = 0$ 。あるいは等比級数 $\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{(l-k)j} = 0$ を用いてもよい。

(v) ユニタリ対角化。 $U = (\mathbf{u}^{(0)} \ \mathbf{u}^{(1)} \ \cdots \ \mathbf{u}^{(n-1)})$ とすると $U^\dagger U = I$ で

$$U^\dagger A(\varepsilon, t) U = \text{diag}(a_0, \dots, a_{n-1}), \quad a_k = \varepsilon + 2t \cos \frac{2\pi k}{n}.$$

固有値の重複 (k と $n-k$) があっても、上記の U は直交基底を与える。 A は実対称なので、実ベクトルを用いた直交対角化も可能である。

2. $2n$ 次元ブロック行列の固有値

$B = \begin{pmatrix} A(0, t) & \lambda I \\ \lambda I & A(0, 2t) \end{pmatrix}$ 。 $U \oplus U$ による変換とブロックの並べ替えにより、 B は n 個の独立な 2×2 行列

$$B_k = \begin{pmatrix} 2tc_k & \lambda \\ \lambda & 4tc_k \end{pmatrix}, \quad c_k = \cos \frac{2\pi k}{n}$$

の直和にユニタリ同値となる。特性方程式は

$$(E - 2tc_k)(E - 4tc_k) - \lambda^2 = 0.$$

従って

$$E_{k,\pm} = 3tc_k \pm \sqrt{t^2 c_k^2 + \lambda^2}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

各 k につき 2 個あり、重複度込みで合計 $2n$ 個になる。

$\lambda = 0$ では $\{E_{k,+}, E_{k,-}\} = \{2tc_k, 4tc_k\}$ (c_k の符号で $\pm$ の対応は入れ替わる)。 $|\lambda| \ll t$ で $c_k \neq 0$ なら

$$E_{k,\pm} = 3tc_k \pm \left(t|c_k| + \frac{\lambda^2}{2t|c_k|} + O(\lambda^4) \right),$$

$$\delta E = O(\lambda^2).$$

$\lambda = 0$ における非縮退 2 準位の変位は 2 次である。一方、 $c_k = 0$ なら

$$E_{k,\pm} = \pm \lambda \quad (\lambda > 0)$$

となり **1 次**で分裂する。 $c_k = 0$ が起こるのは $4 \mid n$ の場合 ($k = n/4, 3n/4$) に限られる。これが λ に対する線形の微小変化と 2 次の変化の境界である。

数学 | 年度別問題

2013 年度

出題テーマ / 編集上の分類

Vandermonde／偏微分方程式

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2013年度

Vandermonde 行列式 / 偏微分方程式

出典：既刊数学編 2013・2014年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第1問

1. z_1, z_2, z_3, z_4 を複素数とし, $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ とする。それを用いた行列式により $\Delta(\vec{z})$ を以下のように定義する。

$$\Delta(\vec{z}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ (z_1)^2 & (z_2)^2 & (z_3)^2 & (z_4)^2 \\ (z_1)^3 & (z_2)^3 & (z_3)^3 & (z_4)^3 \end{vmatrix}$$

$\Delta(\vec{z})$ が次の形に因数分解できることを以下の小問に従って示せ。

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{z}) &= \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j) \\ &= (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)(z_3 - z_4) \end{aligned} \quad (1)$$

- (i) 式 (1) の両辺が $\vec{z}$ についての 6 次の同次 (斉次) 多項式であることを示せ。ここで, 多変数関数に対し, $z_1^{a_1} z_2^{a_2} \dots$ という項の次数は $a_1 + a_2 + \dots$ であると定義する。また, 同次とは, 全ての項の次数が等しいことをいう。
- (ii) $\Delta(\vec{z})$ は, 互いに異なる i と j に対して z_i が z_j に一致するときゼロとなることを示せ。
- (iii) これから, 式 (1) の両辺が比例定数を除いて等しいことが示せる。これを用いて, 係数を比較することにより比例定数が 1 であることを示せ。

2.

- (i) 複素変数 z の関数で, 考えている領域で正則である $g(z)$ の表式

$$\frac{1}{g(z)} \frac{dg(z)}{dz}, \quad \frac{1}{g(z)} \frac{d^2g(z)}{dz^2}$$

を $\lambda(z) = \log(g(z))$ を用いてそれぞれ書き換えよ。

- (ii) 設問 1 で定義された $\Delta(\vec{z})$ について, 微分

$$f(\vec{z}) = \frac{1}{\Delta(\vec{z})} \frac{\partial^2 \Delta(\vec{z})}{\partial z_1^2}$$

を求めよ。また, $f(\vec{z})$ を z_1 の関数と見なしたとき, 複素平面内で 2 次の極が無いことを示せ。ただし, ここおよび以下では z_2, z_3, z_4 は互いに異なるものとする。

- (iii) 複素積分

$$\oint_C \frac{dz_1}{2\pi i} z_1 f(\vec{z})$$

を求めよ。ここで積分経路 C は内部に z_2, z_3, z_4 を含む円を反時計回りに一周する経路であり, i は虚数単位である。

第2問

$\mathcal{L}$ を微分演算子, $\psi(x_1, x_2)$ を2個の実変数 x_1, x_2 の関数として, 微分方程式 $\mathcal{L}\psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2)$ を考える。ここで, E は定数である。 $\mathcal{L}$ の形を

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

とする。ここで $a_{i,j}, b_i$ ($i, j = 1, 2$) は実定数で, $a_{i,j}$ ($i, j = 1, 2$) のうち少なくとも一つはゼロでないとし, $a_{j,i} = a_{i,j}$ とする。また, $\{a_{i,j}\}$ を2行2列の行列とみなしたときの行列式を D とする。この微分方程式の解の性質について, 以下の設問に答えよ。

1. 或る実行列 $C = \{c_{i,j}\}$ ($i, j = 1, 2$) を用いて, 変数を

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

のように線形変換したときに, 微分演算子 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ を $\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2}$ で表せ。ただし, C の行列式はゼロでないとする。

2. $\mathcal{L}$ の中の2階微分の項に関して, 適当な C を選ぶと, $D > 0$ の場合は

$$\pm \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right)$$

となり, $D = 0$ の場合は

$$\pm \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}$$

となり, $D < 0$ の場合は

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}$$

となることを示せ。

3. 次に, $\psi(\xi_1, \xi_2) = e^{\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2} \phi(\xi_1, \xi_2)$ のように書き換える。ここで, λ_i ($i = 1, 2$) は定数である。これにより $\mathcal{L}$ の1階微分の項を変換でき, ϕ に対する微分方程式は, λ_i ($i = 1, 2$) を適当に選べば, $D > 0$ の場合には

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) \phi(\xi_1, \xi_2) = F \phi(\xi_1, \xi_2) \quad (2)$$

$D = 0$ の場合には

$$\left(\beta \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) \phi(\xi_1, \xi_2) = F \phi(\xi_1, \xi_2) \quad (3)$$

$D < 0$ の場合には

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) \phi(\xi_1, \xi_2) = F \phi(\xi_1, \xi_2) \quad (4)$$

の形になることを示せ。ここで、 F, β はそれぞれ定数であるが、具体的に与えなくてよい。

4. 式 (3) において $F = 0, \beta = 1$ とする。

(i) $\xi_1 > 0$ に対して

$$\phi(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2 \xi_1} e^{iy \xi_2} dy$$

は、式 (3) を満たすことを示せ。ここで i は虚数単位、また、 $f(y)$ は実変数 y の関数であり、この積分の収束条件を満たすとする。

(ii) $\xi_1 = 0$ で $\phi(\xi_1, \xi_2) = \delta(\xi_2)$ の場合に、 $\xi_1 > 0$ に対して、この方程式の解を求めよ。
ここで $\delta(x)$ はデルタ関数である。また、 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ であることは既知としてよい。

5. 式 (4) において $F = 0$ の場合を考える。

$$\phi(\xi_1, \xi_2) = G_1(\xi_1 - \xi_2) + G_2(\xi_1 + \xi_2)$$

は、式 (4) を満たすことを示せ。ここで G_i ($i = 1, 2$) は微分可能な任意の関数である。

解答・解説：2013 年度第 1 問

1. Vandermonde 行列式の因数分解

(i) 同次次数。行列式の各項は、4 行からそれぞれ指数 $0, 1, 2, 3$ を一度ずつ選んで掛けたものであり、全次数は $0 + 1 + 2 + 3 = 6$ 。右辺の $\prod_{i < j} (z_i - z_j)$ も 1 次式 6 個の積だから 6 次同次多項式となる。

(ii) $z_i = z_j$ での零化。2 つの z_i, z_j が等しければ、行列の第 i, j 列が一致する。よって $\Delta(z) = 0$ 。因数定理より $z_i - z_j$ は Δ を割る。すべての相異なる i, j について成り立つから

$$\Delta(z) = C \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j)$$

と書ける。右辺・左辺とも次数 6 なので C は定数である。

(iii) 係数比較。 $z_1^3 z_2^2 z_3$ の係数を比べる。行列式では、指数 $(3, 2, 1, 0)$ を列 $(1, 2, 3, 4)$ に割り当てる置換は反転数 6 の偶置換だから係数は $+1$ 。積の表示でも、各 $(z_i - z_j)$ から $i < j$ のとき z_i を選べば同じ項が係数 $+1$ で現れる。従って $C = 1$ 。

$$\Delta(z) = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j).$$

2. 対数微分と複素積分

(i) 正則な非零関数 g の局所的な対数 $\lambda = \log g$ をとると

$$\frac{g'}{g} = \lambda', \quad \frac{g''}{g} = \lambda'' + (\lambda')^2.$$

対数の枝を変更しても導関数は変わらない。

(ii) z_2, z_3, z_4 は互いに異なり、 z_1 について

$$\Delta = C_0 \prod_{j=2}^4 (z_1 - z_j), \quad C_0 = \prod_{2 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j) \neq 0.$$

対数微分を用い $S_1 = \sum_{j=2}^4 (z_1 - z_j)^{-1}$ と書けば

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = S_1, \quad \frac{\Delta''}{\Delta} = S_1^2 - \sum_{j=2}^4 \frac{1}{(z_1 - z_j)^2}.$$

よって対角項が消去されて

$$f(z) = 2 \sum_{2 \leq j < k \leq 4} \frac{1}{(z_1 - z_j)(z_1 - z_k)}.$$

$z_1 = z_j$ における主部は

$$f(z) = \frac{2}{z_1 - z_j} \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^4 \frac{1}{z_j - z_k} + O(1).$$

したがって、二重極以上は存在しない（係数の偶然の消滅によって可除特異点となることはある）。

(iii) 留数定理により

$$I = \oint_C \frac{dz_1}{2\pi i} z_1 f(z) = 2 \sum_{j=2}^4 z_j \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^4 \frac{1}{z_j - z_k}.$$

非順序対 $\{j, k\}$ ごとにまとめると

$$I = 2 \sum_{2 \leq j < k \leq 4} \left(\frac{z_j}{z_j - z_k} + \frac{z_k}{z_k - z_j} \right) = 2 \binom{3}{2}.$$

$I = 6.$

別解による検算： $z_1 \rightarrow \infty$ で $\Delta \sim C_0 z_1^3$ 、 $\Delta'' \sim 6C_0 z_1$ 。よって $z_1 f \sim 6/z_1$ となり、有限特異点の留数和も 6 である。

解答・解説：2013 年度第 2 問

1. 一次微分の座標変換

$\xi = Cx$ とする。連鎖律より

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{a=1}^2 C_{ai} \frac{\partial}{\partial \xi_a} \quad (i = 1, 2).$$

ベクトル表示なら $\nabla_x = C^T \nabla_\xi$ である。

2. 2 階微分の標準形への分類

$A = (a_{ij}) = A^T$ 、 $D = \det A$ とおく。変数変換後の 2 階部分は

$$\sum_{a,b=1}^2 (CAC^T)_{ab} \partial_{\xi_a} \partial_{\xi_b}.$$

実対称行列の直交対角化と座標の拡大縮小によって、Sylvester の慣性法則から次を得る。

(a) $D > 0$: 2 つの固有値は同符号。 $\pm(\partial_{\xi_1}^2 + \partial_{\xi_2}^2)$ 。

(b) $D = 0$: $A \neq 0$ より階数 1。 $\pm\partial_{\xi_2}^2$ (零固有値に対応する方向を ξ_1 とした)。

(c) $D < 0$: 固有値の符号が異なる。 $\partial_{\xi_1}^2 - \partial_{\xi_2}^2$ 。

ここで元問題の A は零行列でないという仮定を使用した。

3. 一階微分の除去と固有値 E の移動

2 階部分の標準形を $M_{ab} \partial_a \partial_b$ 、1 階部分を $\mathbf{d} \cdot \nabla_\xi$ と書く。 $\psi = e^{\lambda \cdot \xi} \phi$ とおくと

$$e^{-\lambda \cdot \xi} \mathcal{L} e^{\lambda \cdot \xi} \phi = M_{ab} \partial_a \partial_b \phi + (2M\lambda + \mathbf{d}) \cdot \nabla \phi + (\lambda^T M \lambda + \mathbf{d} \cdot \lambda) \phi.$$

$D > 0$ と $D < 0$: M は可逆なので $\lambda = -\frac{1}{2} M^{-1} \mathbf{d}$ ととり、1 階部分を全て消去できる。従って

$$\boxed{M_{ab} \partial_a \partial_b \phi = F \phi}, \quad F = E + \frac{1}{4} \mathbf{d}^T M^{-1} \mathbf{d}.$$

$D > 0$ は $M = \pm I_2$ であり、負定値の場合は方程式全体に -1 を掛けて符号を揃えれば式 (2) の正の Laplace 型となる (同時に F も符号反転する)。 $D < 0$ は $M = \text{diag}(1, -1)$ とでき、式 (4) に一致する。

$D = 0$: 必要なら方程式全体に -1 を掛け、2 階部分を $-\partial_{\xi_2}^2$ とする。このとき 1 階部分を $\beta \partial_{\xi_1} + \delta \partial_{\xi_2}$ と書く。 $\lambda_2 = \delta/2, \lambda_1 = 0$ とおくと

$$\boxed{(\beta \partial_{\xi_1} - \partial_{\xi_2}^2) \phi = F \phi}, \quad F = E' - \delta^2/4.$$

E' は元方程式を符号調整した後の固有値である。 β が 0 となる退化例も許される。

4. 熱方程式の Fourier 積分表示

式 (3) で $F = 0, \beta = 1$ とすれば $\partial_{\xi_1} \phi = \partial_{\xi_2}^2 \phi$ 。

(i) $\xi_1 > 0$ で絶対収束・微分交換が許される f に対して

$$\phi(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2 \xi_1 + i y \xi_2} dy.$$

ξ_1 微分は被積分関数に $-y^2$ を掛け、 ξ_2 に関する 2 階微分も同じ $-y^2$ を掛ける。従って確かに熱方程式を満たす。

(ii) 初期条件が $\delta(\xi_2)$ なら、Fourier 逆変換の規格化から $f(y) = 1/(2\pi)$ 。平方完成を用いた Gaussian 積分により

$$\phi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\xi_1}} \exp\left(-\frac{\xi_2^2}{4\xi_1}\right) \quad (\xi_1 > 0).$$

この解は $\xi_1 \downarrow 0$ で分布の意味で $\delta(\xi_2)$ に収束する。

5. 波動方程式の一般解

式 (4) で $F = 0$ は $\partial_{\xi_1}^2 \phi - \partial_{\xi_2}^2 \phi = 0$ 。 $u = \xi_1 - \xi_2, v = \xi_1 + \xi_2$ とすると $\partial_{\xi_1}^2 - \partial_{\xi_2}^2 = 4\partial_u \partial_v$ 。従って $\partial_u \partial_v \phi = 0$ から

$$\phi(\xi_1, \xi_2) = G_1(\xi_1 - \xi_2) + G_2(\xi_1 + \xi_2).$$

G_1, G_2 は 2 階微分が存在する任意の関数である。原題で求められたのは上式が解であることの確認だが、実際には局所一般解にもなっている。

数学 | 年度別問題

2012 年度

出題テーマ / 編集上の分類

Pauli行列／連立PDE

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2012年度

Pauli 行列 / 連立偏微分方程式

出典：既刊数学編 2011・2012年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

原題：2012 年度（平成 24 年度）

下の 2 ページは原本「H24math.pdf」の第 2-3 ページです（第 1 問、第 2 問）。

第1問

1. 以下の設問に答えよ。ただし単位行列 I およびパウリ行列 σ_j ($j = 1, 2, 3$) を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で定義する。 i は虚数単位である。

- (i) パウリ行列の積 $\sigma_j \sigma_k$ ($j, k = 1, 2, 3$) を求めよ。
- (ii) 実3元ベクトル v に対して行列 $S(v)$ を $S(v) = v \cdot \sigma = v_1 \sigma_1 + v_2 \sigma_2 + v_3 \sigma_3$ で定義する。 S の積 $S(a)S(b)$ を単位行列 I とパウリ行列 σ_j の線形結合で表せ。
- (iii) 実3元単位ベクトル n および実数 θ に対して、行列 $X(n, \theta)$ を

$$X(n, \theta) = e^{-i\theta S(n)}$$

で定義する。ただし行列 A に対して

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

である。 $X(n, \theta)$ を単位行列 I とパウリ行列 σ_j の線形結合で表せ。

- (iv) $X(n, \theta)S(v)X(n, -\theta)$ が $S(v')$ の形に表せることを示し、 v' を $n, v, n \times v$ の線形結合で表せ。ただし $\times$ はベクトル積 (外積) を表す。
- (v) n と v が直交しているとき、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ において設問 (iv) の v' がどのように変化するか説明せよ。

2. 2行2列の複素行列すべての集合を G とする。また、 H を2行2列のエルミート行列の集合 ($X \in G$ かつ $X^\dagger = X$ を満たす X の集合) とし、 U を2行2列のユニタリ行列の集合 ($X \in G$ かつ $X^\dagger X = XX^\dagger = I$ を満たす X の集合) とする。ただし $X^\dagger$ は X のエルミート共役 (転置の複素共役) を表す。以下の各命題について真偽を答え、「真」の場合は命題を証明し、「偽」の場合には具体的な反例を1つ示せ。

- (a) $A \in U$ かつ $B \in U$ ならば、 $AB \in U$ である。
- (b) $A \in H$ かつ $B \in H$ ならば、 $AB \in H$ である。
- (c) $A \in H$ ならば $A \in U$ である。
- (d) $A \in H$ かつ $A \in U$ ならば、 $A = I$ である。
- (e) $X \in G$ かつ $X^2 = O$ ならば、 $X = O$ である (ただし O は全ての成分が0の行列)。
- (f) $X \in G$ かつ $X^3 = O$ ならば、 $X^2 = O$ である。

第2問

1. 以下の連立偏微分方程式を考える。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + 4 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで $u_1(x, t), u_2(x, t)$ は $-\infty < t < +\infty$ および $-\infty < x < +\infty$ で定義された2変数関数である。以下の設問に答えよ。

- (i) 式 (1) を以下のようにベクトル表記する。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}$$

このとき、係数行列 A の固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ を求めよ。

- (ii) 設問 (i) で求めた $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ を並べた2次元正方行列 $P = (\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2)$ を用いて変換

$$\begin{pmatrix} s_1(x, t) \\ s_2(x, t) \end{pmatrix} = P^{-1} \mathbf{u}$$

を行い、式 (1) を $s_1(x, t), s_2(x, t)$ に対する偏微分方程式に書き換えよ。

- (iii) 設問 (ii) で得られた式は $s_1(x, t), s_2(x, t)$ に対してそれぞれ独立な線形方程式であり、初期条件を与えれば解くことができる。さらに、その解から $u_1(x, t), u_2(x, t)$ を求めることができる。このことを用いて、初期条件

$$u_1(x, t=0) = e^{-x^2}, \quad u_2(x, t=0) = 0$$

のもとに、連立偏微分方程式 (1) の解 $u_1(x, t), u_2(x, t)$ を求めよ。また $t=1$ での解の概形を図示せよ。

2. 2つの関数 $f_1(x, t), f_2(x, t)$ に対する連立偏微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

を初期条件

$$f_1(x, t=0) = e^{-x^2}, \quad f_2(x, t=0) = 0$$

のもとに解け。関数の定義域は $0 \leq t < +\infty$ および $-\infty < x < +\infty$ とする。

2012 年度 第 1 問 Pauli 行列とユニタリ行列

1.(i) Pauli 行列の積

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} I + i \sum_{\ell=1}^3 \varepsilon_{j k \ell} \sigma_\ell.$$

$j = k$ なら I 、異なる添字には $\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3$ とその巡回置換、逆順では負号が付く。

1.(ii) $S(a)S(b)$ の公式

$S(a) = \sum_j a_j \sigma_j$ と定義したので、(i) を代入し

$$S(a)S(b) = (a \cdot b)I + iS(a \times b).$$

特に単位ベクトル n に対して $S(n)^2 = I$ 。

1.(iii) $X(n, \theta)$ の展開

指数関数の偶数次・奇数次の項に分けると

$$X(n, \theta) = e^{-i\theta S(n)} = I \cos \theta - iS(n) \sin \theta.$$

逆行列は $X(n, -\theta) = I \cos \theta + iS(n) \sin \theta$ 。

1.(iv) 共役作用と空間回転

$c = \cos \theta, s = \sin \theta, N = S(n), V = S(v)$ と書く。

$$XVX^{-1} = c^2V + ics[V, N] + s^2NVN.$$

(ii) より $[V, N] = -2iS(n \times v)$ 、また $NVN = 2(n \cdot v)N - V$ 。したがって

$$\begin{aligned} X(n, \theta)S(v)X(n, -\theta) &= S(v'), \\ v' &= v \cos(2\theta) + (n \times v) \sin(2\theta) + n(n \cdot v)(1 - \cos(2\theta)). \end{aligned}$$

これは n 軸の周りに角度 2θ 回転させる Rodrigues の公式である。

1.(v) $n \perp v$ の場合

$n \cdot v = 0$ なので $v' = v \cos(2\theta) + (n \times v) \sin(2\theta)$ 。 θ を 0 から 2π まで増加させると、 v' は n に垂直な平面内で 2 回転し、 $\theta = \pi$ でも元の位置に戻る。 $X(n, \pi) = -I$ は共役作用では何も変えないことに注意する。

2.(a)–(f) 真偽判定

設問	判定	証明または反例
(a)	真	$(AB)^\dagger(AB) = B^\dagger A^\dagger AB = B^\dagger B = I$ 。
(b)	偽	$A = \sigma_1, B = \sigma_2$ は Hermite だが $AB = i\sigma_3$ は Hermite でない。
(c)	偽	$A = 2I$ は Hermite だが unitary ではない。
(d)	偽	$A = \text{diag}(1, -1)$ は Hermite かつ unitary だが I ではない。
(e)	偽	$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ なのに $X^2 = 0$ 。
(f)	真	$X^3 = 0$ なら全固有値が 0。 2×2 行列の Cayley–Hamilton より $X^2 - (\text{tr } X)X + (\det X)I = X^2 = 0$ 。

2012 年度 第 2 問 連立偏微分方程式

1.(i) 係数行列の固有値・固有ベクトル

与えられた系は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4$ なので固有値は $\lambda_+ = 2, \lambda_- = -2$ 。固有ベクトルには $q_+ = (2, 1)^\top, q_- = (2, -1)^\top$ を取れる。

1.(ii) 特性変数への対角化

$$P = (q_+ \ q_-) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

$s = P^{-1}u$ によって

$$\boxed{\frac{\partial s_+}{\partial t} + 2 \frac{\partial s_+}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial s_-}{\partial t} - 2 \frac{\partial s_-}{\partial x} = 0.}$$

1.(iii) Gaussian 初期条件の解と $t = 1$ の概形

$u_1(x, 0) = e^{-x^2}, u_2(x, 0) = 0$ から $s_+(x, 0) = s_-(x, 0) = \frac{1}{4}e^{-x^2}$ 。それぞれ速度 $+2, -2$ で移流するので

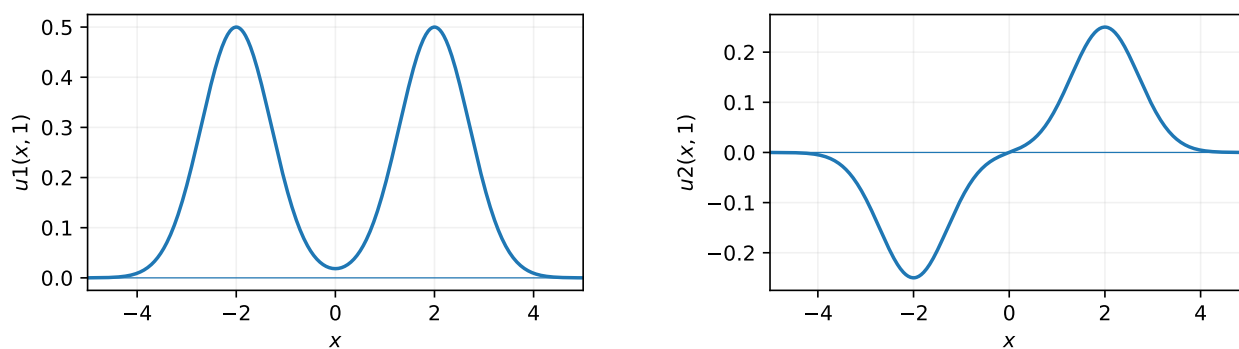
$$s_+(x, t) = \frac{1}{4}e^{-(x-2t)^2}, \quad s_-(x, t) = \frac{1}{4}e^{-(x+2t)^2}.$$

元の変数に戻して

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} \left[e^{-(x-2t)^2} + e^{-(x+2t)^2} \right],$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{4} \left[e^{-(x-2t)^2} - e^{-(x+2t)^2} \right].$$

$t = 1$ で u_1 は $x = \pm 2$ 付近に左右対称な二峰を持つ。 u_2 は奇関数で $x \simeq 2$ に正の峰、 $x \simeq -2$ に負の谷があり、 $x = 0$ で 0。

図： $t = 1$ における $u_1(x, 1)$ (左) と $u_2(x, 1)$ (右)。

2. 連立拡散方程式の解

原題の系は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + M \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

$K = -M = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ とすれば $f_t = K f_{xx}$ 。 K の固有値は $1, 2$ で、対応する固有ベクトルは $r_1 = (3, 1)^\top, r_2 = (2, 1)^\top$ 。初期条件 $f(x, 0) = (e^{-x^2}, 0)^\top$ を

$$f(x, 0) = e^{-x^2} (r_1 - r_2)$$

と展開する。各成分は拡散係数 $D = 1, 2$ の熱方程式に従う。Gaussian 初期条件に対する拡散解

$$h_D(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Dt}} \exp \left[-\frac{x^2}{1 + 4Dt} \right]$$

を使えば

$$f_1(x, t) = 3h_1(x, t) - 2h_2(x, t), \quad f_2(x, t) = h_1(x, t) - h_2(x, t).$$

実際、 $\partial_t h_D = D \partial_x^2 h_D$ かつ $h_D(x, 0) = e^{-x^2}$ 。よって指定の連立方程式と両初期条件を満たす。

数学 | 年度別問題

2011 年度

出題テーマ / 編集上の分類

反交換行列／Green関数

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2011年度

反交換行列 / Green 関数と Poisson 方程式

出典：既刊数学編 2011・2012年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

原題：2011 年度（平成 23 年度）

下の 3 ページは原本「H23math.pdf」の第 3-5 ページです（第 1 問、第 2 問）。

第1問

A, B は n 行 n 列の複素行列であり, $A^2 = B^2 = E$, $AB + BA = O$ を満たすものとする。ただし, E は単位行列, O は全ての成分が0に等しい零行列である。また, 行列 C, D をそれぞれ $C = -iAB$, $D = A + iB$ によって定義する。 i は虚数単位である。このとき, 以下の設問に答えよ。

- (1) 行列 A の固有値の取り得る値を全て求めよ。
- (2) $C^2 = E$ となること, また $BC + CB = CA + AC = O$ となることを示せ。
- (3) $D^2 = O$ かつ $D \neq O$ となることを示せ。
- (4) 設問 (3) の結果により, $D\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ (ただし $\mathbf{0}$ は零ベクトル) となる縦ベクトル $\mathbf{r}$ が存在する。ここで $\mathbf{p} = D\mathbf{r}$ によりベクトル $\mathbf{p}$ を定義すると, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ かつ $D\mathbf{p} = D^2\mathbf{r} = \mathbf{0}$ をみたす。また $\mathbf{p}$ を用いて, ベクトル $\mathbf{q}$ を, $\mathbf{q} = \frac{1}{2}(A - iB)\mathbf{p}$ によって定義する。
 - (i) ベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ は, ともに行列 C の固有ベクトルになっていることを示し, それぞれの固有値を求めよ。
 - (ii) ベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ は互いに線型独立であることを証明せよ。
- (5) 以下では $n = 2$ とし, 設問 (4) で定義した $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ が2次元縦ベクトルとなる場合を考える。
 - (i) $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ を並べて作った2次元正方行列 $P = (\mathbf{p} \ \mathbf{q})$ は正則であることを, 設問 (4) の結果を用いることによって示せ。
 - (ii) 行列 $P^{-1}CP$ を計算せよ。
 - (iii) 行列 $P^{-1}(A \pm iB)P$ を計算することによって, $P^{-1}AP$ および $P^{-1}BP$ を求めよ。
- (6) $n = 2$ のとき, 行列 A, B, C の具体形を一組与えよ。

第2問

以下ではポアソン方程式, またはラプラス方程式の解を様々な次元 (d), 境界条件の下で求める。

(1) まず1次元 ($d = 1$) の場合を考える。

(i) 領域 $x \in [0, 1]$ で定義された連続関数 $u(x)$ に対する微分方程式

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\delta(x - y), \quad 0 < y < 1$$

を境界条件 $u(0) = u(1) = 0$ の下で解け。ここで $\delta(x)$ はデルタ関数である。

(ii) 上で得られた解 $u(x)$ を $G(x, y)$ と書く。このとき領域 $x \in [0, 1]$ で定義される, より一般的な微分方程式

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \rho(x)$$

の解 $v(x)$ を $G(x, y)$ を用いて書き下せ。ただし境界条件は $v(0) = v(1) = 0$ とし, 右辺の $\rho(x)$ は $\rho(0) = \rho(1) = 0$ を満たす任意関数とする。

(2) 次に2次元 ($d = 2$) の場合を考える。2次元平面の直交座標を (x, y) , 複素座標を $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, 極座標を r, θ ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$) とする。

(i) 単位円の内部 ($r < 1$) で定義された関数 $u_n(x, y) = z^n + \bar{z}^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) はラプラス方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = 0$$

の解であることを示せ。またこの関数は境界 ($r = 1$) でどのような値をとるのか, θ の関数として表せ。

(ii) 単位円の内部 $r < 1$ でラプラス方程式を満たし, 境界条件

$$u(x, y) \Big|_{r=1} = |\theta|, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

を満たす関数 u を, 境界値に対するフーリエ級数展開を用いて求めよ。

(3) d 次元 ($d \geq 3$) ポアソン方程式

$$\nabla \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = - \prod_{a=1}^d \delta(x_a), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d), \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right)$$

を, 定義域 $\mathbf{R}^d$, 境界条件 $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 0$ の下で考える。発散定理

$$\int_V d^d x \nabla \cdot \mathbf{F} = \int_{\partial V} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}$$

を用いて解 $u(\mathbf{x})$ を求めよ。ここで V は $\mathbf{R}^d$ 内のなめらかな境界 ∂V を持つ有界な領域, $\mathbf{F}$ はベクトル値関数, $\mathbf{n}$ は ∂V 上の単位法線ベクトル, dS は ∂V の超面積要素である。(必要であれば d 次元空間内の半径 1 の超球面 $\sum_{i=1}^d (x_i)^2 = 1$ の超面積が $\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ であることを用いても良い。ここで $\Gamma(z)$ はガンマ関数である。)

2011 年度 第 1 問 反交換行列と固有空間

問題の設定 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ は $A^2 = B^2 = I$, $AB + BA = 0$ を満たす。 $C = -iAB$, $D = A + iB$ と定義する。

(1) A の固有値

$A^2 = I$ より固有値 λ は $\lambda^2 = 1$ を満たし、 $\lambda = \pm 1$ である。最小多項式は相異なる一次因子に分解するので A は対角化可能である。また $BAB = -A$ ($B^{-1} = B$) であるため、 $+1$ と -1 の固有空間は B によって同型に写される。したがって n は偶数で、**両符号の固有値がそれぞれ $n/2$ 個現れる。**

(2) C^2 および反交換関係

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= ABAB = -A^2B^2 = -I, \\ C^2 &= (-i)^2(AB)^2 = I.\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}BC + CB &= -i(BAB + AB^2) = -i(-A + A) = 0, \\ CA + AC &= -i(ABA + A^2B) = -i(-B + B) = 0.\end{aligned}$$

(3) $D^2 = 0$ と $D \neq 0$

$$D^2 = A^2 + i(AB + BA) + i^2B^2 = I - I = 0.$$

もし $D = 0$ なら $A = -iB$ であり $A^2 = -B^2 = -I$ となって矛盾する。よって $D \neq 0$ 。

(4)(i) p, q は C の固有ベクトル

$D \neq 0$ なので $p = Dr \neq 0$ とでき、 $Dp = D^2r = 0$ 。したがって

$$(A + iB)p = 0 \implies Bp = iAp.$$

これから

$$Cp = -iABp = -iA(iAp) = p.$$

$q = (A - iB)p/2$ と置いたので $q = Ap \neq 0$ である。 $CA = -AC$ を用いると

$$Cq = CAp = -ACp = -Ap = -q.$$

$Cp = p, Cq = -q$ 。固有値は p に対して $+1$ 、 q に対して -1 。

(4)(ii) p, q の線形独立性

$\alpha p + \beta q = 0$ と仮定する。 C を作用させて $\alpha p - \beta q = 0$ 。加減算すれば $2\alpha p = 2\beta q = 0$ 。両者非零だから $\alpha = \beta = 0$ 。

(5) $n = 2$ の場合の表示

$P = (p \ q)$ は正則で、上で得た作用から

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Ap = q, \quad Aq = p, \quad Bp = iq, \quad Bq = -ip.$$

従って

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1, \\ P^{-1}BP &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2, \\ P^{-1}(A + iB)P &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ P^{-1}(A - iB)P &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(6) 具体例

$$A = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$AB = i\sigma_3$ を直接確認すれば、 $C = -iAB = \sigma_3$ となる。

2011 年度 第 2 問 Green 関数と Poisson 方程式

(1)(i) 一次元の Dirichlet Green 関数

原題は $u''(x) = -\delta(x-y)$ 、 $0 < y < 1$ 、 $u(0) = u(1) = 0$ 。 $x \neq y$ では $u'' = 0$ なので u は各区間で一次関数となる。 $u(0) = 0$ 、 $u(1) = 0$ と $x = y$ での連続性を課す。さらに微分方程式を y の前後で積分すると

$$u'(y+0) - u'(y-0) = -1.$$

この条件を解くと

$$G(x, y) = u(x) = \begin{cases} x(1-y), & 0 \leq x \leq y, \\ y(1-x), & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(1)(ii) $v'' = \rho$ の解

$G''(x, y) = -\delta(x-y)$ なので、

$$v(x) = -\int_0^1 G(x, y)\rho(y) dy.$$

実際 $v'' = -\int G''\rho = \rho$ 。また $G(0, y) = G(1, y) = 0$ から境界条件も満たす。

(2)(i) 円板上の調和関数

$z = x+iy$ 、 $\bar{z} = x-iy$ に対して z^n は正則、 $\bar{z}^n$ は反正則である。 $\Delta = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}$ を用いると $\Delta(z^n + \bar{z}^n) = 0$ 。極座標 $z = re^{i\theta}$ では

$$u_n(r, \theta) = z^n + \bar{z}^n = 2r^n \cos(n\theta).$$

$r = 1$ で $u_n = 2\cos(n\theta)$ ($n = 0$ の場合も $u_0 = 2$)。

(2)(ii) 境界値 $|\theta|$ の調和拡張

$-\pi \leq \theta \leq \pi$ で偶関数 $|\theta|$ の Fourier 余弦級数は

$$|\theta| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((2m+1)\theta)}{(2m+1)^2}.$$

各 $\cos(n\theta)$ を調和関数 $r^n \cos(n\theta)$ に置き換えると

$$u(r, \theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^{2m+1} \cos((2m+1)\theta)}{(2m+1)^2}, \quad 0 \leq r < 1.$$

$r < 1$ で級数は項別微分でき $\Delta u = 0$ 。境界値も $r \uparrow 1$ で指定の $|\theta|$ になる。

(3) $d \geq 3$ 次元の Poisson 方程式

$-\Delta u = \delta^{(d)}(x)$ 、 $u \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \infty$) を考える。回転対称な $u = u(r)$ 、 $r = |x|$ を探すと $r > 0$ では

$$u''(r) + \frac{d-1}{r}u'(r) = 0 \implies u(r) = a + br^{2-d}.$$

無限遠の条件から $a = 0$ 。原点を含む半径 R の球で積分し Gauss の定理を使うと

$$1 = - \int_{B_R} \Delta u \, d^d x = - \int_{\partial B_R} \nabla u \cdot n \, dS = -(2-d)b S_{d-1},$$

$S_{d-1} = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ は単位 $(d-1)$ 球面の面積。従って

$$u(x) = \frac{\Gamma(d/2)}{2(d-2)\pi^{d/2}} |x|^{2-d} \quad (d \geq 3).$$

$d = 3$ で $u = 1/(4\pi r)$ に一致する。式は原点で特異だが、分布として問題の Poisson 方程式を満たす。

数学 | 年度別問題

2010 年度

出題テーマ / 編集上の分類

最急降下法／波動方程式

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2010年度

最急降下法 / 1 次元波動方程式

出典：既刊数学編 2009・2010年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第 1 問

A は n 行 n 列の実対称行列で、その固有値はすべて正とする。 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{b}$ は n 行 1 列の実数値をとる縦ベクトルとする。 $\mathbf{x}$ に関する線形方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解 $\bar{\mathbf{x}}$ を求めたい。任意の初期ベクトル $\mathbf{x}^{(0)}$ から始めて、 $\mathbf{x}^{(0)} \rightarrow \mathbf{x}^{(1)} \rightarrow \mathbf{x}^{(2)} \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$ のような逐次的なステップにより $\bar{\mathbf{x}}$ を探索する手続きを考える。 n 行 1 列の実数値をとる任意の縦ベクトル $\mathbf{y}$ に対して、その大きさを表す二種類のノルムとして、 $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y}^t \mathbf{y}}$ と $\|\mathbf{y}\|_A = \sqrt{\mathbf{y}^t A \mathbf{y}}$ を定義する。ここで、 $\mathbf{y}^t$ は $\mathbf{y}$ の転置ベクトルを表す。以下の設問に答えよ。

(i) 線形方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解 $\bar{\mathbf{x}}$ は、次の量

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t A \mathbf{x} - \mathbf{b}^t \mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i A_{ij} x_j - \sum_{i=1}^n b_i x_i$$

の最小値で与えられる事を示せ。ここで、 x_i と b_i はそれぞれ、縦ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{b}$ の i 番目の成分を表す。また、 A_{ij} は行列 A の (i, j) 成分を表す。

(ii) $f(\mathbf{x})$ の最小値を与えるベクトル $\bar{\mathbf{x}}$ を探索する時に、 m 回後のステップのベクトル $\mathbf{x}^{(m)}$ から $(m+1)$ 回後のステップのベクトル $\mathbf{x}^{(m+1)}$ を次の手順で求める。まず、適当な実数パラメーター α を選び、 $\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + \alpha \mathbf{r}$ とおく。ここで、探索方向ベクトル $\mathbf{r}$ は、その成分を $r_i = -\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(m)}}$ として、 $f(\mathbf{x})$ の勾配ベクトルと反対方向にとる。このとき、 $\mathbf{r} = -A(\mathbf{x}^{(m)} - \bar{\mathbf{x}})$ であることを示せ。

(iii) 一回のステップで $f(\mathbf{x})$ が最も大きく減少するようにパラメーター α を選ぶ。このとき、 α を $\|\mathbf{r}\|$ と $\|\mathbf{r}\|_A$ を用いて表せ。

(iv) $\mathbf{x}^{(m)}$ の $\bar{\mathbf{x}}$ からのズレを $\delta \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^{(m)} - \bar{\mathbf{x}}$ とする。このとき、 $\|\delta \mathbf{x}^{(m+1)}\|_A$ を $\|\delta \mathbf{x}^{(m)}\|_A$ 、 $\|\mathbf{r}\|$ および $\|\mathbf{r}\|_A$ を用いて表せ。

(v) A の n 個の固有値を λ_i 、対応する規格直交化された固有ベクトルを $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とする。さらに、 $\delta \mathbf{x}^{(m)}$ の固有ベクトル $\mathbf{a}_i$ による展開を $\delta \mathbf{x}^{(m)} = \sum_{i=1}^n \rho_i \mathbf{a}_i$ とする。このとき、ノルムの変化、 $R = \frac{\|\delta \mathbf{x}^{(m+1)}\|_A}{\|\delta \mathbf{x}^{(m)}\|_A}$ を固有値 λ_i と展開係数 ρ_i を用いて表せ。

(vi) A を 2 行 2 列とし、その固有値の比 $p = \lambda_1/\lambda_2$ が $0 < p \leq 1$ を満たすとする。このとき、設問 (v) の結果を用いて R に上限があることを示し、任意の初期ベクトル $\mathbf{x}^{(0)}$ から始めた探索が必ず収束することを示せ。

第 2 問

以下の偏微分方程式を考える。

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

ここで v は正の定数であり, $u(x, t)$ は $-\infty < t < +\infty$ および $-\infty < x < +\infty$ で定義された二変数関数である。以下の設問に答えよ。

- (i) 変数 $\xi = x + vt$ および $\eta = x - vt$ を用いて (1) 式を書き直せ。
- (ii) (1) 式の一般解が, 適当な関数 f と g を用いて $u(x, t) = f(x + vt) + g(x - vt)$ と表せることを示せ。
- (iii) 任意の時間 t に対して, (1) 式の解が $\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$ を満たしているとする。このとき, 以下の積分 I が t に依存しないことを示せ。ただし, I は発散しないとする。

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx.$$

- (iv) $u(x, t)$ の初期条件として, $u(x, 0) = u_0(x)$, $\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x)$ が与えられているとする。このとき, 設問 (ii) の結果を利用して, 解 $u(x, t)$ を u_0 と u_1 を用いて表せ。
- (v) $u_0(x) = 0$ および $u_1(x) = \frac{v^2}{\pi} \frac{b}{(x-a)^2 + b^2}$ なる初期条件のもとで, $t > 0$ での解 $u(x, t)$ を求めよ。ここで, a と b は正の定数とする。
- (vi) $b \rightarrow 0$ なる極限の場合に, 設問 (v) で求めた解 $u(x, t)$ を図示せよ。

3 2010 年度 第 1 問 | 最急降下法の厳密収束評価

A は実対称正定値、 $\bar{x} = A^{-1}b$ とする。ユークリッドノルム $\|y\|^2 = y^T y$ 、 A ノルム $\|y\|_A^2 = y^T A y$ を使う。

(i) 解と二次形式の最小値

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x, \quad \nabla f = A x - b.$$

$\nabla f = 0$ の一意解は $Ax = b$ 。さらに平方完成で

$$f(x) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T A (x - \bar{x}) \geq 0.$$

等号は $x = \bar{x}$ の場合のみ。

(ii) 残差の表現

反勾配方向 $r = -\nabla f(x^{(m)})$ をとると

$$r = b - A x^{(m)} = -A(x^{(m)} - \bar{x}).$$

(iii) f を最も減少させる刻み幅

$r \neq 0$ と仮定し、 $x^{(m+1)} = x^{(m)} + \alpha r$ とする。展開すれば

$$f(x + \alpha r) = f(x) - \alpha \|r\|^2 + \frac{\alpha^2}{2} \|r\|_A^2.$$

α に関して微分し零とおくと、

$$\alpha_* = \frac{\|r\|^2}{\|r\|_A^2}$$

が唯一の最小値を与える。 $r = 0$ なら既に厳密解であり停止する。

(iv) A ノルムで測った誤差の変化

$\delta = x^{(m)} - \bar{x}$ とする。 $A\delta = -r$ より

$$\begin{aligned} \|\delta + \alpha_* r\|_A^2 &= \|\delta\|_A^2 + 2\alpha_* \delta^T A r + \alpha_*^2 \|r\|_A^2 \\ &= \|\delta\|_A^2 - 2\alpha_* \|r\|^2 + \alpha_*^2 \|r\|_A^2. \end{aligned}$$

したがって

$$\|\delta^{(m+1)}\|_A = \sqrt{\|\delta^{(m)}\|_A^2 - \frac{\|r\|^4}{\|r\|_A^2}}.$$

正定値性により平方根の内部は非負である。

(v) 固有値・固有ベクトルによる収束比

規格直交固有ベクトル $\mathbf{a}_i$ 、 $A\mathbf{a}_i = \lambda_i \mathbf{a}_i$ について

$$\boldsymbol{\delta}^{(m)} = \sum_{i=1}^n \rho_i \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{r} = - \sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_i \mathbf{a}_i.$$

よって

$$\|\boldsymbol{\delta}^{(m)}\|_A^2 = \sum_i \lambda_i \rho_i^2, \quad \|\mathbf{r}\|^2 = \sum_i \lambda_i^2 \rho_i^2, \quad \|\mathbf{r}\|_A^2 = \sum_i \lambda_i^3 \rho_i^2.$$

設問 (iv) から、ゼロでない誤差に対して

$$R = \frac{\|\boldsymbol{\delta}^{(m+1)}\|_A}{\|\boldsymbol{\delta}^{(m)}\|_A} = \sqrt{1 - \frac{(\sum_i \lambda_i^2 \rho_i^2)^2}{(\sum_i \lambda_i \rho_i^2)(\sum_i \lambda_i^3 \rho_i^2)}}.$$

(vi) 2 次正定値行列での収束率上界

$0 < m \leq M$ を固有値の最小・最大値とし $p = m/M \in (0, 1]$ とおく。重み

$$w_i = \frac{\lambda_i \rho_i^2}{\sum_j \lambda_j \rho_j^2}, \quad \sum_i w_i = 1$$

を定義すれば、 $z = \sum_i w_i \lambda_i$ において

$$R^2 = 1 - \frac{z^2}{\sum_i w_i \lambda_i^2}.$$

区間 $[m, M]$ 上では $(\lambda - m)(\lambda - M) \leq 0$ 、すなわち $\lambda^2 \leq (m + M)\lambda - mM$ 。ゆえに

$$R^2 \leq 1 - \frac{z^2}{(m + M)z - mM}.$$

$z \in [m, M]$ に関し右辺を最大化する。分母は正で、微分すると最大点は $z = 2mM/(m + M)$ 。したがって

$$R^2 \leq 1 - \frac{4mM}{(m + M)^2} = \frac{(M - m)^2}{(M + m)^2}.$$

$$0 \leq R \leq \frac{M - m}{M + m} = \frac{1 - p}{1 + p} < 1 \quad (0 < p \leq 1).$$

従って $\|\boldsymbol{\delta}^{(m)}\|_A \leq [(1 - p)/(1 + p)]^m \|\boldsymbol{\delta}^{(0)}\|_A \rightarrow 0$ 。任意の初期ベクトルから厳密解に収束する。
 $p = 1$ なら $R = 0$ 、1 ステップで解に到達する。

4 2010 年度 第 2 問 | 1 次元波動方程式

考える偏微分方程式は

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad v > 0, \quad x, t \in \mathbb{R}.$$

(i) 特性座標での表現

$\xi = x + vt, \eta = x - vt$ とおくと

$$\partial_t = v(\partial_\xi - \partial_\eta), \quad \partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta.$$

ゆえに

$$\frac{1}{v^2} \partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_\xi - \partial_\eta)^2 - (\partial_\xi + \partial_\eta)^2 = -4\partial_\xi \partial_\eta,$$

すなわち

$$\partial_\xi \partial_\eta u = 0.$$

(ii) 波動方程式の一般解

前式を ξ, η について順次積分すると

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta), \quad \text{よって} \quad u(x, t) = f(x + vt) + g(x - vt).$$

f は左向き、 g は右向きへ速さ v で伝わる。

(iii) 積分量 I の保存

問題文の

$$I(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{u_t^2}{v^2} + u_x^2 \right] dx$$

を考える。一般解から $u_t = v(f' - g')$ 、 $u_x = f' + g'$ なので

$$\frac{1}{2} \left[\frac{u_t^2}{v^2} + u_x^2 \right] = \frac{1}{2} [(f' - g')^2 + (f' + g')^2] = f'^2 + g'^2.$$

従って

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x + vt)^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} g'(x - vt)^2 dx.$$

I が有限なら各項は可積分であり、積分変数の平行移動により

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (f'(y)^2 + g'(y)^2) dy = \text{一定}.$$

この証明は境界での積の極限を仮定せず、原題の有限エネルギー条件を直接利用している。

(iv) 初期値から解を求める (d'Alembert 公式)

$u(x, 0) = u_0(x)$ 、 $u_t(x, 0) = u_1(x)$ とする。一般解から

$$f(x) + g(x) = u_0(x), \quad v[f'(x) - g'(x)] = u_1(x).$$

これらを解いて

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + vt) + u_0(x - vt)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} u_1(y) dy.$$

$t < 0$ に対しても向き付き積分として有効である。

(v) Lorentz 型初期速度に対する厳密解

原題の初期条件は

$$u_0(x) = 0, \quad u_1(x) = \frac{v^2}{\pi} \frac{b}{(x-a)^2 + b^2}, \quad a, b > 0.$$

設問 (iv) へ代入すると

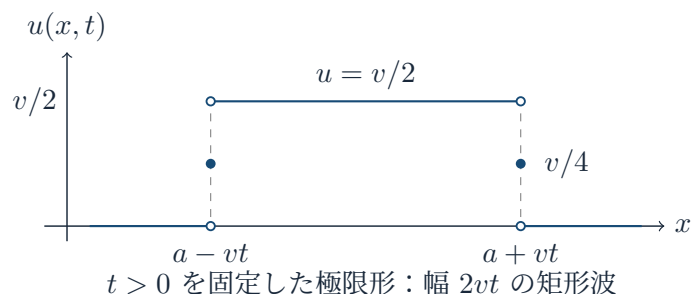
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{v}{2\pi} \int_{x-vt}^{x+vt} \frac{b}{(y-a)^2 + b^2} dy \\ &= \frac{v}{2\pi} \left[\arctan \frac{x+vt-a}{b} - \arctan \frac{x-vt-a}{b} \right] \quad (t > 0). \end{aligned}$$

$t > 0$ では 2 つの逆正接の引数の大小関係から $u(x, t) \geq 0$ も分かる。

(vi) $b \rightarrow 0^+$ の極限とグラフ

$b > 0$ について $\lim_{b \rightarrow 0^+} \arctan(z/b) = (\pi/2) \operatorname{sgn}(z)$ ($z \neq 0$)。よって、 $t > 0$ を固定した極限は

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} u(x, t) = \begin{cases} \frac{v}{2}, & a - vt < x < a + vt, \\ \frac{v}{4}, & x = a - vt \text{ または } x = a + vt, \\ 0, & x < a - vt \text{ または } x > a + vt. \end{cases}$$



図の段差の上下は開円、境界の点値 $v/4$ は塗りつぶした点で示した。初期の局在速度が、左右へ速さ v で広がる波を生じる。

数学 | 年度別問題

2009 年度

出題テーマ / 編集上の分類

実対称行列／二準位

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2009年度

実対称行列 / 2 準位系の時間発展

出典：既刊数学編 2009・2010年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第 1 問

1. 実変数
- θ
- に依存する 2 行 2 列の実対称行列

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos \theta + 3 \sin \theta & -\sqrt{3} \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta \\ -\sqrt{3} \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta & 3 \cos \theta + \sin \theta \end{pmatrix}$$

に対し、次の問に答えよ。なお θ の範囲は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であるとする。

- (i) 行列
- A
- の 2 つの固有値を求めよ。

- (ii)
- A
- の対角成分の和
- $\text{Tr } A$
- の 3 乗
- $(\text{Tr } A)^3$
- と
- A^3
- の対角成分の和
- $\text{Tr } (A^3)$
- の差を
- θ
- の関数として

$$f(\theta) = (\text{Tr } A)^3 - \text{Tr } (A^3)$$

と置くとき、 $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ。

- (iii)
- I
- を単位行列とすると、
- A
- の多項式から作られる行列

$$B = A^4 - A^2 + A + (\cos^2 \theta \sin^2 \theta - 1)I$$

が逆行列を持たないような θ の値を求めよ。

- (iv)
- B
- が逆行列
- B^{-1}
- を持つとき、
- B^{-1}
- を行列
- A
- の 1 次式、すなわち係数
- $a_1(\theta)$
- ,
- $a_0(\theta)$
- を用いて
- $B^{-1} = a_1(\theta)A + a_0(\theta)I$
- の形に表せ。

- 2.
- N
- 行
- N
- 列の実対称行列
- X
- の全ての固有値
- λ_i
- (
- $i = 1, \dots, N$
-) が非負
- $\lambda_i \geq 0$
- であるとする。

- (i) 任意の自然数
- n
- に対して不等式

$$(\text{Tr } X)^n \geq \text{Tr } (X^n)$$

が成り立つことを証明せよ。

- (ii) 上の不等式で等号
- $(\text{Tr } X)^n = \text{Tr } (X^n)$
- が成立するのは、固有値
- λ_i
- がどのような場合に限られるか。ただし
- $n \geq 2$
- とする。

第 2 問

実変数 t の関数 $f_1(t), f_2(t)$ が次の連立 1 階常微分方程式を満たす。

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

ただし $a(t), b(t), c(t)$ は t の実関数であり、 $i = \sqrt{-1}$ とする。

- $|f_1(t)|^2 + |f_2(t)|^2$ が t に依存しないことを示せ。
- $f_1(t) = e^{-i \int_0^t a(\tau) d\tau} \tilde{f}_1(t)$, $f_2(t) = e^{-i \int_0^t c(\tau) d\tau} \tilde{f}_2(t)$ によって $\tilde{f}_1(t)$ と $\tilde{f}_2(t)$ を定義すると、これらが

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \tilde{f}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b}(t) \\ \tilde{b}(t)^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \tilde{f}_2(t) \end{pmatrix}$$

という形の常微分方程式を満たすことを示せ。またこのときの $\tilde{b}(t)$ の表式を求めよ。

ただし $\tilde{b}(t)^*$ は $\tilde{b}(t)$ の複素共役を表す。

- $a(t) = c(t) = 0$ であり、 $b(t)$ が定数 b_0 であるとする。式 (1) の解 $f_1(t)$ を、 b_0 および $f_1(0), f_2(0)$ を用いて表せ。
- $a(t) = c(t) = 0$ であり、 $b(t)$ は $t \rightarrow -\infty$ で十分はやく減衰する関数であるとする。このとき、式 (1) の解 $f_1(t)$ を、 $b(t)$ および $f_1(-\infty), f_2(-\infty)$ を用いて表せ。ただし $f_1(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f_1(t)$ などである。
- 設問 4 で、 $b(t)$ が正の定数 β, ω, t_0 を用いて

$$b(t) = \frac{\beta \cos \omega t}{t^2 + t_0^2}$$

で与えられる場合を考える。 $f_1(-\infty) = 1, f_2(-\infty) = 0$ のとき、 $|f_1(+\infty)|^2, |f_2(+\infty)|^2$ の値を求めよ。

1 2009 年度 第 1 問 | 2 次行列とスペクトル不等式

実変数 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ に対して $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ と略記する。問題の行列は

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} c + 3s & \sqrt{3}(s - c) \\ \sqrt{3}(s - c) & 3c + s \end{pmatrix}.$$

1.(i) 固有値

$$\operatorname{Tr} A = c + s, \quad \det A = \frac{(c + 3s)(3c + s) - 3(s - c)^2}{16} = cs.$$

したがって特性方程式は

$$\lambda^2 - (c + s)\lambda + cs = (\lambda - c)(\lambda - s) = 0.$$

答： $\lambda_1 = \cos \theta, \quad \lambda_2 = \sin \theta$ 。 $c = s$ の場合にも成り立つ。

1.(ii) $f(\theta)$ の最大・最小

A は実対称行列なので $\operatorname{Tr}(A^3) = c^3 + s^3$ 。ゆえに

$$f(\theta) = (c + s)^3 - (c^3 + s^3) = 3cs(c + s).$$

$t = c + s$ とおくと $c^2 + s^2 = 1$ より $cs = (t^2 - 1)/2$ 、また $1 \leq t \leq \sqrt{2}$ である。したがって

$$f = \frac{3}{2}(t^3 - t), \quad \frac{df}{dt} = \frac{3}{2}(3t^2 - 1) > 0.$$

t が最大となる $\theta = \pi/4$ で最大、 $\theta = 0, \pi/2$ で最小。

$$f_{\min} = 0 \quad (\theta = 0, \pi/2), \quad f_{\max} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (\theta = \pi/4).$$

1.(iii) 行列 B の非可逆条件

A の固有値が c, s なので、 $p(x) = (x^2 - c^2)(x^2 - s^2)$ に対して $p(A) = 0$ 。具体的に

$$A^4 - (c^2 + s^2)A^2 + c^2s^2I = A^4 - A^2 + c^2s^2I = 0.$$

問題の定義 $B = A^4 - A^2 + A + (c^2s^2 - 1)I$ は

$$B = A - I$$

まで簡約される。固有値は $c - 1, s - 1$ であり、可逆でないのは $c = 1$ または $s = 1$ 、すなわち

$$\theta = 0, \pi/2.$$

1.(iv) B^{-1} を A の一次式で表す

$0 < \theta < \pi/2$ において $d = (c-1)(s-1) > 0$ とする。2 次行列 X の公式 $X^{-1} = [(\text{Tr } X)I - X] / \det X$ を $X = A - I$ に適用すると

$$B^{-1} = \frac{(c+s-1)I - A}{(c-1)(s-1)}.$$

答:
$$a_1(\theta) = -\frac{1}{(c-1)(s-1)}, \quad a_0(\theta) = \frac{c+s-1}{(c-1)(s-1)}.$$

2.(i) 非負固有値のトレース不等式

X の固有値を $\lambda_i \geq 0$ とすれば

$$(\text{Tr } X)^n = \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \right)^n = \sum_{i=1}^N \lambda_i^n + (\text{非負の交差項}).$$

したがって任意の自然数 n に対して

$$(\text{Tr } X)^n \geq \text{Tr}(X^n).$$

2.(ii) 等号成立条件

$n \geq 2$ のとき、正の固有値が 2 個以上あれば、例えば $n\lambda_i^{n-1}\lambda_j > 0$ という交差項が存在して不等号は厳密になる。逆に、正の固有値が高々 1 個なら交差項はすべて零。

$$\text{等号成立} \iff \#\{i : \lambda_i > 0\} \leq 1 \iff \text{rank } X \leq 1.$$

2 2009 年度 第 2 問 | 2 準位系の時間発展

問題の方程式を $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^\top$ 、

$$i \frac{d\mathbf{f}}{dt} = H(t)\mathbf{f}, \quad H(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}$$

と書く。 a, b, c は実関数である。

1. ノルムの保存

$H(t)^\dagger = H(t)$ であり、 $\dot{\mathbf{f}} = -iH\mathbf{f}$ 、 $\dot{\mathbf{f}}^\dagger = i\mathbf{f}^\dagger H$ より

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f}^\dagger \mathbf{f}) = (i\mathbf{f}^\dagger H)\mathbf{f} + \mathbf{f}^\dagger(-iH\mathbf{f}) = 0.$$

$|f_1(t)|^2 + |f_2(t)|^2 = \text{一定}$ 。正規化状態なら常に 1 である。

2. 対角成分を除く位相変換

$\alpha(t) = \int_0^t a(t')dt'$ 、 $\gamma(t) = \int_0^t c(t')dt'$ として

$$f_1 = e^{-i\alpha} \tilde{f}_1, \quad f_2 = e^{-i\gamma} \tilde{f}_2.$$

最初の方程式に代入すると $a\tilde{f}_1$ が相殺され、

$$i\dot{\tilde{f}}_1 = b(t)e^{i(\alpha-\gamma)}\tilde{f}_2, \quad i\dot{\tilde{f}}_2 = b(t)e^{-i(\alpha-\gamma)}\tilde{f}_1.$$

よって

$$\tilde{b}(t) = b(t) \exp\left(i \int_0^t [a(t') - c(t')]dt'\right).$$

下側の非対角成分は $\tilde{b}(t)^*$ である。

3. $a = c = 0$, $b(t) = b_0$

$H = b_0\sigma_x$ ($\sigma_x^2 = I$) より

$$e^{-iHt} = \cos(b_0t)I - i\sin(b_0t)\sigma_x.$$

従って

$$f_1(t) = f_1(0) \cos(b_0t) - if_2(0) \sin(b_0t).$$

4. 時間依存の結合 $b(t)$

この場合、任意の時刻の Hamiltonian は $H(t) = b(t)\sigma_x$ で互いに可換である。 b が $t \rightarrow -\infty$ で積分可能なら

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t b(t')dt', \quad U(t, -\infty) = e^{-i\Phi(t)\sigma_x}.$$

よって初期値 $f_j(-\infty)$ に対し

$$f_1(t) = f_1(-\infty) \cos \Phi(t) - i f_2(-\infty) \sin \Phi(t).$$

5. $b(t) = \beta \cos(\omega t)/(t^2 + t_0^2)$ の最終確率

$\beta, \omega, t_0 > 0$ 。標準積分は（例えば上半平面の留数計算で）

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t^2 + t_0^2} dt = \frac{\pi}{t_0} e^{-\omega t_0},$$

なので総回転角は $\Phi_\infty = \beta\pi e^{-\omega t_0}/t_0$ 。初期状態 $(1, 0)^\top$ から

$$\mathbf{f}(+\infty) = \begin{pmatrix} \cos \Phi_\infty \\ -i \sin \Phi_\infty \end{pmatrix}.$$

$$|f_1(+\infty)|^2 = \cos^2 \left(\frac{\pi\beta}{t_0} e^{-\omega t_0} \right), \quad |f_2(+\infty)|^2 = \sin^2 \left(\frac{\pi\beta}{t_0} e^{-\omega t_0} \right).$$

確率の和は 1 であり、設問 1 の保存則と一致する。

数学 | 年度別問題

2008

年度

出題テーマ / 編集上の分類

3次元回転／Hermite多項式

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2008年度

3次元回転群 / Hermite 多項式

出典：既刊数学編 2007・2008年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第 1 問

- (i) 3次元空間回転を表す3次元実正方行列すべての集合を R とする。 R は単位行列 I も含むものとする。これに関して、以下の各命題の真偽を○(真)か×(偽)かで答えよ。

- (a) $X \in R$ かつ $Y \in R$ ならば $XY \in R$ である。
 (b) $X \in R$ かつ $Y \in R$ ならば $XY = YX$ である。
 (c) $X \in R$ ならば ${}^tXX = X{}^tX = I$ である。ただし、 tX は X の転置行列を表す。
 (d) ${}^tXX = X{}^tX = I$ であるならば $X \in R$ である。
 (e) $X \in R$ ならば $U{}^tXU$ が対角行列であるようなユニタリ行列 U が存在する。ただし、 $U{}^t$ は U のエルミート共役行列 (転置行列の複素共役) を表す。

- (ii) $\Omega(\mathbf{n}, \theta)$ を、単位ベクトル $\mathbf{n}$ の方向を回転軸とした角度 θ の回転を表す3次元実正方行列とする。ここで、 $\mathbf{n}$ 方向に右ねじを進める時右ねじを回す向きを正とする回転角を θ とする。また、任意の3次元実ベクトル $\mathbf{v}_0$ に対して、 $\mathbf{v}(\theta)$ を $\mathbf{v}(\theta) = \Omega(\mathbf{n}, \theta)\mathbf{v}_0$ で定義する。以下の設問に答えよ。

- (1) $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ のとき、 $\Omega(\mathbf{n}, \theta)$ の3つの固有値を答えよ。
 (2) 任意の $\mathbf{n}$ に対して、 $\Omega(\mathbf{n}, \theta)$ の3つの固有値を答えよ。
 (3) 原点を始点としたとき $\mathbf{v}(\theta)$ の終点がどれだけ移動するかを考えて、

$$\mathbf{v}(\theta + \Delta\theta) - \mathbf{v}(\theta) = \mathbf{n} \times \mathbf{v}(\theta) \Delta\theta$$

となることを説明せよ。ただし、 $\Delta\theta$ は θ に比べて十分小さいものとする。また、 $\times$ はベクトル積 (外積) である。必要なら図を用いて説明してもよい。

- (4) 設問 (3) の結果から得られる $\mathbf{v}(\theta)$ に関する微分方程式を解くことによって、

$$\Omega(\mathbf{n}, \theta) = e^{\theta A(\mathbf{n})}$$

であることを示せ。ここで、 $A(\mathbf{a})$ は、ある3次元実ベクトル $\mathbf{a}$ に対して決まる3次元実正方行列であり、任意のベクトル $\mathbf{u}$ に対して $A(\mathbf{a})\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{u}$ を満たすものとする。

- (5) 3次元実交代行列

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & 0 & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ただし、} x_{ij} = -x_{ji}, \quad i, j = 1 \sim 3)$$

に対して、 $X = A(\mathbf{a}_0)$ となるような3次元実ベクトル $\mathbf{a}_0$ を求めよ。ここで、 A は設問 (4) で定義されたものと同じである。

- (6) $Y = e^X$ となるような 3 次元実交代行列 X が存在するならば Y は 3 次元回転を表す行列であることを示せ。

第2問

$n = 0, 1, 2, \dots$ に対して、関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

と定義する。以下の設問に答えよ。

(i) $f_n(x)$ は x の多項式である。 x の何次の多項式であるか答えよ。

(ii) $n > 1$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_n(x) e^{-x^2} dx$$

を求めよ。

(iii) 一般の n に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f_n(x) e^{-x^2} dx$$

を求めよ。ただし、必要であれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

を用いてよい。

(iv) z を複素数とするとき、

$$e^{-z^2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-\omega^2}}{\omega - z} d\omega$$

が成り立つ。ここで、複素平面上の積分経路 C は、図 1 のような z を中心とした半径 1 の反時計回りの円周であるとする。このことを用いて、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} f_n(z) = e^{-t^2 - 2tz} \quad (|t| < 1)$$

となることを示せ。ただし、今の場合、無限級数和と積分の順序を入れ替えてもよい。

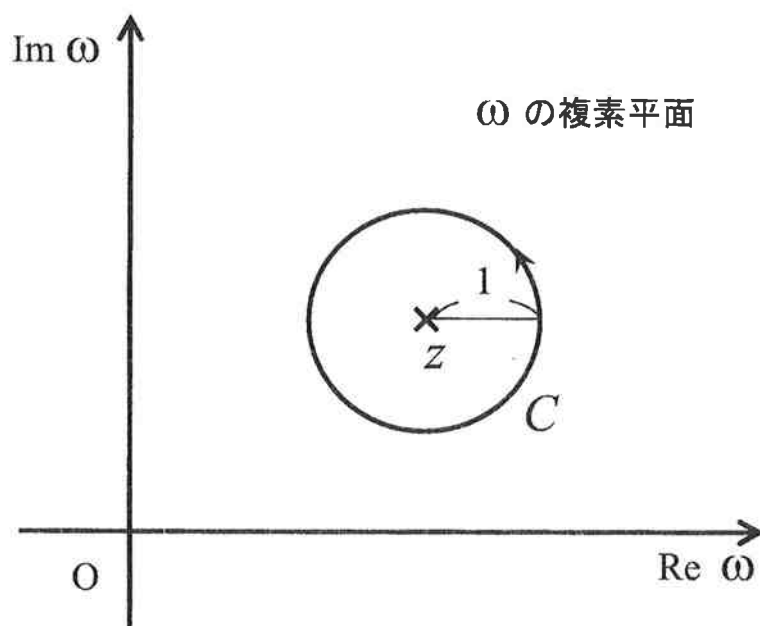
(v) 設問 (iv) で得られた関数 $e^{-t^2 - 2tz}$ は、

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{-t^2 - 2tz} - 2z \frac{\partial}{\partial z} e^{-t^2 - 2tz} = -2t \frac{\partial}{\partial t} e^{-t^2 - 2tz}$$

という式を満たす。このことを用いて、関数 $f_n(z)$ が

$$\frac{d^2}{dz^2} f_n(z) - 2z \frac{d}{dz} f_n(z) + \lambda f_n(z) = 0$$

という微分方程式を満たすということを示し、そのときの λ を求めよ。

図 1: 積分経路 C .

3 2008 年度 第 1 問 | 3 次元回転群と生成子

(i) 正誤判定 (a) – (e)

R は原点を保つ 3 次元の空間回転全体なので $R = \mathrm{SO}(3)$ 。すなわち

$$\mathrm{SO}(3) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid X^T X = I_3, \det X = 1\}.$$

- (a) 真。 $X, Y \in \mathrm{SO}(3)$ なら $(XY)^T(XY) = Y^T X^T XY = I_3$ 、 $\det(XY) = 1$ 。ゆえに $XY \in R$ 。
 (b) 偽。 3 次元回転は一般には可換でない。例として z 軸まわり 90° 回転 X と x 軸まわり 90° 回転 Y をとると、 $XYe_z = e_x$ 、 $YXe_z = -e_y$ なので $XY \neq YX$ 。
 (c) 真。 $X \in \mathrm{SO}(3)$ は直交行列なので、定義から $X^T X = XX^T = I_3$ 。
 (d) 偽。 $X^T X = XX^T = I_3$ のみでは $\det X = -1$ があり得る。例： $X = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$ は鏡映で、 R に属さない。
 (e) 真。 実直交行列 X は複素数体上で $X^\dagger X = XX^\dagger = I_3$ 、すなわち正規行列。スペクトル定理により、あるユニタリ行列 U で $U^\dagger XU$ は対角行列となる。

答 (a) ○, (b) ×, (c) ○, (d) ×, (e) ○。

(ii)-1. $n = e_z$ の回転行列の固有値

$$\Omega(e_z, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e_z は固有値 1 を持ち、 xy 平面上の 2 次元回転部分の固有値は $e^{\pm i\theta}$ 。従って

$$\mathrm{Spec} \Omega(e_z, \theta) = \{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}.$$

(ii)-2. 任意の回転軸に対する固有値

任意の単位ベクトル n に対して $Qe_z = n$ を満たす $Q \in \mathrm{SO}(3)$ が存在する。このとき

$$\Omega(n, \theta) = Q\Omega(e_z, \theta)Q^{-1}.$$

相似変換で固有値は不変なので、任意の回転軸に対しても

$$\mathrm{Spec} \Omega(n, \theta) = \{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}.$$

(ii)-3. 無限小回転

回転軸上の成分 $v_{\parallel}$ は変わらず、垂直成分 $v_{\perp}$ は軸まわりに $\Delta\theta$ だけ回る。従って

$$v(\theta + \Delta\theta) = v_{\parallel} + v_{\perp} \cos \Delta\theta + (n \times v_{\perp}) \sin \Delta\theta.$$

$\cos \Delta\theta = 1 + O(\Delta\theta^2)$, $\sin \Delta\theta = \Delta\theta + O(\Delta\theta^3)$ を使い、 $n \times v_{\parallel} = 0$ より

$$v(\theta + \Delta\theta) - v(\theta) = (n \times v(\theta))\Delta\theta + O(\Delta\theta^2).$$

原題の等式はその一次近似である。

(ii)-4. 回転行列と行列指数関数

$A(n)u = n \times u$ と定義すれば、前問から

$$\frac{dv}{d\theta} = A(n)v, \quad v(0) = v_0.$$

定数係数連立常微分方程式なので解は $v(\theta) = e^{\theta A(n)}v_0$ 。この式が任意の初期ベクトル v_0 について成り立つことから

答 $\Omega(n, \theta) = e^{\theta A(n)}。$

さらに $A(n)^T = -A(n)$ であり、この $A(n)$ は回転群の Lie 代数 $\mathfrak{so}(3)$ の元である。

(ii)-5. 歪対称行列からベクトルを復元

$a = (a_1, a_2, a_3)^T$ とすると

$$A(a) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

原題の $X = (x_{ij})$ ($x_{ji} = -x_{ij}$) と比較し、

答 $a_0 = (-x_{23}, x_{13}, -x_{12})^T。$

(ii)-6. $Y = e^X$ が回転行列となること

実歪対称行列 $X^T = -X$ に対し

$$Y^T Y = e^{X^T} e^X = e^{-X} e^X = I_3.$$

従って Y は直交行列。また $\operatorname{tr} X = 0$ なので

$$\det Y = \det(e^X) = e^{\operatorname{tr} X} = 1.$$

ここで $\det(e^X) = e^{\operatorname{tr} X}$ は一般の正方行列に成り立つ恒等式。従って

答 $e^X \in \operatorname{SO}(3) = R。$

なお $X = A(a_0)$ 、 $a_0 \neq 0$ なら e^X は単位軸 $a_0/|a_0|$ のまわりに角度 $|a_0|$ だけ回す回転である。

4 2008 年度 第 2 問 | Hermite 多項式と母関数

原題の定義は

$$f_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

通常の物理学者の Hermite 多項式との関係は $f_n = (-1)^n H_n$ である。

(i) $f_n(x)$ の次数と最高次係数

$g_n(x)$ を $\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = g_n(x) e^{-x^2}$ とすると、積の微分から

$$g_0(x) = 1, \quad g_{n+1}(x) = g'_n(x) - 2xg_n(x).$$

g_n が次数 n 、最高次係数 $(-2)^n$ なら、 $-2xg_n$ が次数 $n+1$ で最高次係数 $(-2)^{n+1}$ を与え、 g'_n は高々次数 $n-1$ 。従って帰納法より

答 f_n は次数 n の多項式、最高次係数 $(-2)^n$ 。

実際 $f_0 = 1, f_1 = -2x, f_2 = 4x^2 - 2$ 。

(ii) $n > 1$ に対する一次モーメント

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_n(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx.$$

Gaussian とその導関数は無限遠で任意の多項式より速く減衰するため、部分積分の境界項は消える。 n 回移項させると

$$= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n x}{dx^n} e^{-x^2} dx = 0 \quad (n > 1).$$

答 0 。

(iii) n 次モーメント

同様に n 回部分積分すれば

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_n(x) e^{-x^2} dx &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n x^n}{dx^n} e^{-x^2} dx \\ &= (-1)^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \boxed{(-1)^n n! \sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

$n = 0$ の場合も $\sqrt{\pi}$ となり成立する。

(iv) Cauchy 積分公式から母関数を導く

原題で与えられた e^{-z^2} の Cauchy 積分表示を n 回微分すると

$$\frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-\omega^2}}{(\omega - z)^{n+1}} d\omega.$$

従って $|t| < 1$ (原題の円の半径 1) なら $|t/(\omega - z)| < 1$ が一様に成立し、級数と積分の交換ができる。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} f_n(z) &= \frac{e^{z^2}}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-\omega^2}}{\omega - z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\omega - z} \right)^n d\omega \\ &= \frac{e^{z^2}}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-\omega^2}}{\omega - z - t} d\omega. \end{aligned}$$

$|t| < 1$ なら $z + t$ は円の内部にあるので、再び Cauchy の積分公式から

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} f_n(z) = e^{z^2} e^{-(z+t)^2} = \boxed{e^{-t^2 - 2zt}}.$$

補足 この等式は両辺とも t の整関数であることから任意の $t \in \mathbb{C}$ に延長できるが、設問は $|t| < 1$ の証明で十分である。

(v) Hermite 微分方程式と λ

母関数を $G(z, t) = e^{-t^2 - 2zt} = \sum_{n \geq 0} f_n(z) t^n / n!$ とする。直接微分すると

$$G_z = -2tG, \quad G_{zz} = 4t^2G, \quad G_t = (-2t - 2z)G.$$

従って

$$G_{zz} - 2zG_z = 4t^2G + 4ztG = -2tG_t.$$

両辺を t の冪級数として比較すると

$$\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} (f_n'' - 2zf_n') = -2 \sum_{n \geq 0} \frac{nt^n}{n!} f_n.$$

よって各 n について

$$\boxed{f_n''(z) - 2zf_n'(z) + 2nf_n(z) = 0}.$$

原題の $f_n'' - 2zf_n' + \lambda f_n = 0$ と比較して

答 $\boxed{\lambda = 2n}$ 。

検算・参考事項

- 2007 年度の Gauss 積分は $I'(p) = -2pI(p)$ と $I(0) = \sqrt{\pi}$ から検算可能。
- 2008 年度の SO(3) では「直交行列」と「 $\det = 1$ の直交行列」を区別することが重要。
- Hermite 多項式の符号は定義次第で変わる。原題の f_n は $f_1 = -2x$ である。

数学 | 年度別問題

2007 年度

出題テーマ / 編集上の分類

回転・Vandermonde／複素解析

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2007年度

回転行列・Vandermonde 行列式 / 複素解析

出典：既刊数学編 2007・2008年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

第 1 問

正方行列 A に対して、 $U^{-1}AU$ が対角行列になるようなユニタリ行列 U が存在するためには、 A が正規行列であることが必要十分である。正規行列とは、 $A^*A = AA^*$ を満たす行列であり、 A^* は行列 A を転置し複素共役をとった行列である。実ユニタリ行列を直交行列と呼ぶ。以下の設問に答えよ。

1. 行列

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

は直交行列であることを示せ。ここで、 θ は実数。

2. 任意の正方行列
- A
- について、

$$\exp A \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$$

は収束し、 $\exp A$ を定義することができる。ただし、 A^0 は単位行列とする。 $A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ のとき、

$$\exp A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = B$$

を示せ。

3. 行列
- B
- を対角化せよ。

次に、一般の次元をもつ行列の例として、変数の組 $\{x_1, \dots, x_n\}$ について

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

を考えよう。

4. $|C| \propto \prod_{i < j} (x_j - x_i)$ を示せ。ここで $|C|$ は行列 C の行列式。
5. この結果を用いて、上記の行列 C が正則である（逆行列をもつ）のはどのような場合かを述べよ。

第 2 問

二つの実変数 x, y の実関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ は至るところで有限な値を持ち、任意回微分可能で、さらに関係式

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (1)$$

を満たしているものとする。

1. 以下の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

2. ストークスの定理は、微分可能なベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の、閉曲線 C を一周する線積分と、 C を縁とする面 S 上の面積分との関係を表し、次式で与えられる。

$$\oint_C \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \iint_S [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS. \quad (3)$$

ただし、ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ は、面 S 上の点 $\mathbf{x}$ におけるこの面の法線ベクトルである。この定理を用いて、 xy 平面上の任意の閉じた経路 C に関する線積分に対して、以下の二式が成り立つことを示せ。

$$\oint_C [u(x, y)dx - v(x, y)dy] = 0, \quad \oint_C [u(x, y)dy + v(x, y)dx] = 0. \quad (4)$$

3. i を虚数単位とし、複素数 z を $z = x + iy$ によって定義する。また、複素関数 $f(z)$ は実関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ を用いて、 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ のように表されるものとする。式 (4) が成り立っているとき、複素平面上の任意の閉じた経路 C に関する線積分に対して、以下の等式が成り立つことを示せ。

$$\oint_C f(z)dz = 0. \quad (5)$$

4. 複素関数 $f(z)$ の例として、 $f(z) = e^{-z^2}$ を考える。
 $f(x + iy)$ の実部を $u(x, y)$, 虚部を $v(x, y)$ としたとき、式 (1) が成り立つことを示せ。
5. 以上の結果を用いて、実数 p に対して、定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2px) dx \quad (6)$$

を求めよ。ただし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (7)$$

となることは既知としてよい。

1 2007 年度 第 1 問 | 回転行列と Vandermonde 行列式

前半の行列を

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

とする。 $\theta \in \mathbb{R}$ である。

1. 行列 B が直交行列であること

$c = \cos \theta, s = \sin \theta$ と置くと、

$$B^T B = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 + s^2 & 0 \\ 0 & c^2 + s^2 \end{pmatrix} = I_2.$$

従って $B^{-1} = B^T$ 。さらに $\det B = c^2 + s^2 = 1$ であり、鏡映を含まない回転行列である。

答 $\boxed{B^T B = I_2}$ 。

2. 行列指数の収束と $e^A = B$

任意の正方行列 A に対し、劣乗法的な行列ノルムをとれば

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\| \frac{A^m}{m!} \right\| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|A\|^m}{m!} = e^{\|A\|} < \infty.$$

よって e^A は絶対収束して定義できる。ここで

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = -I_2, \quad A = \theta J.$$

偶数項と奇数項をまとめると

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} I_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} J \\ &= \cos \theta I_2 + \sin \theta J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

答 $\boxed{e^A = B}$ 。

3. 行列 B の対角化

B の固有方程式は

$$\det(B - \lambda I_2) = (c - \lambda)^2 + s^2 = \lambda^2 - 2c\lambda + 1 = 0.$$

従って固有値は $\lambda_+ = e^{i\theta}$, $\lambda_- = e^{-i\theta}$ 。それぞれに対応する規格化固有ベクトルを

$$v_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad v_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

ととれる。 $U = (v_+, v_-)$ はユニタリ行列で、

$$U^\dagger B U = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

$\sin \theta = 0$ の場合には固有値が重複するが $B = \pm I_2$ であり、上の表示はなお成立する。

4. Vandermonde 行列式の公式

n 次の行列 $C_n = (x_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ の行列式を D_n とする。 D_n を変数 x_n の多項式と見る。もし $x_n = x_j$ ($j < n$) なら第 n 列と第 j 列が一致するので $D_n = 0$ 。従って

$$D_n = K(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j).$$

x_n の最高次係数は最終行・最終列による余因子展開から D_{n-1} に等しい。よって $K = D_{n-1}$ 。 $D_1 = 1$ から帰納法により

$$\det C_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

符号は、 $n = 2$ で $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1$ と一致する。

5. Vandermonde 行列の正則条件

前問の積が非零であることと、どの二つの x_i, x_j も一致しないことは同値。

答 C が正則 $\iff x_i \neq x_j \quad (i \neq j)$ 。

2 2007 年度 第 2 問 | 正則関数・調和関数・複素積分

原題の条件は

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (\text{CR})$$

である。添字は偏微分を表す。

1. u, v が Laplace 方程式を満たすこと

混合微分が交換できることを用いて

$$u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

同様に

$$v_{xx} + v_{yy} = (-u_y)_x + (u_x)_y = -u_{yx} + u_{xy} = 0.$$

答 $\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0$ 。

2. 閉曲線上の二つの線積分

xy 平面に Stokes (Green) の定理を適用する。第一の積分はベクトル場 $(P, Q) = (u, -v)$ に対し

$$\oint_C (u \, dx - v \, dy) = \iint_S \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \iint_S (-v_x - u_y) dx dy = 0.$$

第二の積分は $(P, Q) = (v, u)$ として

$$\oint_C (v \, dx + u \, dy) = \iint_S (u_x - v_y) dx dy = 0.$$

両方とも (CR) により被積分関数が零である。

3. 正則関数の閉曲線積分

$z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおけば、

$$f(z) \, dz = (u + iv)(dx + i \, dy) = (u \, dx - v \, dy) + i(v \, dx + u \, dy).$$

実部・虚部の線積分はともに第 2 問で零。従って

答 $\oint_C f(z) \, dz = 0$ 。

4. $f(z) = e^{-z^2}$ の実部と虚部・(CR) の確認

$z = x + iy$ に対して $-z^2 = -x^2 + y^2 - 2ixy$ 。よって

$$u(x, y) = e^{-x^2+y^2} \cos(2xy), \quad v(x, y) = -e^{-x^2+y^2} \sin(2xy).$$

$E = e^{-x^2+y^2}$, $c = \cos(2xy)$, $s = \sin(2xy)$ とおくと

$$\begin{aligned} u_x &= E(-2xc - 2ys), & v_y &= E(-2xc - 2ys), \\ u_y &= E(2yc - 2xs), & -v_x &= E(2yc - 2xs). \end{aligned}$$

従って (CR) が直接確かめられる。もちろん指数関数が整関数であることから従う。

5. Gaussian の Fourier 積分

求める積分を $I(p)$ と書く：

$$I(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2px) \, dx, \quad p \in \mathbb{R}.$$

被積分関数の奇部分が消えるので

$$I(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{2ipx} \, dx = e^{-p^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-ip)^2} \, dx.$$

$f(z) = e^{-z^2}$ は整関数である。実軸と $\operatorname{Im} z = -p$ の水平線を長方形でつなぎ、第 3 問の閉曲線積分零を用いる。幅 $2R$ の縦辺について、 $|y| \leq |p|$ なら

$$|e^{-(\pm R+iy)^2}| = e^{-R^2+y^2} \leq e^{-R^2+p^2}$$

であるから、縦辺の寄与は $R \rightarrow \infty$ で消える。よって積分経路を水平に移動でき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-ip)^2} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

答 $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2px) \, dx = \sqrt{\pi} e^{-p^2}}.$

別解 (検算) 微分と部分積分から

$$I'(p) = -2 \int x e^{-x^2} \sin(2px) \, dx = -2pI(p), \quad I(0) = \sqrt{\pi},$$

なので、同じ結果を得る。

数学 | 年度別問題

2006 年度

出題テーマ / 編集上の分類

スペクトル分解／変分法

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2006年度

スペクトル分解 / 変分法と極小曲面

出典：既刊数学編 2005・2006年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

数 学

第1問

複素数を成分とする n 行 1 列 ($n \geq 1$) の縦ベクトル全体の集合 $\mathbb{C}^n$ は、 n 次元の複素線形空間をなす。2つのベクトル $x, y \in \mathbb{C}^n$ について、その内積 (x, y) を、 $(x, y) \equiv x^\dagger y$ にて定義する。ただし、 $x^\dagger$ は x のエルミート共役 (転置の複素共役) を表す。 $\|x\| \equiv \sqrt{(x, x)}$ を x のノルムと言う。 A を n 行 n 列のエルミート行列とし、その固有値はどれも縮退がないとする。固有値 a に対応する (属する) 規格化された固有ベクトルを u_a と記す。即ち、

$$Au_a = au_a, \quad (u_a, u_{a'}) = \delta_{a,a'}.$$

固有値 a は全て実数である。また、全ての a について u_a を集めた集合 $\{u_a\}$ は、 $\mathbb{C}^n$ の正規直交完全系を成す。以下の設問に答えよ。

(i) 各固有値 a ごとに、次の行列を定義する：

$$P(a) \equiv u_a u_a^\dagger.$$

このとき、次の等式が成り立つことを示せ：

$$P(a)P(a') = \delta_{a,a'}P(a).$$

(ii) 適当に選んだベクトル x について、もしも $P(a)x$ がゼロベクトルでなければ、 $P(a)x$ は固有値 a に対する A の固有ベクトルであることを示せ。

(iii) 次の等式を示せ：

$$A = \sum_a aP(a).$$

即ち、任意の $x \in \mathbb{C}^n$ について、 $Ax = \sum_a aP(a)x$ を示せ。

(iv) 固有値 a の全てについて定義された関数 $f(a)$ を用いて、次の行列 $f(A)$ を定義する：

$$f(A) \equiv \sum_a f(a)P(a).$$

$f(A)$ の固有値と固有ベクトルが、それぞれ $f(a), u_a$ で与えられることを示せ。

(v) A の最小固有値を a_0 とする。適当に選んだベクトル x について、 $P(a_0)x$ がゼロベクトルでなかったとする。このとき、

$$v \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-At}x}{\|e^{-At}x\|}$$

とおくと、 v が a_0 に対応する固有ベクトルであることを示せ。ただし、 t を任意の実数として、 $f(a) = e^{-at}$ と選んだ場合の $f(A)$ を e^{-At} と記した。

第 2 問

以下の積分を考える。

$$S = \int_{x_0}^{x_1} F(y(x), y'(x)) dx. \quad (1)$$

ここで、 $y'(x) \equiv dy(x)/dx$ である。また、 $F(y, y')$ および $y(x)$ は、いずれの変数についても何回でも微分可能な連続かつ一価な関数とする。さらに、曲線 $y = y(x)$ の端点は、 $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ のように固定されているものとする。以下の設問に答えよ。

(i) 積分 S が曲線 $y = y(x)$ の変化に対して極値をとるための十分条件となる微分方程式を、関数 $y(x)$ の微小変分 $\delta y(x)$ を考える事で導出せよ。

(ii) 設問 (i) で求めた微分方程式は、

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C,$$

に変形できることを示せ。ここで、 C は定数である。

(iii) 曲線 $y = y(x)$ の両端点が $x_1 > x_0 > 0$, $y_1 > 0$, $y_0 > 0$ を満たすとする。この曲線を x 軸のまわりに 360° 回転して得られる回転面を考え、その表面積を (1) 式の形の積分を用いて表せ。

(iv) 設問 (iii) で得られた表面積を最小にする曲線 $y = y(x)$ が満たす微分方程式を導け。

(v) 設問 (iv) で得られた微分方程式を解き、曲線 $y(x)$ を求めよ。

3 2006 年度第 1 問：スペクトル分解と行列関数

原題の記法に従い、 $A = A^\dagger$ は Hermite 行列で、 $(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_{a'}) = \delta_{aa'}$ を満たす正規直交固有ベクトルを持つ。射影行列を $P(a) = \mathbf{u}_a \mathbf{u}_a^\dagger$ とする。

3.1 (i) 射影行列の積

$$\begin{aligned} P(a)P(a') &= \mathbf{u}_a(\mathbf{u}_a^\dagger \mathbf{u}_{a'})\mathbf{u}_{a'}^\dagger = \delta_{aa'}\mathbf{u}_a\mathbf{u}_{a'}^\dagger \\ &= \boxed{\delta_{aa'}P(a)}. \end{aligned}$$

特に $P(a)^2 = P(a)$ 、 $P(a)^\dagger = P(a)$ であり、直交射影行列である。

3.2 (ii) 射影されたベクトルは固有ベクトル

$A\mathbf{u}_a = a\mathbf{u}_a$ より

$$AP(a)\mathbf{x} = A\mathbf{u}_a(\mathbf{u}_a^\dagger \mathbf{x}) = aP(a)\mathbf{x}.$$

よって $P(a)\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ のとき

$$\boxed{A[P(a)\mathbf{x}] = a[P(a)\mathbf{x}]}$$

が成立する。

3.3 (iii) Hermite 行列のスペクトル分解

固有ベクトルが完全系であるから

$$I = \sum_a \mathbf{u}_a \mathbf{u}_a^\dagger = \sum_a P(a).$$

任意の $\mathbf{x}$ について

$$A\mathbf{x} = \sum_a AP(a)\mathbf{x} = \sum_a aP(a)\mathbf{x}.$$

従って行列として

$$\boxed{A = \sum_a aP(a)}.$$

3.4 (iv) 関数演算 $f(A)$ の固有値

定義 $f(A) = \sum_a f(a)P(a)$ を作用させると

$$f(A)\mathbf{u}_b = \sum_a f(a)P(a)\mathbf{u}_b = f(b)\mathbf{u}_b.$$

従って同じ固有ベクトル $\mathbf{u}_b$ に対応する固有値は $\boxed{f(b)}$ である。異なる b で $f(b)$ が等しくなった場合には、 $f(A)$ で縮退が起こり得る。

3.5 (v) 指数行列による最小固有値の抽出

最小固有値を a_0 とし、 $P(a_0)x \neq 0$ とする。 $x = \sum_a P(a)x$ に対し

$$e^{-At}x = \sum_a e^{-at}P(a)x = e^{-a_0t} \left[P(a_0)x + \sum_{a>a_0} e^{-(a-a_0)t} P(a)x \right].$$

従って $t \rightarrow \infty$ で括弧内は $P(a_0)x$ に収束する。正の全体係数 e^{-a_0t} は正規化で消えるので

$$\boxed{v = \frac{P(a_0)x}{\|P(a_0)x\|}}, \quad Av = a_0v.$$

最小固有値に縮退があっても、 $P(a_0)$ をその固有空間全体への射影と読めば同じ結論になる。

4 2006 年度第 2 問：変分法と回転極小曲面

汎関数 $S[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y') \, dx$ に対し、原題の固定端点条件 $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$ を用いる。

4.1 (i) Euler-Lagrange 方程式

変分 $y \mapsto y + \varepsilon \eta$ に対し

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{x_0}^{x_1} (F_y \eta + F_{y'} \eta') \, dx \\ &= [F_{y'} \eta]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \eta \, dx. \end{aligned}$$

端点項はゼロであり、任意の η に対する停留条件から

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0}$$

を得る。

4.2 (ii) 第一積分 (Beltrami の恒等式)

F は x に陽に依存しないから

$$\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = F_y y' + F_{y'} y'' - y'' F_{y'} - y' \frac{d}{dx} F_{y'} = y' \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) = 0.$$

従って

$$\boxed{F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C}$$

である。

4.3 (iii) 回転面の面積汎関数

曲線上の微小線素は $ds = \sqrt{1 + y'^2} \, dx$ であり、回転半径は $y(x) > 0$ だから、微小面積は $dA = 2\pi y \, ds$ となる。したがって

$$\boxed{S[y] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \, dx}, \quad F(y, y') = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}.$$

4.4 (iv) 表面積の停留条件

上の F で

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2\pi \sqrt{1 + y'^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2\pi y y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

従って Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) - \sqrt{1 + y'^2} = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{yy'' = 1 + y'^2}.$$

第一積分の方を用いると、定数 $a > 0$ で

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = a.$$

これは上の 2 階方程式を積分した形である。

4.5 (v) 懸垂線型の解と境界条件

$y/\sqrt{1+y'^2} = a$ から $y'^2 = (y/a)^2 - 1$ 。積分すれば

$$\operatorname{arcosh}(y/a) = \pm \frac{x-b}{a}$$

となるので、停留曲線の一般形は

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

原題の固定端点条件から定数 a, b は

$$y_0 = a \cosh((x_0 - b)/a), \quad y_1 = a \cosh((x_1 - b)/a)$$

を満たすように決める。回転させた曲面は**懸垂面 (catenoid)** である。

存在・安定性に関する注意：この二つの境界方程式が常に解けるとは限らない。また解けても、第一変分がゼロであるということだけから大域的最小面積とは結論できない。第 2 変分や他の許容曲面との比較が必要となる。設問 (v) への答えは停留解の導出と境界条件までであり、その先の安定性は問題設定だけでは決まらない。

数学 | 年度別問題

2005年度

出題テーマ / 編集上の分類

ユニタリ行列／Fokker-Planck

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2005年度

ユニタリ行列 / Fokker-Planck 方程式

出典：既刊数学編 2005・2006年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

数 学

第1問

- (1) n 個の n 次元列ベクトル $\mathbf{u}_j (j = 1, \dots, n)$ を用いて, 行列 U を $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ で定義するとき, U がユニタリ行列ならば, $\{\mathbf{u}_j\}$ は正規直交系をなすことを示せ。
- (2) A を実対称行列, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ を n 次元ベクトルとする。ただし, T は転置を表す。このとき実2次形式 $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ に対し適当な直交変換 $\mathbf{x} = P \mathbf{y}$ を行くと, 対角行列 B を用いて $\phi = \mathbf{y}^T B \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ の標準形に変換できる。
 $\phi(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_3x_1$ について $A, P, \lambda_i (i = 1, 2, 3)$ を求め標準形で表わせ。
- (3) A を n 次実対称行列として, 次の微分方程式を考える。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

このとき, スカラー関数 $\Phi(\mathbf{x})$ を用いて $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x})$ と書けることを $\Phi(\mathbf{x})$ の具体形とともに示せ。ただし, $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt})^T$, $\nabla_{\mathbf{x}}\Phi = (\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n})^T$ である。

- (4) 設問(3)で軌道 $\mathbf{x}(t)$ に沿った Φ の微分 $d\Phi(\mathbf{x}(t))/dt$ は, $\frac{d\Phi(\mathbf{x}(t))}{dt} \leq 0$ を満たすことを示せ。また, 任意の $\mathbf{x}(\mathbf{x} \neq 0)$ に対し $\Phi > 0$ が成り立つならば, 解軌道は最終的に $\mathbf{x} = 0$ に漸近することを示せ。

第2問

$f(x, t)$ についての偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(xf) + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

を考える。 f および $\partial f / \partial x$ は、 $x \rightarrow \pm\infty$ に対して十分速やかに 0 に収束する。また、 D は正の定数とする。

(1) x についての f の定積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx$$

が保存されること、すなわち $dI/dt = 0$ であることを示せ。

(2) 原点 $x = 0$ を中心とするガウス分布関数

$$g(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \quad (\sigma \text{ は正の定数})$$

が、はじめの偏微分方程式の定常解（すなわち、 $\partial f / \partial t = 0$ ）であるとき、 σ はどう表せるか。

(3) 中心 $X(t)$ 、標準偏差 $\sigma(t)$ (X および σ は t の関数) のガウス分布関数

$$f(x, t) = g(x - X(t), \sigma(t))$$

が、はじめの偏微分方程式の解になるために、 $X(t)$ および $\sigma(t)$ の満たすべき常微分方程式を求めよ。

(4) はじめの偏微分方程式を、初期条件 $f(x, 0) = \delta(x - 1)$ のもとで解き、 $t \rightarrow \infty$ において設問 (2) で求めた定常解に近づくことを示せ。(デルタ関数 $\delta(x - 1)$ は、 $g(x - 1, \sigma)$ の $\sigma \rightarrow 0$ の極限であることを考慮せよ。)

解答編

記法： A^T は転置、 $A^\dagger$ は共役転置、 ∇ は勾配、 δ は Dirac デルタ分布を表す。各節では原題に従って番号を付した。

1 2005 年度第 1 問：線形代数と勾配流

1.1 (1) ユニタリ行列と正規直交系

$U = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ と書けば、ユニタリ性は $U^\dagger U = I_n$ である。この (i, j) 成分は

$$(U^\dagger U)_{ij} = \mathbf{u}_i^\dagger \mathbf{u}_j = \sum_{k=1}^n \overline{(u_i)_k} (u_j)_k.$$

したがって

$$\boxed{\mathbf{u}_i^\dagger \mathbf{u}_j = \delta_{ij}}$$

であり、各列ベクトルのノルムは 1、異なる列は直交する。列が n 個あるので $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底でもある。

1.2 (2) 二次形式の直交対角化

原題の二次形式を $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ とおくと

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

特性多項式を求めると

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5).$$

対応する正規直交固有ベクトルの一組は

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって

$$\boxed{P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3), \quad P^T A P = \text{diag}(1, 2, 5)}.$$

$\mathbf{x} = P \mathbf{y}$ とすれば

$$\boxed{\phi = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2}.$$

固有ベクトルの符号、順序は一意ではない。上記は一つの正しい選択である。

1.3 (3) 線形方程式の勾配流表示

A は実対称なので、スカラー関数

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\top}A\boldsymbol{x}$$

の勾配は

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi = -\frac{1}{2}(A + A^{\top})\boldsymbol{x} = -A\boldsymbol{x}.$$

従って原題の $d\boldsymbol{x}/dt = A\boldsymbol{x}$ は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = -\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x})$$

と表される。

1.4 (4) Lyapunov 関数と原点への漸近収束

任意の解軌道について連鎖律より

$$\frac{d}{dt}\Phi(\boldsymbol{x}(t)) = \nabla\Phi \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = -\|\nabla\Phi\|^2 = -\|A\boldsymbol{x}\|^2 \leq 0.$$

次に、 $\Phi(\boldsymbol{x}) > 0$ がすべての $\boldsymbol{x} \neq 0$ に対し成立するとする。このとき $-A$ は正定値であり、対称行列 A の固有値はすべて負である。 $A = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Q^{\top}$ と直交対角化すると

$$\boldsymbol{x}(t) = Q \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) Q^{\top} \boldsymbol{x}(0).$$

全ての $\lambda_j < 0$ だから、 $t \rightarrow \infty$ において

$$\boldsymbol{x}(t) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

注意：これは (2) の具体的な正定値行列 A について原点収束を主張するものではない。(3) - (4) では一般の実対称行列 A を考えており、(4) の追加仮定 $\Phi > 0$ の下で収束が成立する。

2 2005 年度第 2 問 : Ornstein-Uhlenbeck 型の拡散

出題された方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(xf) + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad D > 0. \quad (2005-2)$$

これは、ドリフト速度 $-x$ と拡散係数 D を持つ Fokker-Planck 方程式である。

2.1 (1) 全質量の保存

$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) \, dx$ に対し、仮定された十分速い減衰を用いて

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x}(xf) + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] dx \\ &= \left[xf + D \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

すなわち $I(t) = I(0)$ である。

2.2 (2) 定常 Gaussian の幅

与えられた密度

$$g(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

の微分は

$$g_x = -\frac{x}{\sigma^2}g, \quad xg + Dg_x = xg \left(1 - \frac{D}{\sigma^2}\right).$$

正規化可能な定常状態では確率流 $-(xg + Dg_x)$ が無限遠でゼロになる。従って $xg + Dg_x = 0$ となるためには

$$\sigma^2 = D, \quad \sigma = \sqrt{D}$$

である。

2.3 (3) Gaussian 解の中心と分散の運動方程式

$u = x - X(t)$ と置き、

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2(t)}\right]$$

を代入する。対数微分は

$$\frac{f_t}{f} = -\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{u\dot{X}}{\sigma^2} + \frac{u^2\dot{\sigma}}{\sigma^3}, \quad \frac{f_x}{f} = -\frac{u}{\sigma^2}, \quad \frac{f_{xx}}{f} = \frac{u^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2}.$$

原方程式右辺を f で割ると

$$1 - \frac{(u + X)u}{\sigma^2} + D \left(\frac{u^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} \right).$$

u の 1 次係数と 2 次係数を比較して

$$\dot{X} = -X, \quad \dot{\sigma} = \frac{D}{\sigma} - \sigma$$

を得る。同値な分散の方程式は

$$\frac{d}{dt}\sigma^2 = 2(D - \sigma^2).$$

従って一般に

$$X(t) = X_0 e^{-t}, \quad \sigma^2(t) = D + (\sigma_0^2 - D)e^{-2t}.$$

2.4 (4) デルタ初期条件からの解と定常状態への収束

$f(x, 0) = \delta(x - 1)$ を幅ゼロの Gaussian の極限と考えれば $X_0 = 1$, $\sigma_0^2 = 0$ である。従って $t > 0$ に対し

$$f(x, t) = \frac{\exp\left[-\frac{(x - e^{-t})^2}{2D(1 - e^{-2t})}\right]}{\sqrt{2\pi D(1 - e^{-2t})}}.$$

$t \downarrow 0$ でこれは分布の意味で $\delta(x - 1)$ に収束する。また

$$X(t) \rightarrow 0, \quad \sigma^2(t) \rightarrow D \quad (t \rightarrow \infty),$$

より、密度は定常分布

$$f_{\infty}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left(-\frac{x^2}{2D}\right)$$

へ収束する。

数学 | 年度別問題

2004年度

出題テーマ / 編集上の分類

多項式の線形写像／熱方程式

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2004年度

多項式の線形写像 / 熱方程式

出典：既刊数学編 2003・2004年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

数学

[第1問]

変数 x についての2次以下の次数の多項式のなす線形空間を V とする。

線形写像 $F: V \rightarrow V$ を以下のように定める。

$$\text{任意の } p(x) \in V \text{ に対して } F(p(x)) = p(ax+b).$$

ここで a, b は定数で、 $a \neq 1$ とする。以下の問に答えよ。

(1) $F(x^2 + x + 1)$ を求めよ。

(2) V の基底を $e_0(x) = 1, e_1(x) = x, e_2(x) = x^2$ と選ぶ。このとき F の表現行列 M , すなわち

$$(F(e_0(x)), F(e_1(x)), F(e_2(x))) = (e_0(x), e_1(x), e_2(x))M$$

となる行列 M を求めよ。

(3) 線形写像 F の固有値, 固有ベクトルを求めよ。

(4) 任意の自然数 k について, F を $e_1(x)$ に k 回作用させて得られる V の元を求めよ。

(5) 任意の自然数 k について, F を $e_2(x)$ に k 回作用させて得られる V の元を求めよ。

[第2問]

(1) $u_k(x, t) = e^{ikx + i\omega t}$ とおく。 $u = u_k(x, t)$ が、次の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を満たすように ω を定めよ。ただし、 a を正の定数、 x および t は実数とする。

(2) (1) で得られた $u_k(x, t)$ を用いて、上の偏微分方程式の解を

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k u_k(x, t) dk$$

とおく。与えられた関数 $f(x)$ に対し、初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ を満たすように A_k を $f(x)$ を用いて表わせ。ただし、 k についての積分は実行しなくてよい。

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e^{-a^2 k^2 t} dk$ を求めよ。ただし、 y は定数で、 $t > 0$ とする。

(4) (3) の結果を用いて (2) の k についての積分を実行し、初期値問題の解 $u(x, t)$ を求めよ。

(5) $f(x)$ が次のように与えられているとする。

$$f(x) = \begin{cases} U & \text{if } |x| \leq L \\ 0 & \text{if } |x| > L \end{cases}$$

ただし、 U と $L(>0)$ は定数とする。このとき、 $u(x, t)$ を $\operatorname{erf}(z)$ を用いて表わせ。ここで、すべての実数 z について

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy$$

と定義する。

3 2004 年度第 1 問 | 多項式の線形写像

設定 $V = \{p \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq 2\}$ 、

$$(Fp)(x) = p(ax + b), \quad a \neq 1. \quad (27)$$

なお $a = 0, -1$ は問題の仮定から除外されない。

3.1 (1) 具体的な多項式の像

x を $ax + b$ で置換して展開すれば

$$F(x^2 + x + 1) = (ax + b)^2 + (ax + b) + 1 = a^2x^2 + a(2b + 1)x + b^2 + b + 1. \quad (28)$$

3.2 (2) 基底 $(1, x, x^2)$ での表現行列

$$F(1) = 1, \quad F(x) = b + ax, \quad F(x^2) = b^2 + 2abx + a^2x^2. \quad (29)$$

像の係数を列に並べ、

$$M = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & a & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

3.3 (3) 固有値と固有多項式

M は上三角行列なので固有値は

$$\{1, a, a^2\} \quad (\text{重複する場合を含む}). \quad (31)$$

一次写像 $x \mapsto ax + b$ の不動点は

$$s = \frac{b}{1-a}, \quad as + b = s. \quad (32)$$

$q = x - s$ とすると $F(q) = aq$ 。したがって

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - s, \quad p_2(x) = (x - s)^2 \quad (33)$$

はそれぞれ $1, a, a^2$ に属する固有多項式であり、これらは任意の $a \neq 1$ で V の基底をなす。 $a = -1$ のとき $1 = a^2$ 、 $a = 0$ のとき $a = a^2 = 0$ と固有値が重複するが、依然としてこの基底によって対角化できる。

3.4 (4) x への k 回作用

$x = s + (x - s)$ と分解すれば、 $F^k(1) = 1$, $F^k(x - s) = a^k(x - s)$ より

$$F^k(x) = s + a^k(x - s) = a^kx + \frac{b(1 - a^k)}{1 - a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

ここで $a^0 = 1$ と定める ($a = 0, k = 0$ を含む)。

3.5 (5) x^2 への k 回作用

$x^2 = [s + (x - s)]^2$ の固有多項式への分解を使うと

$$F^k(x^2) = s^2 + 2sa^k(x - s) + a^{2k}(x - s)^2. \quad (35)$$

同値な形として

$$F^k(x^2) = \left[a^kx + \frac{b(1 - a^k)}{1 - a} \right]^2. \quad (36)$$

確かに $F^k p(x) = p(s + a^k(x - s))$ が任意の $p \in V$ について成り立つので、両表式は一致する。

学習の要点

行列 M を機械的に累乗するより、写像の不動点 s に座標原点を移すと対角形がただちに得られる。物理では線形変換の反復や繰り込み変換の理解にも通じる考え方である。

4 2004 年度第 2 問 | 熱方程式と誤差関数

設定 $a > 0$ とし、実数 k と時刻 $t \geq 0$ を考える。

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x). \quad (37)$$

4.1 (1) 平面波の時間因子

$u_k = e^{ikx + i\omega t}$ を代入すると

$$i\omega u_k = -a^2 k^2 u_k \Rightarrow \boxed{\omega = ia^2 k^2}. \quad (38)$$

従って $u_k = e^{ikx - a^2 k^2 t}$ 。 $t > 0$ では高波数ほど速く減衰する。

4.2 (2) Fourier 振幅 A_k

解を $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k e^{ikx - a^2 k^2 t} dk$ とすると、 $t = 0$ で

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k e^{ikx} dk. \quad (39)$$

Fourier 逆変換の規約により

$$\boxed{A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iky} dy}. \quad (40)$$

ここは原題の k 積分に 2π 因子が付いていないことに注意する。

4.3 (3) Gaussian の Fourier 積分

平方完成（または既知の Gaussian 積分の Fourier 変換）で、 $t > 0$ について

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{iky - a^2 k^2 t} dk = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4a^2 t}\right)}. \quad (41)$$

$a > 0$ なので平方根の枝は正値とする。

4.4 (4) 任意の初期値の解

(2) を解の Fourier 積分に代入し、十分な可積分性のある f について積分順序を交換する。内側の k 積分を (3) によって評価すると

$$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right] f(y) dy, \quad t > 0.} \quad (42)$$

これが熱核 $K_t(x-y)$ による畳み込み表示である。初期時刻 $t \downarrow 0$ では K_t はデルタ関数の近似単位をなす。従って f が連続な点では $u(x, t) \rightarrow f(x)$ であり、跳躍点では左右極限の平均に近づく。

4.5 (5) 区間状の初期値

$f(y) = U$ ($|y| \leq L$)、それ以外で 0 の場合

$$u(x, t) = \frac{U}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-L}^L \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right] dy. \quad (43)$$

$s = (y-x)/(2a\sqrt{t})$ と置いて積分すると

$$\boxed{u(x, t) = \frac{U}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{L-x}{2a\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{L+x}{2a\sqrt{t}}\right) \right], \quad t > 0.} \quad (44)$$

$t \downarrow 0$ で $|x| < L$ なら $u \rightarrow U$ 、 $|x| > L$ なら $u \rightarrow 0$ 。境界 $x = \pm L$ では $u \rightarrow U/2$ となる。原題の初期値は境界にも U と指定するが、熱核による弱い（または L^p ）初期値実現では、単一の点の値は解に影響しない。この境界での微妙な相違も区別しておく。

学習の要点

熱方程式を Fourier 空間で常微分方程式にし、Gaussian 核で実空間へ戻す流れは、拡散・確率過程・統計物理に共通する。係数と 2π の規約を取り違えないことが重要である。

数学 | 年度別問題

2003年度

出題テーマ / 編集上の分類

外積・回転／球対称波動

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2003年度

外積と回転 / 球対称波動方程式

出典：既刊数学編 2003・2004年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

数学

[第1問]

定数ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を用いた微分方程式

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \vec{v} \times \vec{x}$$

を考える。

(1) 上の方程式を行列 A を用いて

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A \cdot \vec{x}$$

という形に書き換える。行列 A を求めよ。

(2) 次の性質を持つ正規直交基底 $\vec{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) ($\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$) と係数 λ ($\lambda > 0$) を求めよ。

$$\vec{v} \times \vec{e}_1 = \lambda \vec{e}_2, \quad \vec{v} \times \vec{e}_2 = -\lambda \vec{e}_1, \quad \vec{v} \times \vec{e}_3 = 0$$

ただし $\vec{e}_1$ の第1成分は0とする。

(3) 上で得られた結果を用いると、行列 A は実直交行列 U を用いて

$$A = U \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^t, \quad UU^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とかけることを示せ(ただし U^t は U の転置行列)。また U を求めよ。

(4) $\vec{x}$ を基底 $\vec{e}_i$ を用いて

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 q_i(t) \vec{e}_i$$

と展開する。係数 $q_i(t)$ に対する微分方程式を書き下し、その一般解を求めよ。また解の振る舞いを定性的に論じよ。

数学

[第2問]

球対称の関数 $u(t, r)$ に対する波動方程式は、以下のように書くことができる:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

ここで、 r は動径座標、 t は時間座標、 c は速度の次元の定数である。以下の問に答えよ。

(1) 上の偏微分方程式の一般解を求めよ。なおここで一般解とは2個の任意関数であらわされた解を指す。

(2) 初期条件、 $t = 0$ で $u = e^{-r^2/(2r_0^2)}$ 、 $\partial u / \partial t = 0$ の場合の $t > 0$ に対する解を求めよ。ただし、 r_0 は波束の広がりであらわす実定数である。

(3) 初期条件、 $t = 0$ で $u = 0$ 、 $\partial u / \partial t = e^{-r^2/(2r_0^2)}$ の場合の $t > 0$ に対する解を求めよ。

(4) (3) で求めた関数を、時間に対してフーリエ変換せよ。ただしここでフーリエ変換は、

$$U(\omega, r) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, r) e^{i\omega t} dt$$

と定義する。

(5) $g(\omega) \equiv U(\omega, r = 0)$ は、 ω の関数である。 $g(\omega)$ が最大値となる ω の値を求めよ。

1 2003 年度第 1 問 | 外積と 3 次元の回転

設定 $\mathbf{v} = (2, 1, -1)^T$ とし、

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{x} \quad (1)$$

を考える。

1.1 (1) 行列表現

$\mathbf{v} \times (x, y, z)^T = (y + z, -x - 2z, -x + 2y)^T$ である。したがって、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}. \quad (2)$$

$A^T = -A$ は実反対称行列である。ゆえに $d(\mathbf{x}^T \mathbf{x})/dt = \mathbf{x}^T (A^T + A)\mathbf{x} = 0$ 、すなわち原点からの距離は不変である。

1.2 (2) 所定の正規直交基底

$\mathbf{v}$ の長さは $\lambda = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ 。第 1 成分が 0 という条件から

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \sqrt{6}. \quad (3)$$

実際に $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ であり、直接計算すると

$$\mathbf{v} \times \mathbf{e}_1 = \sqrt{6} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v} \times \mathbf{e}_2 = -\sqrt{6} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{v} \times \mathbf{e}_3 = 0. \quad (4)$$

$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ なので右手系をなす。符号を同時に変更する選択も可能である。

1.3 (3) 直交行列による標準形

上の基底を列に並べれば

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad U^T U = I. \quad (5)$$

$A\mathbf{e}_1 = \lambda \mathbf{e}_2, A\mathbf{e}_2 = -\lambda \mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_3 = 0$ より

$$A = U \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^T. \quad (6)$$

これは外積が、 $\mathbf{v}$ に垂直な平面内での回転の生成子となることを意味する。

1.4 (4) 一般解と幾何学的解釈

$\mathbf{x} = q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3$ とおくと

$$\dot{q}_1 = -\lambda q_2, \quad \dot{q}_2 = \lambda q_1, \quad \dot{q}_3 = 0. \quad (7)$$

初期値 $q_1(0) = \alpha, q_2(0) = \beta, q_3(0) = \gamma$ を用いて

$$q_1(t) = \alpha \cos(\lambda t) - \beta \sin(\lambda t), \quad (8)$$

$$q_2(t) = \alpha \sin(\lambda t) + \beta \cos(\lambda t), \quad (9)$$

$$q_3(t) = \gamma. \quad (10)$$

したがって $q_1^2 + q_2^2 = \alpha^2 + \beta^2$ は一定で、 q_3 も一定。解軌道は $\mathbf{v}$ 軸に垂直な平面内の円であり、角速度 $\lambda = \sqrt{6}$ 、周期 $2\pi/\sqrt{6}$ で回転する。 $\alpha = \beta = 0$ なら点は静止する。

別解として Rodrigues の公式を用い、 $K = A/\lambda$ と置けば

$$e^{tA} = I + \sin(\lambda t)K + \{1 - \cos(\lambda t)\}K^2, \quad (11)$$

ゆえに $\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}(0)$ と表せる。

2 2003 年度第 2 問 | 球対称波動と Fourier 変換

設定 $r > 0$ で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad c > 0, \quad (12)$$

$r_0 > 0$ とする。原点では u の有限な正則解を考える。

2.1 (1) 一般解

$w(t, r) = ru(t, r)$ とおくと

$$w_{tt} = c^2 w_{rr}. \quad (13)$$

これは 1 次元波動方程式だから、任意の 2 関数 F, G により

$$u(t, r) = \frac{F(r - ct) + G(r + ct)}{r} \quad (r > 0). \quad (14)$$

原点で正則にするためには、 $w(t, 0) = 0$ 、すなわち $F(-ct) + G(ct) = 0$ を課す。便利なのは初期値を奇関数として $r < 0$ に拡張する方法である。

2.2 (2) Gaussian 初期変位、初速度ゼロ

$u(0, r) = \phi(r) = e^{-r^2/(2r_0^2)}$, $u_t(0, r) = 0$ 。初期値 $w(0, r) = r\phi(r)$ は奇関数なので d'Alembert の公式から

$$w(t, r) = \frac{1}{2} \left[(r - ct)e^{-(r-ct)^2/(2r_0^2)} + (r + ct)e^{-(r+ct)^2/(2r_0^2)} \right]. \quad (15)$$

よって

$$u(t, r) = \frac{(r - ct)e^{-(r-ct)^2/(2r_0^2)} + (r + ct)e^{-(r+ct)^2/(2r_0^2)}}{2r}. \quad (16)$$

$\lim_{r \rightarrow 0} u(t, r)$ は有限で、具体的には

$$u(t, 0) = \left(1 - \frac{c^2 t^2}{r_0^2} \right) e^{-c^2 t^2/(2r_0^2)}. \quad (17)$$

$t = 0$ を代入すると、初期変位および初速度の両方が満たされる。

2.3 (3) 初期変位ゼロ、Gaussian 初速度

$u(0, r) = 0$, $u_t(0, r) = \phi(r)$ とする。 $w_t(0, r) = r\phi(r)$ なので

$$w(t, r) = \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} s e^{-s^2/(2r_0^2)} ds = \frac{r_0^2}{2c} \left[e^{-(r-ct)^2/(2r_0^2)} - e^{-(r+ct)^2/(2r_0^2)} \right]. \quad (18)$$

従って

$$u(t, r) = \frac{r_0^2}{2cr} \left[e^{-(r-ct)^2/(2r_0^2)} - e^{-(r+ct)^2/(2r_0^2)} \right]. \quad (19)$$

原点では連続延長により

$$u(t, 0) = t \exp\left(-\frac{c^2 t^2}{2r_0^2}\right). \quad (20)$$

原点の値は t の奇関数である点が、次の Fourier 変換で重要となる。

2.4 (4) 時間 Fourier 変換

問題の規約は $U(\omega, r) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, r) e^{i\omega t} dt$ 。標準 Gaussian 積分の平行移動により

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(r-ct)^2/(2r_0^2)} e^{i\omega t} dt = \frac{\sqrt{2\pi}r_0}{c} e^{-r_0^2\omega^2/(2c^2)} e^{i\omega r/c}. \quad (21)$$

もう一方の Gaussian では位相が $e^{-i\omega r/c}$ となる。差を取れば

$$U(\omega, r) = i \frac{\sqrt{2\pi}r_0^3}{c^2 r} \sin\left(\frac{\omega r}{c}\right) \exp\left(-\frac{r_0^2\omega^2}{2c^2}\right). \quad (22)$$

$r \rightarrow 0$ では $\sin(\omega r/c)/r \rightarrow \omega/c$ 。よって

$$g(\omega) = U(\omega, 0) = i \frac{\sqrt{2\pi}r_0^3}{c^3} \omega \exp\left(-\frac{r_0^2\omega^2}{2c^2}\right). \quad (23)$$

これは式(20)を直接変換しても得られる。時間領域で $u(t, 0)$ が奇関数だから、 g は純虚数かつ ω に関して奇関数となる。

2.5 (5) 周波数での極大

原題の解釈上の注意： $g(\omega)$ は複素数値なので、通常の実数のような大小比較は定義されない。「最大値」は振幅 $|g|$ または正の周波数側の虚部の極大と解釈する必要がある。

$$|g(\omega)| = \frac{\sqrt{2\pi}r_0^3}{c^3} |\omega| e^{-r_0^2\omega^2/(2c^2)}. \quad (24)$$

$\omega > 0$ で対数微分すると

$$\frac{d}{d\omega} \log |g(\omega)| = \frac{1}{\omega} - \frac{r_0^2}{c^2} \omega. \quad (25)$$

従って

$$|g| \text{ が最大} \iff \omega = \pm \frac{c}{r_0}. \quad \omega > 0 \text{ に限れば } \omega_{\max} = \frac{c}{r_0}. \quad (26)$$

最大振幅は $|g|_{\max} = \sqrt{2\pi} e^{-1/2} r_0^2/c^2$ 。虚部の最大値は正側の $\omega = c/r_0$ で得られる。

学習の要点

球対称 3 次元波動方程式を $w = ru$ により 1 次元化する手法は頻出の基本技法である。 $r = 0$ での正則条件を落とすと、物理的でない $1/r$ 型の特異解まで含めてしまうことに注意する。

数学 | 年度別問題

2002 年度

出題テーマ / 編集上の分類

実対称行列／Laplace方程式

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2002年度

実対称行列の変形 / Laplace 方程式

出典：既刊数学編 2001・2002年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

2002 年度 第1問

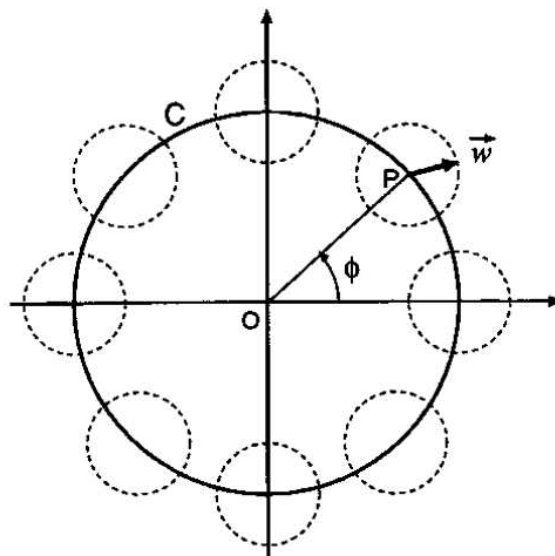
原題：H14math.pdf・2頁。原本を読みやすいように余白のみ切り取り、内容は改変していません。

数学

[第1問]

2×2 の実行列: $A = \begin{pmatrix} 1 - \gamma \cos 2\phi & -\gamma \sin 2\phi \\ -\gamma \sin 2\phi & 1 + \gamma \cos 2\phi \end{pmatrix}$ に関する以下の設問に答えよ。ただし、 $0 < \gamma < 1$ であるものとする。

- (i) 行列 A の固有値 λ_+ , λ_- を求めよ ($\lambda_+ > \lambda_-$ とする)。
- (ii) λ_+ と λ_- に対応する規格化された固有ベクトル $\vec{w}_+$, $\vec{w}_-$ を求めよ。
- (iii) $UAU^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix}$ のように A を対角化する行列 U を求めよ。
また、この行列 U が表す変換はどのような操作に対応しているか簡単に述べよ。
- (iv) 下図のように、単位円 C 上の点 $P(\cos \phi, \sin \phi)$ において上述の行列 A が定義されているものとし、この点 P を原点とした任意のベクトル $\vec{w}$ を点 P を原点としたベクトル $A\vec{w}$ へ変換する。この写像によって、図に点線で示された8つの円はどのように変形するか。答案用紙に簡単に図示して説明せよ。



2002年度 第2問

原題：H14math.pdf・3頁。原本を読みやすいように余白のみ切り取り、内容は改変していません。

数学

[第2問]

三次元ラプラス方程式は、極座標を用いて

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right) U(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (1)$$

$$\hat{L}^2 \equiv - \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \quad (2)$$

と表せる。また、球面調和関数 $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ は、

$$\hat{L}^2 Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (3)$$

を満たす ($\ell = 0, 1, 2, \dots$; $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$)。

- (i) ラプラス方程式の解 $U(r, \theta, \varphi)$ を $R_\ell(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ と変数分離したとき、 $R_\ell(r)$ の満たす微分方程式を求めよ。
- (ii) 設問(i)で得られた微分方程式から $R_\ell(r)$ の独立な二つの基本解 $A_\ell(r)$, $B_\ell(r)$ を求めよ。

$U(r, \theta, \varphi)$ に対する境界条件が球面上で与えられれば、設問(ii)で得られた $A_\ell(r)$ と $B_\ell(r)$ を用いて、

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [\alpha_{\ell m} A_\ell(r) + \beta_{\ell m} B_\ell(r)] Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (4)$$

と展開し、境界条件に合うような係数 $\alpha_{\ell m}, \beta_{\ell m}$ を持つ解を求めることができる。具体的に、 $r = a$ 及び b (ただし $b > a > 0$ とする) での境界条件が

$$U(a, \theta, \varphi) = 0, \quad U(b, \theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi \quad (5)$$

と与えられているとき、以下の問いに答えよ。

- (iii) $\sin \theta \cos \varphi$ を $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ を用いて表せ。

ただし、 $Y_{00}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$, $Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$ (複号同順), $Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$ を用いてよい。

- (iv) 境界条件(5)と $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ の直交条件

$$\int d\Omega Y_{\ell' m'}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell' \ell} \delta_{m' m} \quad (6)$$

から係数 $\alpha_{\ell m}, \beta_{\ell m}$ を決定せよ。

4 2002 年度・第 1 問：対称行列と幾何学的変形

原題の行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \gamma \cos 2\phi & -\gamma \sin 2\phi \\ -\gamma \sin 2\phi & 1 + \gamma \cos 2\phi \end{pmatrix}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

単位ベクトル

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$$

は互いに直交し、 $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}\}$ は正規直交基底です。

(i) 固有値

$$\operatorname{tr} A = 2, \quad \det A = 1 - \gamma^2 \text{ より}$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - \gamma^2.$$

したがって

$$\lambda_+ = 1 + \gamma, \quad \lambda_- = 1 - \gamma.$$

(ii) 規格化固有ベクトル

二倍角公式より

$$A = I - \gamma(2\mathbf{n}\mathbf{n}^T - I) = (1 - \gamma)\mathbf{n}\mathbf{n}^T + (1 + \gamma)\mathbf{t}\mathbf{t}^T.$$

よって

$$\mathbf{w}_- = \mathbf{n} = (\cos \phi, \sin \phi)^T, \quad \mathbf{w}_+ = \mathbf{t} = (-\sin \phi, \cos \phi)^T.$$

各固有ベクトルの符号を反転しても同じ固有空間を表します。

(iii) 直交対角化と座標変換

$$U = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

とすると $U^{-1} = U^T$ であり、

$$UAU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \gamma & 0 \\ 0 & 1 + \gamma \end{pmatrix}.$$

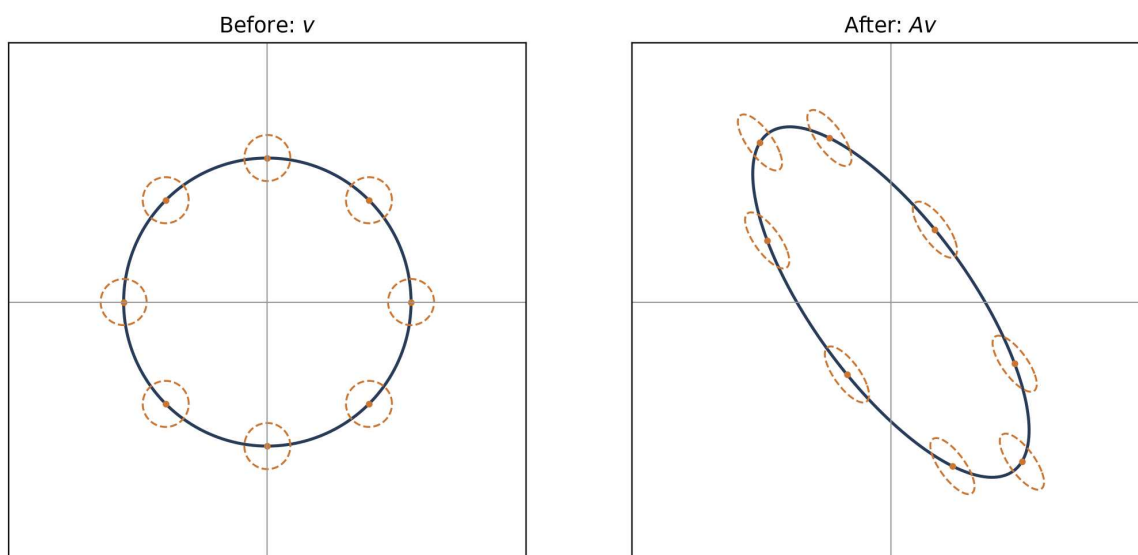
U は角度 $-\phi$ の回転で、元の座標を固有方向 $\mathbf{n}, \mathbf{t}$ に合わせた座標へ変換します。この座標では A は $\mathbf{n}$ 方向を係数 $1 - \gamma$ で縮め、 $\mathbf{t}$ 方向を $1 + \gamma$ で伸ばします。

(iv) 円と 8 個の小円の像

単位円周上の点を $\mathbf{v}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)^T$ とおくと

$$A\mathbf{v}(\theta) = (1 - \gamma) \cos(\theta - \phi) \mathbf{n} + (1 + \gamma) \sin(\theta - \phi) \mathbf{t}.$$

したがって単位円の像は、主軸が $\mathbf{n}, \mathbf{t}$ 方向で半軸長がそれぞれ $1 - \gamma, 1 + \gamma$ の楕円です。原題に描かれた各小円が半径 ρ なら、その像も同じ向きの楕円で、半軸長は $\rho(1 - \gamma), \rho(1 + \gamma)$ になります。8 個の小円の中心も単位円の像である大きな楕円上に移ります。



図： $\phi = \pi/5$, $\gamma = 0.45$ の具体例。破線の小円はすべて同一の線形写像で楕円へ変換される。

原題の点 P だけを見て局所的に回転・変形が変化するのではなく、平面全体に同一の行列 A を作用させる点が重要です。

5 2002 年度・第 2 問：球殻の Laplace 方程式

与えられた球面調和関数の固有値関係は $\hat{L}^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell+1)Y_{\ell m}$ です。

(i) 変数分離による半径方向の方程式

$U(r, \theta, \varphi) = R_\ell(r)Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ と代入すると

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rR_\ell) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R_\ell = 0.$$

これを展開して

$$R_\ell''(r) + \frac{2}{r} R_\ell'(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R_\ell(r) = 0.$$

(ii) 独立な二つの基本解

べき解 $R_\ell(r) = r^s$ を仮定すると

$$s(s-1) + 2s - \ell(\ell+1) = 0, \quad (s-\ell)(s+\ell+1) = 0.$$

したがって

$$A_\ell(r) = r^\ell, \quad B_\ell(r) = r^{-\ell-1}.$$

球殻 $a \leq r \leq b$ ではどちらも使えます (中心 $r=0$ を含まないため)。

(iii) 境界データ $\sin \theta \cos \varphi$ の展開

原題の位相規約では

$$Y_{1,+1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}, \quad Y_{1,-1} = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}.$$

よって

$$\sin \theta \cos \varphi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1,-1} - Y_{1,+1}).$$

これは $\ell=1$ 、 $m=\pm 1$ の成分しか持たないことを意味します。

(iv) 球殻 $a \leq r \leq b$ の Dirichlet 条件

境界条件は

$$U(a, \theta, \varphi) = 0, \quad U(b, \theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi.$$

任意の (ℓ, m) 成分の半径係数を $\alpha_{\ell m} r^\ell + \beta_{\ell m} r^{-\ell-1}$ とおくと、内球での零境界より

$$\alpha_{\ell m} a^\ell + \beta_{\ell m} a^{-\ell-1} = 0 \implies \beta_{\ell m} = -a^{2\ell+1} \alpha_{\ell m}.$$

外球の境界値の展開係数を $c_{\ell m}$ と書けば

$$\alpha_{\ell m} = \frac{c_{\ell m}}{b^\ell - a^{2\ell+1}b^{-\ell-1}}, \quad \beta_{\ell m} = -a^{2\ell+1} \alpha_{\ell m}.$$

今回 $c_{1,-1} = \sqrt{2\pi/3}$ 、 $c_{1,1} = -\sqrt{2\pi/3}$ で、他は 0 です。そのため非零係数は

$$\begin{aligned} \alpha_{1,-1} &= +\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{b^2}{b^3 - a^3}, & \beta_{1,-1} &= -a^3 \alpha_{1,-1}, \\ \alpha_{1,+1} &= -\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{b^2}{b^3 - a^3}, & \beta_{1,+1} &= -a^3 \alpha_{1,+1}. \end{aligned}$$

残りの $\alpha_{\ell m}, \beta_{\ell m}$ はすべて 0 です。従って求める解は、球面調和関数を再合成すると

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{r - a^3/r^2}{b - a^3/b^2} \sin \theta \cos \varphi, \quad a \leq r \leq b.$$

境界での検算： $r = a$ で分子は 0、 $r = b$ で比が 1 です。また r の組合せ $rY_{1m}, r^{-2}Y_{1m}$ は分離後の Laplace 方程式を満たします。球殻は有界領域で、Dirichlet 条件が全面で指定されているので、最大値原理により解は一意です。

数学 | 年度別問題

2001 年度

出題テーマ / 編集上の分類

部分空間／Bessel／減衰振動

次ページから、当該年度の問題と独立解答・解説を収録します。

原題の出典および二次利用条件は巻頭の案内をご覧ください。

2001年度

部分空間 / Bessel 関数 / 減衰振動

出典：既刊数学編 2001・2002年度

原題 → 独立作成の詳解の順に掲載

原題・解答ページは既刊の紙面を再利用しています。

2001 年度 第 1 問

原題：H13math.pdf・2 頁。原本を読みやすいように余白のみ切り取り、内容は改変していません。

数学

[第 1 問]

4 次元ユークリッド空間の部分空間 V_1, V_2 を

$V_1 \equiv \{ \text{条件 } x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \quad \text{と} \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$
を共に満足するベクトル $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ の集合 }
 $\}$

$V_2 \equiv \{ \text{条件 } 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \quad \text{と} \quad 3x_1 + 2x_3 - x_4 = 0$
を共に満足するベクトル $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ の集合 }
 $\}$

とする。

- (1) V_1, V_2 はそれぞれ何次元の空間か？
- (2) V_1 と V_2 に共通に含まれるベクトルを求めよ。
- (3) 空間 $V_1 \cap V_2$ は何次元か？

2001 年度 第 2 問

原題：H13math.pdf・3 頁。原本を読みやすいように余白のみ切り取り、内容は改変していません。

数学

[第 2 問]

原点を中心とし、周辺を固定した半径 a の薄い円形膜の振動を考えよう。平衡位置からの変位を u とする。極座標を用い $u = u(r, \theta, t)$ とする時、円形膜の振動は波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

に従う (簡単のため方程式に現れる係数を 1 とおいた)。以下の設問に答えよ。

(1) n 次のベッセル関数 $J_n(x)$ は微分方程式

$$\frac{d^2 J_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_n(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0$$

を満たす。 $J_n(x)$ の j 番目の零点を ξ_{nj} とする時、次の直交関係

$$\int_0^1 x J_n(\xi_{nj} x) J_n(\xi_{n\ell} x) dx = 0, \quad j \neq \ell$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 境界条件 $u(a, \theta, t) = 0$ と初期条件 $u(r, \theta, 0) = F(r, \theta)$, $\left[\frac{\partial u(r, \theta, t)}{\partial t}\right]_{t=0} = 0$ を満たす波動方程式の解を変数分離の方法で求めよ。(1) で議論した直交関係を用いてよい。

2001 年度 第 3 問

原題：H13math.pdf・4 頁。原本を読みやすいように余白のみ切り取り、内容は改変していません。

数学

[第 3 問]

未知関数 $x(t)$ に関する常微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \beta^2 x(t) = f(t)$$

について以下の設問に答えよ。ここで、 α および β は正の定数とする。

(1) この方程式をフーリエ変換を用いて調べ、未知関数 x を

$$x(\omega) = G(\omega)f(\omega)$$

の形で表せ。ただし $x(\omega), f(\omega)$ は $x(t), f(t)$ のフーリエ変換とする。

(2) $f(t) = \delta(t)$ (デルタ関数) の場合を考える。(1) の結果を用い留数定理を適用して解 $x(t)$ を以下の場合について求めよ。

(i) $\alpha < \beta$

(ii) $\alpha = \beta$

(iii) $\alpha > \beta$

Part II 導出付き解答

1 2001 年度・第 1 問： $\mathbb{R}^4$ の部分空間

原題の 4 つの線形条件を、行列の行として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= (1, -1, 2, -1), & \boldsymbol{b} &= (1, 2, -1, 0), \\ \boldsymbol{c} &= (2, 1, 2, -2), & \boldsymbol{d} &= (3, 0, 2, -1) \end{aligned}$$

と表すと、 $V_1 = \ker(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ 、 $V_2 = \ker(\boldsymbol{c}; \boldsymbol{d})$ となります。ここで $\ker(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ は 2 本の行ベクトルを持つ行列の零空間を表します。

(1) 各部分空間の次元

V_1 の 2 行は比例しないため階数が 2。同様に V_2 の 2 行も独立です。よって階数・退化次数定理 (rank-nullity) から

$$\dim V_1 = 4 - 2 = 2, \quad \dim V_2 = 4 - 2 = 2.$$

実際、掃き出し法を使うと

$$\begin{aligned} V_1 : \quad x_1 &= -x_3 + \frac{2}{3}x_4, & x_2 &= x_3 - \frac{1}{3}x_4, \\ V_2 : \quad x_1 &= -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4, & x_2 &= -\frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4. \end{aligned}$$

したがって基底の一例は

$$\begin{aligned} V_1 &= \text{span}\{(-1, 1, 1, 0), (2, -1, 0, 3)\}, \\ V_2 &= \text{span}\{(-2, -2, 3, 0), (1, 4, 0, 3)\}. \end{aligned}$$

(2) 共通部分に属するベクトル

4 つの線形条件を同時に課し、係数行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

を掃き出すと

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって $x_4 = 3t$ と置けば

$$V_1 \cap V_2 = \{t(-1, 2, 3, 3) : t \in \mathbb{R}\}.$$

(3) 和空間の次元

次元公式

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

を用いて

$$\dim(V_1 + V_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

検算：係数行列には $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = 3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ という関係があり、独立な行条件は 3 本です。そのため共通部分は 1 次元になります。

2 2001 年度・第 2 問：円形膜と Bessel 関数

半径 a の円盤で、波動速度 1 の方程式

$$u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

を考え、Dirichlet 境界 $u(a, \theta, t) = 0$ 、初期値 $u(r, \theta, 0) = F(r, \theta)$ 、 $u_t(r, \theta, 0) = 0$ を課します。

(1) Bessel 関数の直交性

角度依存性を $e^{in\theta}$ 、半径依存性を $R(r)$ 、時間依存性を $T(t)$ と分離すると、角度の固有値は n^2 ($n \in \mathbb{Z}$)、半径の方程式は

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0.$$

$x = kr$ と書けば原題の Bessel 方程式

$$J_n''(x) + \frac{1}{x}J_n'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)J_n(x) = 0$$

と一致します。原点で有限な解は $J_{|n|}(kr)$ です。境界 $R(a) = 0$ により

$$k_{nj} = \frac{\xi_{|n|j}}{a}, \quad J_{|n|}(\xi_{|n|j}) = 0,$$

ただし ξ_{mj} は J_m の j 番目の正の零点です。

直交性を証明するため、 $R_j(r) = J_m(k_{mj}r)$ とおき、

$$(rR_j')' + \left(k_{mj}^2r - \frac{m^2}{r}\right)R_j = 0$$

を二つの j, ℓ について書いて交差乗算・減算します。積分すると

$$(k_{mj}^2 - k_{m\ell}^2) \int_0^a r R_j R_\ell \, dr = \left[r(R_j R_\ell' - R_\ell R_j') \right]_0^a.$$

上端では $R_j(a) = R_\ell(a) = 0$ 。下端でも Bessel 関数の原点での正則性から境界項は消えるため、 $j \neq \ell$ なら

$$\int_0^a r J_m(\xi_{mj}r/a) J_m(\xi_{m\ell}r/a) \, dr = 0.$$

$x = r/a$ と変数を置けば、原題の区間 $[0, 1]$ の式になります。

なお積分規格化は Bessel 関数の標準的な積分恒等式より

$$\int_0^a r J_m^2(\xi_{mj}r/a) \, dr = \frac{a^2}{2} J_{m+1}^2(\xi_{mj}).$$

これを用いて展開係数を定めます。

(2) 初期値を満たす波動方程式の解

零初速度と境界条件から時間依存性は cosine となり、

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} J_{|n|} \left(\frac{\xi_{|n|j}r}{a} \right) e^{in\theta} \cos \left(\frac{\xi_{|n|j}t}{a} \right)$$

を得ます。角度直交性

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = 2\pi\delta_{nm}$$

と上記の半径直交性により、係数は

$$A_{nj} = \frac{1}{\pi a^2 J_{|n|+1}^2(\xi_{|n|j})} \int_0^{2\pi} \int_0^a F(r, \theta) J_{|n|} \left(\frac{\xi_{|n|j} r}{a} \right) e^{-in\theta} r dr d\theta.$$

境界条件に整合する十分正則な初期変位 F に対し、以上は通常の固有関数展開として成立します。 F が実関数なら $A_{-n,j} = \overline{A_{nj}}$ となり、解も実数です。

確認： $t = 0$ で $\cos(0) = 1$ となり F が再現され、時間微分は $\sin(0) = 0$ により消失します。

3 2001 年度・第 3 問：減衰振動と因果 Green 関数

与えられた方程式は

$$x''(t) + 2\alpha x'(t) + \beta^2 x(t) = f(t), \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

です。初期条件は問題文で指定されていないので、(2) では δ 入力より前に応答がない **因果的 (retarded)** 解を選びます。これにより任意の同次解の付加という不定性を固定します。

(1) Fourier 変換と伝達関数

変換の規約を冒頭のとおりに $\hat{f}(\omega) = \int f(t)e^{i\omega t} dt$ とすると

$$\widehat{x'} = -i\omega \hat{x}, \quad \widehat{x''} = -\omega^2 \hat{x}.$$

したがって

$$(\beta^2 - \omega^2 - 2i\alpha\omega) \hat{x}(\omega) = \hat{f}(\omega),$$

$$\hat{x}(\omega) = C(\omega)\hat{f}(\omega), \quad C(\omega) = \frac{1}{\beta^2 - \omega^2 - 2i\alpha\omega}.$$

C の極は $\omega = -i\alpha \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ です。 $\alpha > 0$ なので極はいずれも複素 ω 平面の下半平面にあり、逆変換 $e^{-i\omega t}$ を使うと $t < 0$ で積分を上半平面に閉じる因果条件が実現します。

(2) $f(t) = \delta(t)$ のインパルス応答

$t > 0$ では同次方程式を解きます。インパルスを含む短い時間区間で方程式を積分すると

$$x(0^+) = x(0^-) = 0, \quad x'(0^+) - x'(0^-) = 1$$

であり、因果解では $x'(0^+) = 1$ です。固有指数は

$$\lambda_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}.$$

以下、 $H(t)$ を Heaviside 関数とします。

(i) $\alpha < \beta$: 不足減衰 $\omega_d = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ とおけば

$$x(t) = H(t) e^{-\alpha t} \frac{\sin(\omega_d t)}{\omega_d}.$$

(ii) $\alpha = \beta$: 臨界減衰重根 $-\alpha$ を持つため

$$x(t) = H(t) t e^{-\alpha t}.$$

(iii) $\alpha > \beta$: 過減衰 $\kappa = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ とおけば

$$x(t) = H(t) e^{-\alpha t} \frac{\sinh(\kappa t)}{\kappa}.$$

三式とも $\lim_{t \downarrow 0} x(t) = 0$ 、 $x'(0^+) = 1$ を満たします。不足減衰の解は振動しながら減衰し、臨界・過減衰では符号の変わらない応答が得られます。

付録 | 復習チェックリスト

既刊の各巻末尾に掲載されていた、復習ポイントと計算チェックリストをまとめました。

年度別の問題・解答は前半にすべて収録しています。

旧巻の表紙・序文・重複目次は再掲載していません。

学習上のまとめ・検算チェックリスト

1. Fourier 変換の符号規約と、上半平面・下半平面の閉曲線の選択を確認する。
2. 行列の対角化可能性は「固有値が実数」や「行列が対称」であることとは別。複素対称行列は一般には正規行列ではない。
3. Hermite 行列のユニタリ共役では跡・行列式・スペクトルが保存される。
4. 直交多項式の Rodrigues 公式では端点で消える境界項を丁寧に確認する。
5. 反例問題は最小次元の射影行列や、留数零でも極を持つ正則でない関数を考える。

原典と範囲： R6Master.pdf p.10–11、R7Master.pdf p.12–13。独立解答は各設問に対応。2025 年度 PDF 末尾の「第 3 問 (C)」訂正紙は数学第 4 問に関係しないため、本巻には掲載していません。

6 小問別解答チェックリスト

年度	小問	結論と注意点
2022	1(i)	$I_- = 2\pi i f(x_0)$, $I_+ = 0$: 上・下の迂回を区別
	1(ii)	$i(\theta_2 - \theta_1)f(x_0)$: 向きに注意
	1(iii)	$A = 1/\pi$: 虚部をとる
	2(i)–(iii)	固有値 $np - q, np$, $\det C = (np - q)(np)^{n-1}$
	2(iv)–(v)	$q_0 = np$, 実行列の複素共役固有値
	2(vi)	正定値 A と負固有値による発散解
	2(vii)	v を A の負固有方向に取り全解を減衰させる
2023	1(a)–(c)	$z = e^{i\theta}$, $z = 0$, r が単位円内の極
	1(d)	$I_2 = 2\pi r^2/\Delta$
	2(a)	$e^{VXV^{-1}} = Ve^XV^{-1}$
	2(b)–(c)	固有値 $e^{\pm i\pi/4}, 1, -1$, ユニタリ対角化
	2(d)	e^{itA} に $\cosh, \sinh$ が現れる

原題・解答の対応：次の付録に 2022 年度第 4 問の 2 ページ、2023 年度第 4 問の 1 ページを掲載している。原題画像はユーザー提供 PDF に含まれるものを転載した。

免責：解答の数理的検算は行っているが、採点基準や模範解答について東京大学が公式に認定した資料ではない。

- **2020 第 2 問：** $2 \leq d \leq 6$ の全 (n, m) で固有値式 (*) を直接対角化と数値比較し、 $d = 3$ の固有ベクトルと $1/3$ の内積絶対値二乗も検算した。

免責：掲載内容は受験勉強用の独立解説であり、東京大学による模範解答、採点基準、合格予測を意味しない。

原題出典：東京大学大学院理学系研究科物理学専攻修士課程入学試験問題「数学」平成 31 年度・令和 2 年度。ユーザーが提供した原本 PDF を問題部分の出典とした。

演習の観点・最終確認

題材	院試で再利用すべき基本技法
Laplace 変換	収束半平面を明記する。畳み込みは積分領域を $u, v \geq 0$ に変換して証明する。
三次元回転 階数 1 行列	$J^2 = \mathbf{a}\mathbf{a}^T - I$ と $J^3 = -J$ が計算の核。軸方向と垂直平面に分解する。 $A^T A$ の像は A^T に張られる一次元。最小ノルム解は Cauchy-Schwarz の等号条件で決まる。 検
非線形拡散	定常解は 1 回積分して Riccati 型に落とす。時間依存問題は $u = -2D\partial_x \log \phi$ で線形化する。

算リスト

- 2017 年第 1 問 (2) : $f(t) = t$ を元の Volterra 積分方程式に直接代入。
- 2017 年第 2 問 : $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ を入れると $R(\theta)$ が標準的な xy 平面回転になる。
- 2018 年第 1 問 : $\tilde{A} = A^T / (AA^T)$ から $A\tilde{A} = 1$ と対称性を確認。
- 2018 年第 2 問 : 定常解を微分して $uu' = u''$ を確認し、Cole-Hopf 式を偏微分方程式に戻して検算。

制作・利用上の注意

これは入試問題を収録した**非公式の独立解答集**であり、大学の採点基準や公式模範解答ではない。原題と解答を組み合わせた教材として使用すること。収録は 2017・2018 年度の数学のみであり、その他の年度、物理学の専門問題、英語問題は含まない。

検算・解法チェックリスト

1. **2015 年第 1 問：** $N = 1, 2$ で行列冪の式を直接検算。自己共役性には境界項が消える条件を使用。 U_N の重み関数は $\sqrt{1-x^2}$ 。
2. **2015 年第 2 問：** 問題文の Fourier 符号に忠実に e^{-ikx} を採用。 ω 積分は $\tau > 0$ で上半平面、 $\tau < 0$ で下半平面。熱核の規格化 $\int G dx = 1$ ($t > t'$) も成立。
3. **2016 年第 1 問：** $\det A = \det B = 1$ 、行列漸化式とトレース漸化式は別物。初期値 $\sqrt{3}, \sqrt{2}, (\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$ から保存量 4 を確認。
4. **2016 年第 2 問：** kink は $u = \tanh(\lambda x)$ であり、 $u'(x)$ は線形化方程式の零周波数モード。一般的な摂動すべてが零モードという意味ではない。

本巻の位置付け

2015・2016 年度数学：原題と独立解答、全 4 大問

過去問で繰り返し登場する「行列・固有値」「偏微分方程式」「対称性」をまとめて復習できる構成とした。

検算・注意事項

1. **2013 年第 1 問：** z_2, z_3, z_4 を相異なる値にとった場合、 $z_1 f$ の留数和は記号計算でも 6。無限遠での漸近展開 $z_1 f \sim 6/z_1$ と一致する。
2. **2013 年第 2 問：** 標準形の符号分類は行列 A の行列式の符号から導いた。 $D = 0$ で残る一階係数 β は必ず非零とは限らない。Green 関数の初期条件は分布として解釈する。
3. **2014 年第 1 問：** 第 3 小問は行列指数と初期値で検算済み。第 5 小問の一般解は分母が零にならない区間でのみ有効。
4. **2014 年第 2 問：** $\lambda = 0$ のブロック行列の 2 つの固有値が等しくなるのは $c_k = 0$ の場合のみ。 λ への 1 次依存が起こる条件は $4 \mid n$ 。

資料・著者表示

原題：東京大学大学院理学系研究科・物理学専攻の平成 25・26 年度数学試験問題（利用者提供）。解答・解説：本書のために独立に作成した非公式版。原題の著作権・権利は原権利者に帰属する。

検算・要点整理

1. **2011 第 1 問**： $C^2 = I, D^2 = 0, CD = -DC$ が、 C の ± 1 固有空間と D の零冪性を同時に説明する。 $n = 2$ では Pauli 行列に帰着する。
2. **2011 第 2 問**：Green 関数は、方程式の符号と微分のジャンプ条件を先に確認する。 $d \geq 3$ の係数は必ず球面での flux 積分で確かめる。
3. **2012 第 1 問**： $SU(2)$ の共役作用では回転角が 2θ になる。 $X(n, \pi) = -I$ と、3 次元回転の恒等変換が両立する。
4. **2012 第 2 問**：連立 PDE を行列としてまとめ、固有値と固有ベクトルにより独立な移流・拡散方程式へ分離する。

独立検算 2012 年度第 2 問の解は元の連立方程式と初期条件へ代入して検算できる。2011 年度第 2 問の解は境界条件および分布微分（デルタ関数の係数）により検算できる。

検算一覧・重要公式

年度・問	独立した確認事項
2009・第 1 問	$\text{Tr } A = c + s, \det A = cs$ 、多項式 $B = A - I$ 、端点でのみ特異
2009・第 2 問	時間発展のユニタリ性、 $ f_1 ^2 + f_2 ^2 = 1$ 、周波数積分 $\pi e^{-\omega t_0}/t_0$
2010・第 1 問	$\alpha_* = \ r\ ^2/\ r\ _A^2$ 、誤差の A ノルム単調減少、 $R \leq (1-p)/(1+p)$
2010・第 2 問	d'Alembert 公式を初期位置・速度へ代入、 $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ 、矩形極限

学習上の要点 線形代数では行列の全成分を直接計算する前に「固有値と対称性」を確認する。ODE では「保存量と行列指数」を見る。最適化では「正定値二次形式」を利用する。PDE では「特性座標と Fourier / Green 関数」の選択が決め手となる。

原資料 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 修士課程入学試験問題：平成 21 年度「数学」（平成 20 年 8 月 25 日実施）、平成 22 年度「数学」（平成 21 年 8 月 24 日実施）。利用者が提供した PDF を原題の一次資料として用いた。

注記 原題の数式・記号と、本書の読みやすさのための略記 c, s, δ, Φ 等を区別している。複素数の内積は $f^\dagger f$ とした。本書の解答は独立に作成したもので、採点基準や大学公表模範解答を意味しない。

チェックポイント：院試対策として押さえるポイント

1. **実対称・Hermite 行列の固有分解**：直交性、スペクトル射影、関数演算 e^{-At} を一つの概念として理解する。
2. **勾配流**： $\dot{x} = -\nabla\Phi$ なら $\dot{\Phi} = -\|\nabla\Phi\|^2 \leq 0$ 。ただし「単調減少」と「原点収束」は同一ではなく、正定性などの追加条件が重要。
3. **Fokker-Planck 方程式**：確率流の発散形式から質量保存、Gaussian 形から中心・分散の進化を導く。
4. **変分法**：変分から Euler-Lagrange 方程式を導き、 F が x に陽に依存しない場合は第一積分を利用する。
5. **極値と最小値の違い**：停留条件を求めただけでは最小値であるとは限らない。境界条件と安定性の確認が別に必要。

出典資料

平成 17 年度『東京大学大学院理学系研究科物理学専攻修士課程入学試験問題英語・数学』数学第 1 問・第 2 問 (PDF ページ 2-3)。

平成 18 年度『同英語・数学』数学第 1 問・第 2 問 (PDF ページ 3-4)。

編集上の区分：原題は上記の試験問題資料、解答は独立作成の非公式解説である。

最終チェックと復習用サマリー

対象	最終的に確認すべき式と条件
2003 第1問	$A^T = -A$ 、 $\lambda = \sqrt{6}$ 、 $\ \mathbf{x}(t)\ $ と $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}(t)$ が保存
2003 第2問	$w = ru$ 、 $w_{tt} = c^2 w_{rr}$ 、 $u(t, 0)$ は有限、 $ g $ のピークは $ \omega = c/r_0$
2004 第1問	固有値 $1, a, a^2$ 、不動点 $s = b/(1-a)$ 、 $F^k p(x) = p(s + a^k(x-s))$
2004 第2問	熱核 $K_t(z) = e^{-z^2/(4a^2t)}/\sqrt{4\pi a^2t}$ 、誤差関数による積分表示

記号・精度・独立性

本書では原題4ページを画像として掲載し、解答は独自に再導出した。2003年度第2問(5)の複素数の大小に関する問題点、および2004年度第2問(5)の不連続な初期値の境界点に関する解釈を注記した。これらは原題の訂正ではなく、数学的な厳密性のための補足である。

次巻へ

今回で数学編は第9巻。継続する場合、次巻の対象は2001・2002年度である。旧年度の問題冊子には「数学・英語」の合同試験が含まれるため、原題の範囲と解答の対象を分けて掲載する。

資料 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻修士課程入学試験問題（平成15・16年度）、ユーザー提供資料。

位置づけ 非公式・独立作成の解答集。原題の著作権は権利者に帰属します。

計算チェックと学習ポイント

収録問題	独立の検算ポイント	旧形式
2001・第 1 問 2001・第 2 問	係数行列の階数は 3、 $\mathbf{c} + \mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 、共通部分の基底は $(-1, 2, 3, 3)$. Bessel の直交性は自己随伴型 Sturm–Liouville 方程式から導出、展開係数の分母は $\pi a^2 J_{m+1}^2$.	
2001・第 3 問	三領域とも因果的な解は $G(0^+) = 0$ 、 $G'(0^+) = 1$ を満たす。 $\alpha \rightarrow \beta$ の極限で連続。	
2002・第 1 問 2002・第 2 問	$\det A = 1 - \gamma^2$ 、 $A\mathbf{n} = (1 - \gamma)\mathbf{n}$ 、 $At = (1 + \gamma)t$. $U(a) = 0$ 、 $U(b) = \sin \theta \cos \varphi$ 、 $\Delta U = 0$ を直接確認できる。	

から現行試験へ：この時期は数学と英語が同じ時間枠に含まれていました。数学だけに割ける制限時間は現行の筆記試験とは直接比較できません。しかし、線形代数・微分方程式・固有関数展開という技能は近年の試験にも通用します。

出典（原題）

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻修士課程入学試験問題、平成 13 年度および平成 14 年度。本書は利用者から提供された PDF の数学部分を収録し、解答は独立に作成しました。