

難問に挑み、**合格**をつかむ。

本質を問う問題で
思考力を鍛える

東大院試 対策問題パック

物理 予想問題集

第**3**集

全5集シリーズ

出題分野

量子力学

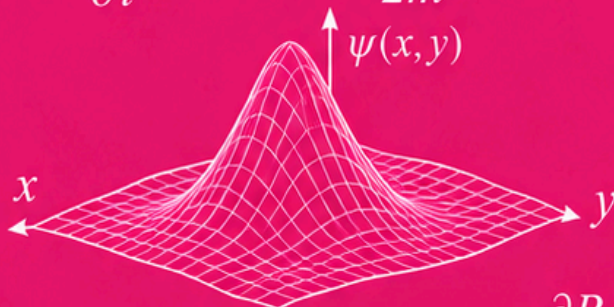
統計力学

電磁気学

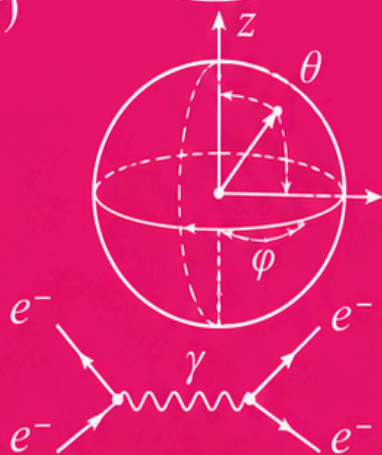
力学

数学

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r,t)$$



$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$



この1冊で、院試物理を徹底対策！



オリジナル予想問題を多数収録

過去問を徹底分析した、実戦的な良問で演習！



詳しい解答・解説

解法の考え方から丁寧に解説し、理解を深める！



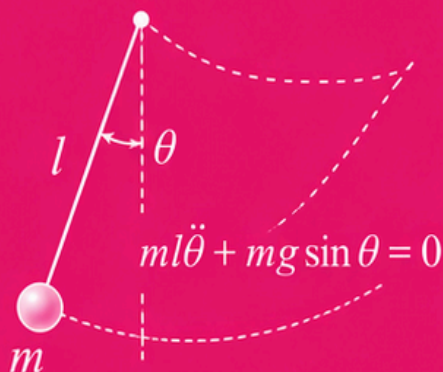
東大院試の出題傾向に完全対応

典型問題から応用・発展問題まで幅広くカバー！



解法のポイント・物理の本質も解説

答案作成のコツや思考プロセスも学べる！



この問題集の使い方

本書は東京大学大学院理学系研究科物理学専攻の試験範囲・過去問題を参考に制作した**完全新作**の模擬問題集である。**第1集・第2集とは異なる20大問**を収録した。実際の出題を的中させること、配点・難度が公式と一致することを保証するものではない。

公開されている試験構成

2027年度入学試験の専攻公式案内（2026年実施）では、修士課程専門科目は**数学1問・物理3問の計4問必答、240分、400点**。主要範囲は量子力学、統計力学、古典力学・電磁気学。第1集・第2集と同じく、この形式を参考にした。

https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/g_info/49259/

演習方法：各回の「問題編」の4大問を先に解く。所要240分を目安として、詰まった小問は飛ばして進む。次に「詳解編」で境界条件、符号、次数評価、極限を確認する。各回の最後には解答の検算ポイントを示した。

+ α の位置づけ：第5回第1問(5)の二スピン熱平衡エンタングルメントのみを発展問題とする。それ以外の99小問は学部の基本科目を組み合わせる構成である。

第1・第2集との違い

第1集の調和振動子摂動・Rabi振動・Fresnel光学、第2集の有限井戸・黒体輻射・誘電体球・Langevin過程等とは、中心的な物理モデルを変えた。第3集は**磁束と位相、微視状態数、確率過程、有限系の境界条件、非対角化、近似の妥当性**を横断軸に設定する。

目次

この問題集の使い方	1
第1・第2集との違い	1
問題編	4
第1回 磁束と量子位相・固体の統計・電磁誘導・調和関数	4
第1回第1問 磁束を貫く一次元量子リング【量子力学】	4
第1回第2問 エネルギーを交換する二つの Einstein 固体【統計力学】	5
第1回第3問 時間変化する理想ソレノイド【電磁気学】	6
第1回第4問 円環領域での Laplace 方程式【数学】	7
第2回 局所ポテンシャル・協力的吸着・回転系・多変量 Gaussian	8

第 2 回第 1 問	無限深井戸中央のデルタ障壁【量子力学】	8
第 2 回第 2 問	相互作用する二つの吸着サイト【統計力学】	9
第 2 回第 3 問	Foucault 振り子の小振幅運動【古典力学】	10
第 2 回第 4 問	二変数 Gaussian 積分と Schur 補元【数学】	11
第 3 回	Landau 準位・二次元 Bose 気体・鏡像法・Jordan 行列	12
第 3 回第 1 問	一様磁場中の二次元荷電粒子【量子力学】	12
第 3 回第 2 問	二次元の理想 Bose 気体【統計力学】	13
第 3 回第 3 問	接地導体球と点電荷の鏡像法【電磁気学】	14
第 3 回第 4 問	Jordan ブロックと時間応答【数学】	15
第 4 回	Gaussian 波束・実在気体・対称コマ・Legendre 展開	16
第 4 回第 1 問	自由粒子の Gaussian 波束と一様外力【量子力学】	16
第 4 回第 2 問	硬球気体の第二ビリアル係数【統計力学】	17
第 4 回第 3 問	重い対称コマの定常歳差【古典力学】	18
第 4 回第 4 問	Legendre 多項式と球面多重極【数学】	19
第 5 回	交換相互作用・Markov 過程・プラズマ・離散拡散	20
第 5 回第 1 問	二つのスピン $1/2$ の交換相互作用【量子力学】	20
第 5 回第 2 問	二状態の確率過程と線形応答【統計力学】	21
第 5 回第 3 問	冷たい電子プラズマ中の電磁波【電磁気学】	22
第 5 回第 4 問	周期格子上の離散拡散【数学】	23
詳解編		23
第 1 回	詳解：リング・Einstein 固体・誘導電場・Laplace 境界値問題	24
第 1 回第 1 問の解答		24
第 1 回第 2 問の解答		25
第 1 回第 3 問の解答		26
第 1 回第 4 問の解答		27
第 2 回	詳解：デルタ障壁・吸着相関・Foucault 振り子・Gaussian	28
第 2 回第 1 問の解答		28
第 2 回第 2 問の解答		29
第 2 回第 3 問の解答		30

第 2 回第 4 問の解答	31
第 3 回 詳解：Landau 準位・二次元 Bose 統計・接地球・Jordan 応答	32
第 3 回第 1 問の解答	32
第 3 回第 2 問の解答	33
第 3 回第 3 問の解答	34
第 3 回第 4 問の解答	35
第 4 回 詳解：波束・硬球気体・対称コマ・Legendre 多重極	36
第 4 回第 1 問の解答	36
第 4 回第 2 問の解答	37
第 4 回第 3 問の解答	38
第 4 回第 4 問の解答	39
第 5 回 詳解：ニスピン系・二状態 Markov 過程・電子プラズマ・離散拡散	40
第 5 回第 1 問の解答	40
第 5 回第 2 問の解答	41
第 5 回第 3 問の解答	42
第 5 回第 4 問の解答	43
出題設計・優先学習テーマ	44

第 1 回 | 磁束と量子位相・固体の統計・電磁誘導・調和関数

実施条件（独自設定） 4 大問必答 / 240 分 / 各大問 100 点換算。

各大問は 5 小問で構成。問題の配点と難度は本書の独自設定であり、大学の公表配点ではない。

第 1 回 第 1 問 磁束を貫く一次元量子リング【量子力学】

質量 m 、正電荷 q の粒子が半径 R の細いリング上を動く。リングを貫く磁束を Φ 、 $\Phi_0 = h/q$ 、 $\alpha = \Phi/\Phi_0$ とする。 $\theta \in [0, 2\pi)$ 上の Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2mR^2} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{q\Phi}{2\pi} \right)^2, \quad \psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta).$$

- (1) 固有波動関数とエネルギーを求め、ゼロ磁束での縮退を論ぜよ。
- (2) 単一固有状態の持続電流 $I_\ell = -\partial E_\ell / \partial \Phi$ を計算せよ。
- (3) $0 \leq \alpha \leq 1$ における基底状態と、 $\alpha = 1/2$ の縮退を求めよ。
- (4) 温度 T での分配関数 Z と熱平均電流を式で与えよ。
- (5) すべてのスペクトルと Z が Φ_0 周期となることを示せ。

第1回 第2問 エネルギーを交換する二つの Einstein 固体【統計力学】

角振動数 ω の独立な量子調和振動子からなる固体 A, B があり、振動子数はそれぞれ N_A, N_B 。エネルギー零点を各振動子の零点エネルギー分だけ移す。全励起量子数 Q が固定され、A に q 個、B に $Q - q$ 個が分配される。

- (1) N 個の振動子に q 個の励起量子を配分する状態数 $\Omega(N, q)$ を求めよ。
- (2) 全系の確率 $P(q)$ を規格化を含む式で表せ。
- (3) $q, N_A, N_B \gg 1$ でエントロピーから逆温度を導き、最確分配を求めよ。
- (4) A のエネルギー揺らぎ $\text{Var}(E_A)$ を各系の熱容量 C_A, C_B で表せ (Gaussian 近似)。
- (5) 正準分布で 1 振動子の平均エネルギー (零点移動後) と熱容量を求め、結果を検算せよ。

第 1 回 第 3 問 時間変化する理想ソレノイド【電磁気学】

半径 a の無限に長い理想ソレノイドにより、 $r < a$ に $\mathbf{B}(t) = B(t)\hat{z}$ 、 $r > a$ では $\mathbf{B} = 0$ が成立する。磁束密度はゆっくり変化し、準静的近似を使う。誘起電場は方位方向のみとする。

- (1) 半径 r の同心円に Faraday の法則を適用し、 $r < a$ の E_φ を求めよ。
- (2) $r > a$ の E_φ を求め、 $r = a$ での連続性を確認せよ。
- (3) 電場の向きについて $\dot{B} > 0$ の場合を説明せよ。
- (4) 単位長さの磁場エネルギー U_B/L とその時間微分を求めよ。
- (5) $r = a$ の Poynting 流束から、磁場エネルギーの変化との一致を示せ。

第 1 回 第 4 問 円環領域での Laplace 方程式【数学】

二次元円環 $a < r < b$ ($0 < a < b$) で $\nabla^2 u = 0$ を解く。境界条件は $u(a, \theta) = 0$ 、 $u(b, \theta) = V \cos(n\theta)$ (整数 $n \geq 1$) とする。

- (1) 極座標での Laplace 作用素を書き、変数分離した動径方程式を示せ。
- (2) 境界条件を満たす $u(r, \theta)$ を求めよ。
- (3) $r = b$ での法線微分 $\partial_r u$ を求めよ。
- (4) $\mathcal{E} = (\varepsilon/2) \int_a^b \int_0^{2\pi} |\nabla u|^2 r \, d\theta \, dr$ を求めよ。
- (5) $a \rightarrow 0$ の極限と Dirichlet 問題の一意性を説明せよ。

第 2 回 | 局所ポテンシャル・協力的吸着・回転系・多変量 Gaussian

実施条件（独自設定） 4 大問必答 / 240 分 / 各大問 100 点換算。

各大問は 5 小問で構成。問題の配点と難度は本書の独自設定であり、大学の公表配点ではない。

第 2 回 第 1 問 無限深井戸中央のデルタ障壁【量子力学】

質量 m の粒子が $-a < x < a$ の無限深井戸に閉じ込められ、 $x = 0$ には $g\delta(x)$ ($g \geq 0$) が置かれる。境界 $\psi(\pm a) = 0$ を満たす定常状態を考える。

- (1) $x = 0$ での波動関数・導関数の接続条件を求めよ。
- (2) 奇パリティの固有関数と固有エネルギーを求めよ。
- (3) 偶パリティ状態の波数 k を定める固有値方程式を導け。
- (4) $g \rightarrow 0$ での基底エネルギーの一次補正を求めよ。
- (5) $g \rightarrow +\infty$ で低い固有値がどうなるか説明せよ。

第2回 第2問 相互作用する二つの吸着サイト【統計力学】

二つのサイト $i = 1, 2$ に粒子が一個まで吸着できる。占有数 $n_i \in \{0, 1\}$ 。 $E = -\epsilon(n_1 + n_2) - Jn_1n_2$ とし、化学ポテンシャル μ 、温度 T の粒子浴に接する。 $z = e^{\beta(\mu+\epsilon)}$ 、 $w = e^{\beta J}$ とする。

- (1) 大分配関数 Ξ を求めよ。
- (2) 平均粒子数 $\langle N \rangle$ および一サイト平均占有率を計算せよ。
- (3) 共分散 $\langle n_1n_2 \rangle - \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle$ を求めよ。
- (4) $\partial \langle N \rangle / \partial \mu$ を粒子数分散で表せ。
- (5) $J > 0$ の $T \rightarrow 0$ 極限で吸着が一度に二個起こる条件を求めよ。

第2回 第3問 Foucault 振り子の小振幅運動【古典力学】

地球の自転角速度の大きさを Ω 、緯度を λ とする。長さ ℓ の振り子の水平微小変位を東向き x 、北向き y とし、 $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ 、 $\Omega_z = \Omega \sin \lambda$ と置く。地球自転の水平成分および $O(\Omega^2)$ の遠心力補正は無視する。

- (1) 回転座標系の運動方程式から、 x, y の連立方程式を導け。
- (2) $z = x + iy$ とするとき、複素微分方程式を導け。
- (3) 円偏光に対応する二つの正の固有振動数を求めよ。
- (4) $\Omega \ll \omega_0$ で振動面のゆっくりした回転角速度を求めよ。
- (5) 赤道と北極での結果を比較し、近似の有効範囲を説明せよ。

第2回 第4問 二変数 Gaussian 積分と Schur 補元【数学】

$a, b > 0$ 、 $D = ab - c^2 > 0$ とする。 $x, y \in \mathbb{R}$ に対し

$$Q(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2cxy + by^2), \quad Z = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\beta Q(x, y)} dx dy, \quad \beta > 0.$$

- (1) 正定値性を確認し、 y を平方完成せよ。
- (2) 積分 Z を求めよ。
- (3) 共分散行列 $\langle (x, y)^\top (x, y) \rangle$ を求めよ。
- (4) x の周辺分布と分散を Schur 補元で表せ。
- (5) 条件付き平均 $\mathbb{E}[y | x]$ と $\partial_c \ln Z$ を計算せよ。

第 3 回 | Landau 準位・二次元 Bose 気体・鏡像法・Jordan 行列

実施条件（独自設定） 4 大問必答 / 240 分 / 各大問 100 点換算。

各大問は 5 小問で構成。問題の配点と難度は本書の独自設定であり、大学の公表配点ではない。

第 3 回 第 1 問 一様磁場中の二次元荷電粒子【量子力学】

質量 m 、正電荷 q のスピンを持たない粒子が xy 平面を動き、 $\mathbf{B} = B\hat{z}$ ($B > 0$) に置かれる。Landau ゲージ $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ を使い、 y 方向に周期 L_y の境界条件を課す。 $\omega_c = qB/m$ 、 $\ell_B^2 = \hbar/(qB)$ とする。

- (1) 運動量 $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}$ の交換子 $[\pi_x, \pi_y]$ を求めよ。
- (2) $\psi(x, y) = e^{iky}\varphi_k(x)$ としたときの一次元 Hamiltonian を求めよ。
- (3) Landau 準位 E_n と中心座標 x_0 を求めよ。
- (4) 面積 $A = L_x L_y$ 中の一準位あたりの縮退度を求めよ（端の効果は無視）。
- (5) 一様静電場 $E_x \hat{x}$ を弱く加えたときの y 方向の群速度を求めよ。

第3回 第2問 二次元の理想 Bose 気体【統計力学】

面積 A の十分大きな二次元容器に、内部自由度を持たない質量 m の自由 Bose 粒子を入れる。分散は $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / (2m)$ で、粒子数 N 、密度 $n = N/A$ を固定する。熱的波長 $\lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar^2 / (mk_B T)}$ 、fugacity $z = e^{\beta\mu} < 1$ と置く。

- (1) 一粒子状態密度 $D(\epsilon)$ を求めよ。
- (2) 温度 $T > 0$ での粒子密度と z の関係を求めよ。
- (3) 一様二次元理想 Bose 気体に有限温度で通常の Bose 凝縮がない理由を示せ。
- (4) $\mu(T)$ を密度で表示し、 $T \rightarrow 0^+$ での先頭挙動を求めよ。
- (5) 圧力 P と内部エネルギー U の関係を導け。

第3回 第3問 接地導体球と点電荷の鏡像法【電磁気学】

誘電率 ϵ の媒質中、半径 a の導体球が接地されている。点電荷 $q > 0$ を中心から距離 $d > a$ の z 軸上に置く。

- (1) 鏡像電荷の位置 b と大きさ q' を求めよ。
- (2) 球外の電位 $\phi(\mathbf{r})$ を求め、 $r = a$ でゼロとなることを示せ。
- (3) 導体球の全誘導電荷 Q_{ind} を求めよ。
- (4) 点電荷に働く力 $\mathbf{F}$ と静電エネルギー $U(d)$ を求めよ。
- (5) 導体球を接地から切り離し、全電荷がゼロの孤立球にした場合、鏡像配置をどう変えるか述べて。

第3回 第4問 Jordan ブロックと時間応答【数学】

$\gamma > 0$ 、 $A = \begin{pmatrix} -\gamma & 1 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$ とし、 $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ を考える。

- (1) A の固有値・固有ベクトルと対角化可能性を判定せよ。
- (2) 行列指数関数 e^{At} を求めよ。
- (3) $\mathbf{x}(0) = (0, F)^T$ ($F > 0$) の場合の $\mathbf{x}(t)$ を求めよ。
- (4) $x_1(t)$ が最大となる時刻とその値を求め、さらに $\int_0^\infty x_1(t) dt$ を求めよ。
- (5) $A_\delta = \begin{pmatrix} -\gamma & 1 \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix}$ の固有値と、 $\delta > 0$ での漸近安定条件を求めよ。

第 4 回 | Gaussian 波束・実在気体・対称コマ・Legendre 展開

実施条件（独自設定） 4 大問必答 / 240 分 / 各大問 100 点換算。

各大問は 5 小問で構成。問題の配点と難度は本書の独自設定であり、大学の公表配点ではない。

第 4 回 第 1 問 自由粒子の Gaussian 波束と一様外力【量子力学】

質量 m の一次元粒子の初期状態を

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2} + \frac{ip_0x}{\hbar}\right), \quad \sigma > 0$$

とする。まず自由 Hamiltonian $H_0 = p^2/(2m)$ を考える。

- (1) 初期状態の規格化と $\langle x \rangle, \langle p \rangle, \Delta x, \Delta p$ を求めよ。
- (2) 自由時間発展後の $\langle x \rangle_t, \langle p \rangle_t$ を求めよ。
- (3) 位置分布の幅 $\sigma_t^2 = \text{Var}(x)_t$ を求めよ。
- (4) $H_F = p^2/(2m) - Fx$ としたときの $\langle x \rangle_t, \langle p \rangle_t$ を求めよ。
- (5) 定数 F の場合、 $\psi_F(x, t)$ を自由解 $\psi_0(x, t)$ を用いて表し、波束幅に外力が影響しないことを示せ。

第4回 第2問 硬球気体の第二ビリアル係数【統計力学】

三次元の希薄な古典同種粒子（質量 m ） N 個、体積 V 、温度 T を考える。粒子間相互作用は硬球ポテンシャル $u(r) = +\infty$ ($r < d$)、 $u(r) = 0$ ($r \geq d$) とする。密度 $n = N/V$ 、 $nd^3 \ll 1$ 、熱的波長 λ_T を用いる。

- (1) Mayer 関数 $f(r) = e^{-\beta u(r)} - 1$ を求めよ。
- (2) 第二ビリアル係数 $B_2 = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} f(r) d^3r$ を計算せよ。
- (3) n^2 までの圧力 P を求めよ。
- (4) 同じ次数の Helmholtz 自由エネルギー F_H および化学ポテンシャル μ を求めよ。
- (5) 内部エネルギー U と圧力補正の物理的意味を説明せよ。

第4回 第3問 重い対称コマの定常歳差【古典力学】

一端を固定した対称コマの重心が固定点から対称軸に沿って距離 ℓ にある。軸周り慣性モーメント I_3 、横方向 I_1 、質量 M 、重力 g 。対称軸と鉛直上向きのなす角を θ とし、Euler 角 θ, ϕ, ψ で表す。運動エネルギーは

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2, \quad V = Mg\ell \cos \theta.$$

- (1) Lagrangian を書き、 ϕ, ψ が循環座標であることを示せ。
- (2) 保存運動量 p_ϕ, p_ψ を求めよ。
- (3) θ の一次元有効ポテンシャルを導け。
- (4) θ を一定に保つ定常歳差 $\dot{\phi} = \Omega_p$ の条件を求めよ。
- (5) $s = p_\psi > 0$ が十分大きいときの遅い歳差の角速度を求め、その物理的意味を述べよ。

第 4 回 第 4 問 Legendre 多項式と球面多重極【数学】

$P_\ell(x)$ を Legendre 多項式とし、母関数 $G(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$ を使う。 $|t| < 1$ とする。

- (1) $G(x, t)$ を t^2 まで展開し P_0, P_1, P_2 を求めよ。
- (2) Legendre 微分方程式を書き、異なる次数の直交性を説明せよ。
- (3) P_0, P_1, P_2 の規格化積分 $\int_{-1}^1 P_\ell(x)^2 dx$ を求めよ。
- (4) $r > r'$ の Coulomb 核 $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ を $P_\ell(\cos \gamma)$ で展開せよ。
- (5) 半径 a の球面上の電荷密度 $\sigma(\theta) = \sigma_0 + \sigma_2 P_2(\cos \theta)$ が作る外部電位 $\phi(r, \theta)$ ($r > a$) を求めよ。

第 5 回 | 交換相互作用・Markov 過程・プラズマ・離散拡散

実施条件（独自設定） 4 大問必答 / 240 分 / 各大問 100 点換算。

各大問は 5 小問で構成。問題の配点と難度は本書の独自設定であり、大学の公表配点ではない。

第 5 回 第 1 問 二つのスピン $1/2$ の交換相互作用【量子力学】

二つの無次元スピン演算子 $\mathbf{s}_i = \boldsymbol{\sigma}_i/2$ ($\hbar$ を含まない) に対し、 $J > 0$ 、磁場結合係数 h を用いて

$$H = J\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 - h(s_1^z + s_2^z)$$

とする。 J, h はエネルギーの次元を持つ。 $\beta = 1/(k_B T)$ 。

- (1) 全スピンの一重項・三重項を使い、 H の 4 固有状態と固有エネルギーを求めよ。
- (2) 分配関数 $Z(\beta, h)$ を求めよ。
- (3) 平衡状態の磁化 $M = \langle s_1^z + s_2^z \rangle$ と $h = 0$ での感受率を求めよ。
- (4) $h = 0$ でのスピン相関 $\langle \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \rangle$ を求めよ。
- (5) 【+ α 】 $h = 0$ の熱平衡密度行列がエンタングルした状態となる温度の条件を、部分転置の負固有値の有無から求めよ。

第 5 回 第 2 問 二状態の確率過程と線形応答【統計力学】

占有状態 $n = 0, 1$ をとる Markov 過程を考える。遷移 $0 \rightarrow 1$ の率を $a > 0$ 、 $1 \rightarrow 0$ を $b > 0$ とする。 $p(t) = P(n(t) = 1)$ 。

- (1) $p(t)$ の master 方程式を書け。
- (2) 定常確率 p_* と任意初期値 $p(0)$ からの緩和を求めよ。
- (3) 定常状態での連結相関関数 $C(t) = \langle \delta n(t) \delta n(0) \rangle$ を求めよ。
- (4) エネルギー差 $\Delta - h$ について $a/b = e^{-\beta(\Delta - h)}$ の詳細釣り合いが成立するとき、 $\partial p_*/\partial h$ と揺らぎを関係付けよ。
- (5) 外場 $h(t) = h_0 + \text{Re}(\delta h_\omega e^{-i\omega t})$ に対し、総率 $\gamma = a + b$ が外場に依らないモデルでの複素感受率 $\chi(\omega)$ を求めよ。

第5回 第3問 冷たい電子プラズマ中の電磁波【電磁気学】

一様な電子密度 n_e 、電子質量 m 、電荷 $-e$ 、静止イオン背景からなる無衝突・非磁化プラズマを考える。電子は非相対論的に運動し、電場 $\boldsymbol{E} = \text{Re}[E_0 \hat{x} e^{i(kz - \omega t)}]$ を受ける。 $\omega_p^2 = n_e e^2 / (\epsilon_0 m)$ とする。

- (1) 電子速度の複素振幅と電流密度を求めよ。
- (2) 有効誘電率 $\epsilon(\omega)$ および電磁波の分散関係を導け。
- (3) $\omega > \omega_p$ で位相速度 v_{ph} と群速度 v_g を求めよ。
- (4) $0 < \omega < \omega_p$ で波数の形と侵入長を求めよ。
- (5) $\omega > \omega_p$ で電場・磁場・電子運動エネルギーを足した時間平均エネルギー密度を求めよ。

第5回 第4問 周期格子上の離散拡散【数学】

$N \geq 3$ 個の格子点 $j = 0, \dots, N-1$ (添字は N 周期) 上の実数関数 $u_j(t)$ について

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{D}{a^2}(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), \quad D > 0, a > 0$$

を考える。

- (1) 離散 Fourier モード $u_j \propto e^{i2\pi kj/N}$ の固有値 λ_k を求めよ。
- (2) 時間発展 $u_j(t)$ を Fourier 係数を用いて書け。
- (3) 格子平均 $\bar{u} = N^{-1} \sum_j u_j$ の保存と、平均以外のモードの減衰を示せ。
- (4) 最も遅く減衰する非定数モードの時定数を求め、 $L = Na$ 一定、 $N \rightarrow \infty$ での極限を示せ。
- (5) 静的 Poisson 方程式 $-(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})/a^2 = f_j$ の可解条件と、平均を 0 とする解の Fourier 表示を求めよ。

第 1 回 | 詳解：リング・Einstein 固体・誘導電場・Laplace 境界値問題

第 1 回 第 1 問の解答 磁束を貫く一次元量子リング

- (1) 周期境界条件から $\ell \in \mathbb{Z}$ として $\psi_\ell(\theta) = e^{i\ell\theta}/\sqrt{2\pi}$ である。 $E_R = \hbar^2/(2mR^2)$ と置くと

$$E_\ell = E_R(\ell - \alpha)^2.$$

$\alpha = 0$ では ℓ と $-\ell$ が同じエネルギーを持つ ($\ell = 0$ は非縮退)。

- (2) $\partial\alpha/\partial\Phi = 1/\Phi_0$ だから

$$I_\ell = -\frac{\partial E_\ell}{\partial\Phi} = \frac{2E_R}{\Phi_0}(\ell - \alpha).$$

符号は粒子電荷を正とした規約に依存する。

- (3) 各 α に最も近い整数が最低エネルギーを与える。 $0 \leq \alpha < 1/2$ では $\ell = 0$ 、 $1/2 < \alpha \leq 1$ では $\ell = 1$ 。
 $\alpha = 1/2$ では $E_0 = E_1 = E_R/4$ の二重縮退が起こり、電流の基底枝は折れ線状に切り替わる。

- (4) $\beta = (k_B T)^{-1}$ なら

$$Z(\Phi, T) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \exp[-\beta E_R(\ell - \alpha)^2], \quad \langle I \rangle = k_B T \frac{\partial}{\partial\Phi} \ln Z.$$

Z の微分で $\sum I_\ell e^{-\beta E_\ell}/Z$ が得られる。 $\alpha = 0, 1/2$ では対称性から平均電流はゼロである。

- (5) $E_\ell(\alpha + 1) = E_{\ell-1}(\alpha)$ 。 ℓ の総和で添字を付け替えれば $Z(\alpha + 1) = Z(\alpha)$ 。個々の番号 ℓ に結び付けた枝は周期的とは限らないが、**スペクトルの集合**および全ての熱力学量は周期的である。

確認・適用条件

磁束周期性は波動関数の単価性とゲージの関係を反映する。磁場がリング上でゼロでも磁束に依存する点が要点。

第 1 回 第 2 問の解答 Einstein 固体

- (1) 非負整数
- $n_1 + \dots + n_N = q$
- の解の個数は重複組合せから

$$\Omega(N, q) = \binom{q + N - 1}{N - 1}.$$

零点エネルギーはすべての配置に共通なので状態数には影響しない。

- (2) エネルギー量子の全数が固定されるので独立系の状態数が掛け合わされる。

$$P(q) = \frac{\Omega(N_A, q)\Omega(N_B, Q - q)}{\sum_{s=0}^Q \Omega(N_A, s)\Omega(N_B, Q - s)}.$$

分母は Vandermonde 恒等式で $\Omega(N_A + N_B, Q)$ である。

- (3) Stirling 近似で
- $S/k_B \simeq (q + N) \ln(q + N) - q \ln q - N \ln N$
- 。
- $E = q\hbar\omega$
- として

$$\frac{1}{T} = \frac{k_B}{\hbar\omega} \ln \left(1 + \frac{N}{q} \right).$$

$T_A = T_B$ から $N_A/q_A = N_B/q_B$ 、従って $q_A^* = QN_A/(N_A + N_B)$ 。大きな Q, N での最確分配である。

- (4)
- E_A
- が変動すると
- $E_B = E_{\text{tot}} - E_A$
- 。
- $\frac{\partial^2 S_i}{\partial E_i^2} = -1/(T^2 C_i)$
- であるため、総エントロピーの二次展開は

$$\frac{S_{\text{tot}}(E_A)}{k_B} = \text{const} - \frac{(\delta E_A)^2}{2k_B T^2} \left(\frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} \right) + \dots$$

よって $\text{Var}(E_A) = k_B T^2 C_A C_B / (C_A + C_B)$ 。 $C_B \rightarrow \infty$ では正準分布の結果 $k_B T^2 C_A$ へ戻る。

- (5)
- $z_1 = (1 - e^{-\beta\hbar\omega})^{-1}$
- で

$$\bar{E} = \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}, \quad c_V = k_B \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}, \quad x = \beta\hbar\omega.$$

$C_A = N_A c_V$ 、 $C_B = N_B c_V$ として (4) に代入する。高温では $\bar{E} \rightarrow k_B T$ 、 $c_V \rightarrow k_B$ 。

確認・適用条件

微視的な状態数の極大と熱平衡の温度一致を結び付ける。部分系の揺らぎは、孤立した全系でのエネルギー保存により抑えられる。

第 1 回 第 3 問の解答 時間変化する理想ソレノイド

- (1) $\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ より $2\pi r E_\varphi = -\pi r^2 \dot{B}$ 。従って

$$E_\varphi(r, t) = -\frac{r}{2} \dot{B}(t) \quad (r < a).$$

- (2) $r > a$ では磁束は $\pi a^2 B$ なので

$$E_\varphi(r, t) = -\frac{a^2}{2r} \dot{B}(t) \quad (r > a).$$

$r = a$ の両側で $E_\varphi = -a\dot{B}/2$ となる。

- (3) $\dot{B} > 0$ なら、 $+z$ 方向磁束の増大を妨げる向きに誘導電流が流れる。 $E_\varphi < 0$ 、つまり $-\hat{\varphi}$ 方向となる (Lenz の法則)。

- (4) 磁場が存在する断面のみに積分する。 $U_B/L = \int_{r < a} B^2/(2\mu_0) dA$ より

$$\frac{U_B}{L} = \frac{\pi a^2 B^2}{2\mu_0}, \quad \frac{1}{L} \frac{dU_B}{dt} = \frac{\pi a^2 B \dot{B}}{\mu_0}.$$

- (5) Poynting ベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ 。 $\hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{r}$ から境界内面で

$$S_r(a^-) = -\frac{aB\dot{B}}{2\mu_0}.$$

外向き流出は $2\pi a S_r = -\pi a^2 B \dot{B}/\mu_0$ 。したがって内向き流入 $-2\pi a S_r$ は $d(U_B/L)/dt$ に等しい。磁場を保つ表面電流の外部電源がエネルギーを供給する。

確認・適用条件

無限長理想ソレノイドの準静的模型である。急激な変化で放射が無視できない場合には仮定が成立しない。

第 1 回 第 4 問の解答 円環の Laplace 方程式

- (1) 極座標では $\nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial u^2} r + (1/r) \frac{\partial}{\partial u} r + (1/r^2) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \theta$ 。 $u = R(r) \cos(n\theta)$ とすると

$$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0, \quad R(r) = Ar^n + Br^{-n}.$$

- (2) $R(a) = 0$ は $B = -Aa^{2n}$ 。 $R(b) = V$ から

$$u(r, \theta) = V \frac{r^n - a^{2n} r^{-n}}{b^n - a^{2n} b^{-n}} \cos(n\theta).$$

$0 < a < r < b$ で滑らかであり、両端の条件を満たす。

- (3) 分子を微分すると $n(r^{n-1} + a^{2n} r^{-n-1})$ 。 従って

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} r \right|_{r=b} = \frac{nV}{b} \frac{b^{2n} + a^{2n}}{b^{2n} - a^{2n}} \cos(n\theta).$$

- (4) Green の第一恒等式と $\nabla^2 u = 0$ より

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dA = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

内側は $u(a, \theta) = 0$ だから寄与しない。 外側で $\int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) d\theta = \pi$ を使い

$$\mathcal{E} = \frac{\varepsilon \pi n V^2}{2} \frac{b^{2n} + a^{2n}}{b^{2n} - a^{2n}}.$$

- (5) $a \rightarrow 0$ では $u \rightarrow V(r/b)^n \cos(n\theta)$ 、 $\mathcal{E} \rightarrow \varepsilon \pi n V^2 / 2$ 。 二つの解の差 w は境界でゼロの調和関数であり、 $\int |\nabla w|^2 = 0$ より定数、境界条件から $w = 0$ 。 従って解は一意である。

確認・適用条件

$n \geq 1$ が必要。 $n = 0$ の場合の動径解は $A + B \ln r$ となり、本問の式とは異なる。

第2回 | 詳解：デルタ障壁・吸着相関・Foucault 振り子・Gaussian

第2回 第1問の解答 無限深井戸中央のデルタ障壁

(1) Schrödinger 方程式を $[-\epsilon, \epsilon]$ で積分する。 ψ は連続で

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2mg}{\hbar^2} \psi(0).$$

$g > 0$ では導関数に跳びがある。井戸壁では $\psi(\pm a) = 0$ 。

(2) 奇状態は $\psi(0) = 0$ なのでデルタ項が作用せず、 $\psi_n^{(-)}(x) = a^{-1/2} \sin(n\pi x/a)$ ($n = 1, 2, \dots$) となる。

$$E_n^{(-)} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}.$$

$\int_{-a}^a \sin^2(n\pi x/a) dx = a$ を使った。

(3) 偶状態を $\psi(x) = A \sin[k(a - |x|)]$ と書く。 $\psi(0) = A \sin(ka)$ 、 $\psi'(0^+) = -Ak \cos(ka)$ 、 $\psi'(0^-) = Ak \cos(ka)$ を接続式に代入すると

$$-k \cot(ka) = \frac{mg}{\hbar^2}.$$

エネルギーは $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$ である。 $g = 0$ なら $ka = (n + 1/2)\pi$ 。

(4) $g = 0$ の基底状態は $\psi_0(x) = a^{-1/2} \cos(\pi x/(2a))$ 、 $E_0 = \hbar^2 \pi^2 / (8ma^2)$ 。一次摂動論から

$$E_{\text{gs}} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} + \frac{g}{a} + O(g^2).$$

同じ結果は (3) を微分しても得られる。

(5) $g \rightarrow \infty$ では偶状態も $\psi(0) \rightarrow 0$ であり、箱が左右の長さ a の二領域に分割された極限になる。偶枝の基底波数は $ka \rightarrow \pi^-$ 、 $E \rightarrow \hbar^2 \pi^2 / (2ma^2)$ 。奇状態は全て g に依らず、その同じエネルギーへ偶枝が近づき、低い準位は二重縮退へ向かう。

確認・適用条件

デルタポテンシャルでは ψ' が不連続。有限矩形障壁での接続条件をそのまま使わない。

第2回 第2問の解答 相互作用する二サイト吸着

- (1) 配置 00, 10, 01, 11 の重みは $1, z, z, wz^2$ なので

$$\Xi = 1 + 2z + wz^2.$$

- (2) 占有数 $N = n_1 + n_2$ について

$$\langle N \rangle = z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi = \frac{2z + 2wz^2}{\Xi}.$$

対称性で $\langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle = (z + wz^2)/\Xi$ 。

- (3) 同時占有確率は $\langle n_1 n_2 \rangle = wz^2/\Xi$ 。従って

$$\text{Cov}(n_1, n_2) = \frac{(w-1)z^2}{\Xi^2}.$$

$J > 0$ なら正の協同吸着、 $J = 0$ なら独立で共分散ゼロになる。

- (4) $\partial_\mu = \beta z \partial_z$ だから

$$\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu} = \beta \text{Var}(N), \quad \text{Var}(N) = \frac{2z + 4wz^2}{\Xi} - \left(\frac{2z + 2wz^2}{\Xi} \right)^2.$$

分配関数からの二階微分 $\partial_{\beta\mu}^2 \ln \Xi$ で導ける。

- (5) $\eta = \mu + \epsilon$ と置く。零温度での grand energy は $N = 0, 1, 2$ に対して $0, -\eta, -2\eta - J$ 。 $J > 0$ なら $\eta = -J/2$ で $N = 0$ と 2 が入れ替わり、 $N = 1$ のエネルギーは $J/2 > 0$ 。従って $\mu = -\epsilon - J/2$ を境に零占有から二重占有へ飛ぶ。

確認・適用条件

本問では N が揺らぐ大正準系である。 $\partial_\mu \langle N \rangle$ と分散の関係は、温度と J, ϵ を固定して微分する。

第2回 第3問の解答 Foucault 振り子

- (1) 水平成分に対して小変位の復元加速度は $-\omega_0^2(x, y)$ 。回転系の Coriolis 加速度は $-2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}$ である。鉛直自転成分のみを残すと

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\Omega_z \dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\Omega_z \dot{x}.$$

x が東、 y が北、 z が上の右手座標系を仮定した。

- (2) $z = x + iy$ とすれば二式を足して

$$\ddot{z} + 2i\Omega_z \dot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

$z = e^{-i\Omega_z t} w$ と置くと $\ddot{w} + (\omega_0^2 + \Omega_z^2)w = 0$ へ変形できる。

- (3) $\omega_{\text{eff}} = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_z^2}$ とすると解は

$$z(t) = e^{-i\Omega_z t} (Ae^{i\omega_{\text{eff}} t} + Be^{-i\omega_{\text{eff}} t}).$$

回転方向が逆の二つの正の周波数は $\omega_{\pm} = \omega_{\text{eff}} \pm \Omega_z$ (大小は Ω_z の符号による)。

- (4) $\Omega_z/\omega_0 \ll 1$ なら $\omega_{\text{eff}} = \omega_0 + O(\Omega_z^2/\omega_0)$ 。速い振動に対する包絡の方向は $e^{-i\Omega_z t}$ で回るので

$$\dot{\varphi}_{\text{plane}} = -\Omega \sin \lambda.$$

北半球では上から見て時計回りの歳差となる。

- (5) 赤道 $\lambda = 0$ では $\Omega_z = 0$ で一次の歳差なし。北極 $\lambda = \pi/2$ では $-\Omega$ で一恒星日に一周する。小振幅、 $\Omega \ll \omega_0$ および水平自転成分・遠心力補正・地球曲率効果を見捨てた近似である。

確認・適用条件

回転角速度の符号は座標の向きで変わる。東向き x 、北向き y を固定して判定する。

第2回 第4問の解答 二変数 Gaussian と Schur 補元

- (1) 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ の主小行列式は $a > 0, D = ab - c^2 > 0$ だから正定値。

$$ax^2 + 2cxy + by^2 = b \left(y + \frac{c}{b}x \right)^2 + \left(a - \frac{c^2}{b} \right) x^2.$$

- (2) y, x の順に一次元 Gaussian 積分すると

$$Z = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta b}} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta(a - c^2/b)}} = \frac{2\pi}{\beta\sqrt{D}}.$$

- (3) 一般に Gaussian 重み $\exp[-\beta \mathbf{x}^T A \mathbf{x}/2]$ の共分散は $\beta^{-1} A^{-1}$ である。 $A^{-1} = D^{-1} \begin{pmatrix} b & -c \\ -c & a \end{pmatrix}$ だから

$$\langle x^2 \rangle = \frac{b}{\beta D}, \quad \langle xy \rangle = -\frac{c}{\beta D}, \quad \langle y^2 \rangle = \frac{a}{\beta D}.$$

- (4) y を積分消去すると x の重みは $\exp\left[-\frac{\beta}{2}(a - c^2/b)x^2\right]$ 。したがって

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{\beta(a - c^2/b)}.$$

これは Schur 補元の一般例である。

- (5) 固定 x の条件付き Gaussian は平均を $y = -cx/b$ に持つので $\mathbb{E}[y | x] = -cx/b$ 。また

$$\frac{\partial}{\partial c} \ln Z = \frac{c}{D} = -\beta \langle xy \rangle.$$

最後の等号は $\partial_c Q = xy$ を用いた統計的恒等式でも導ける。

確認・適用条件

$D \downarrow 0$ で分散が発散し、Gaussian 積分は正規化不能に近づく。正定値性を最初に確認する。

第3回 | 詳解: Landau 準位・二次元 Bose 統計・接地球・Jordan 応答

第3回 第1問の解答 一様磁場中の二次元荷電粒子

- (1) $\pi_x = p_x, \pi_y = p_y - qBx$ だから $[p_x, x] = -i\hbar$ より

$$[\pi_x, \pi_y] = i\hbar qB.$$

正負の電荷や磁場向きを変えると交換子の符号も変わる。

- (2) y 運動量の固有値は $\hbar k$ である。

$$H_k = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{(\hbar k - qBx)^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2}{2}(x - x_0)^2, \quad x_0 = \frac{\hbar k}{qB}.$$

したがって一次元調和振動子に帰着する。

- (3) 調和振動子の準位から

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, \dots$$

x_0 は k に依存するが E_n は依存しないので大きな縮退が生じる。

- (4) $k = 2\pi j/L_y$ なので隣り合う中心間隔は $\Delta x_0 = 2\pi\hbar/(qBL_y) = 2\pi\ell_B^2/L_y$ 。 $0 < x_0 < L_x$ の個数は

$$N_\phi \simeq \frac{L_x}{\Delta x_0} = \frac{qBA}{2\pi\hbar} = \frac{BA}{\Phi_0}, \quad \Phi_0 = h/q.$$

厳密な整数性・端の状態は境界条件に依存する。本式は広い試料での bulk 計数である。

- (5) $\phi = -E_x x$ 、ポテンシャルエネルギー $-qE_x x$ を加える。平方完成により

$$E_{n,k} = \hbar\omega_c(n + 1/2) - qE_x x_0 - \frac{(qE_x)^2}{2m\omega_c^2}.$$

$\hbar^{-1}\partial_k E_{n,k}$ から

$$v_y = -\frac{E_x}{B}.$$

古典的な $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2 = -E_x \hat{y}/B$ のドリフトと一致する。

確認・適用条件

有限試料での端状態は k 依存のエネルギーを持ち得る。ここでは bulk の Landau 準位を対象とする。

第3回 第2問の解答 二次元の理想 Bose 気体

- (1) $\epsilon < \epsilon_k$ を満たす k 空間の円の面積は πk^2 。状態密度の積分は $\mathcal{N}(\epsilon) = A\pi k^2/(2\pi)^2 = Am\epsilon/(2\pi\hbar^2)$ 。微分して

$$D(\epsilon) = \frac{Am}{2\pi\hbar^2} \quad (\epsilon > 0).$$

- (2) $N = \int_0^\infty D(\epsilon)[z^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1]^{-1} d\epsilon$ 。変数 $u = \beta\epsilon$ で積分すると

$$n = -\frac{1}{\lambda_T^2} \ln(1-z), \quad z = 1 - e^{-n\lambda_T^2}.$$

- (3) 有限温度で $z \uparrow 1$ とすると励起状態数密度 $-\lambda_T^{-2} \ln(1-z) \rightarrow \infty$ 。三次元のような有限の臨界励起密度が存在しないため、熱力学極限で任意の $T > 0$ に巨視的な基底状態占有が必然となることはない。

- (4) $\mu = k_B T \ln z$ から

$$\mu(T) = k_B T \ln(1 - e^{-n\lambda_T^2}) < 0.$$

$T \rightarrow 0^+$ で $n\lambda_T^2 \rightarrow \infty$ ゆえに $\ln(1-x) \sim -x$ を使って

$$\mu \sim -k_B T e^{-n\lambda_T^2}.$$

- (5) $-\ln(1-x) = \sum_{j \geq 1} x^j/j$ 、 $\text{Li}_2(z) = \sum_{j \geq 1} z^j/j^2$ より

$$\ln \Xi = - \int D(\epsilon) \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon}) d\epsilon = \frac{A}{\lambda_T^2} \text{Li}_2(z).$$

$P = k_B T \ln \Xi / A$ と $U = \int \epsilon D(\epsilon) n_B(\epsilon) d\epsilon$ を計算すると

$$P = \frac{k_B T}{\lambda_T^2} \text{Li}_2(z), \quad U = PA.$$

二次元の自由粒子の分散 $\epsilon \propto k^2$ と整合する。

確認・適用条件

有限サイズでは基底占有が顕著になるクロスオーバーがあり得る。ここでの「有限温度 Bose 凝縮なし」は一樣・理想・熱力学極限についての言明。

第3回 第3問の解答 接地導体球と鏡像法

- (1) 点電荷が $z = d$ にあるとき、内部 $z = b$ に

$$b = \frac{a^2}{d}, \quad q' = -\frac{a}{d}q$$

を置く。球面上の点 $\mathbf{r}$ では $|\mathbf{r} - b\hat{z}| = (a/d)|\mathbf{r} - d\hat{z}|$ なので電位の二項が相殺される。

- (2) 接地境界を満たす外部電位は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - d\hat{z}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - b\hat{z}|} \right) \quad (r \geq a).$$

内側の鏡像電荷は実際に存在する電荷ではなく、球外の一意的な解を表す数学的道具である。

- (3) 無限遠で見ると電位の $1/r$ 係数は $q + q'$ 。実際の点電荷 q を除いた導体表面の全誘導電荷は

$$Q_{\text{ind}} = q' = -\frac{a}{d}q.$$

- (4) 作用する力は鏡像電荷からの Coulomb 力に等しく、 $q' < 0$ だから球へ引かれる。

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2 ad}{4\pi\epsilon(d^2 - a^2)^2} \hat{z}.$$

導体表面の電荷分布が位置 d で再配置されるため、エネルギーは鏡像相互作用エネルギーの半分であり

$$U(d) = \frac{1}{2} \frac{qq'}{4\pi\epsilon(d-b)} = -\frac{q^2 a}{8\pi\epsilon(d^2 - a^2)}.$$

$-\partial_d U$ は上記の力と一致する。

- (5) 全電荷 0 の孤立導体球には、元の鏡像電荷に加えて球中心に $q_c = -q' = qa/d$ を置く。追加した中心電荷の電位は球面上一定なので導体条件を保ち、鏡像の総電荷が 0 となる。ただし導体球の電位は接地時の 0 ではなくなる。

確認・適用条件

誘導電荷のエネルギーをそのまま $qq'/(4\pi\epsilon r)$ とすると 2 倍誤る。鏡像法で導体の移動・変形仕事を扱う際は注意。

第3回 第4問の解答 Jordan ブロックの時間応答

(1) 特性多項式は $(\lambda + \gamma)^2$ 、固有値は $-\gamma$ の重根。 $A + \gamma I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の零空間は一次元 $\text{span}(1, 0)^T$ 。従って固有ベクトルが一つしかなく対角化できない。

(2) $A = -\gamma I + N$ 、 $N^2 = 0$ なので

$$e^{At} = e^{-\gamma t}(I + tN) = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 初期条件を作用させると

$$x_1(t) = Fte^{-\gamma t}, \quad x_2(t) = Fe^{-\gamma t}.$$

固有値は負でも Jordan ブロックにより t の多項式因子が現れる。

(4) $F > 0$ とする ($F < 0$ なら「最大」の解釈が変わる)。 $x'_1 = Fe^{-\gamma t}(1 - \gamma t)$ なので $t_* = 1/\gamma$ 、

$$x_1(t_*) = F/(e\gamma).$$

さらに積分によって $\int_0^\infty x_1(t) dt = F/\gamma^2$ 。

(5) $\det(A_\delta - \lambda I) = (\lambda + \gamma)^2 - \delta$ なので

$$\lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\delta}.$$

$\delta > 0$ なら漸近安定性は両固有値の実部が負である条件 $0 < \delta < \gamma^2$ に等しい。 $\delta < 0$ では共役複素数で実部 $-\gamma < 0$ になる。

確認・適用条件

重根であることだけでは Jordan ブロックは決まらない。固有空間の次元も調べる。

第 4 回 | 詳解：波束・硬球気体・対称コマ・Legendre 多重極

第 4 回 第 1 問の解答 Gaussian 波束と一様外力

- (1) $|\psi(x, 0)|^2 = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp[-x^2/(2\sigma^2)]$ で規格化は 1。微分演算子 $p = -i\hbar\partial_x$ を作用させると

$$\langle x \rangle_0 = 0, \langle p \rangle_0 = p_0, \Delta x = \sigma, \Delta p = \frac{\hbar}{2\sigma}.$$

$\Delta x \Delta p = \hbar/2$ の最小不確定性波束である。

- (2) 自由 Heisenberg 方程式 $\dot{x} = p/m, \dot{p} = 0$ から $x(t) = x(0) + p(0)t/m$ 。よって

$$\langle x \rangle_t = \frac{p_0}{m}t, \quad \langle p \rangle_t = p_0.$$

- (3) 初期状態の対称化相関 $\langle \{\delta x, \delta p\} \rangle_0 / 2 = 0$ を使う。

$$\text{Var}(x(t)) = \text{Var}(x_0) + \frac{t^2}{m^2} \text{Var}(p_0) + \frac{t}{m} \langle \{\delta x, \delta p\} \rangle_0.$$

最後の項はゼロなので

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \sigma^2}.$$

- (4) $H_F = p^2/(2m) - Fx$ なので $\dot{p} = F, \dot{x} = p/m$ 。

$$\langle p \rangle_t = p_0 + Ft, \quad \langle x \rangle_t = \frac{p_0 t}{m} + \frac{F t^2}{2m}.$$

古典粒子の重心運動と同じになる (Ehrenfest の定理)。

- (5) 自由解 $\psi_0(x, t)$ を初期状態から時間発展した解とすると

$$\psi_F(x, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(Ftx - \frac{F^2 t^3}{6m}\right)\right] \psi_0\left(x - \frac{F t^2}{2m}, t\right).$$

これを Schrödinger 方程式に代入すれば確かめられる。前因子は位相のみ、引数は平行移動のみなので $\text{Var}_F(x)_t = \sigma_t^2$ である。

確認・適用条件

幅の式は初期の x - p 相関がゼロの Gaussian に対するもの。外力が空間的に一定という条件が重要。

第4回 第2問の解答 硬球気体の第二ビリアル係数

- (1) 無限斥力の領域では $e^{-\beta u} = 0$ 、それ以外は 1 である。

$$f(r) = \begin{cases} -1 & (r < d), \\ 0 & (r \geq d). \end{cases}$$

- (2) Mayer 関数の積分は半径 d の球の体積の負。

$$B_2 = -\frac{1}{2}(-4\pi d^3/3) = \frac{2\pi d^3}{3}.$$

$B_2 > 0$ は排除体積の効果を示す。

- (3) クラスター展開の密度の二次まで保持すると

$$P = nk_B T (1 + B_2 n + O(n^2 d^6)).$$

理想気体より圧力が増える。次のビリアル係数の寄与は圧力で $O(n^3)$ である。

- (4) 熱的波長 $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ 、 $F_H = F_{id} + \Delta F$ 。 $P = -(\partial F_H / \partial V)_{T,N}$ を積分すると

$$F_H = N k_B T [\ln(n \lambda_T^3) - 1 + B_2 n] + O(N k_B T n^2 d^6).$$

$\mu = (\partial F_H / \partial N)_{T,V}$ で

$$\mu = k_B T [\ln(n \lambda_T^3) + 2B_2 n] + O(k_B T n^2 d^6).$$

- (5) 硬球相互作用は許容配置で $u = 0$ 、禁制配置で統計重みが 0。 B_2 は温度に依存しないので $U = F_H - T(\partial F_H / \partial T)_{V,N}$ は

$$U = \frac{3}{2} N k_B T$$

(本近似の古典硬球模型では厳密)。圧力の正補正は内部エネルギーの上昇ではなく、粒子が占有できる配置空間の減少に由来する。

確認・適用条件

低密度条件 $nd^3 \ll 1$ が展開パラメータ。硬球の「直径 d 」と「半径 d 」を混同すると B_2 が 8 倍ずれる。

第4回 第3問の解答 重い対称コマの定常歳差

(1) $L = T - V$ だから

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta.$$

L は ϕ, ψ 自体を含まないので両者は循環座標である。

(2) $\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$ と置けば

$$\boxed{p_\psi = I_3 \omega_3 =: s}, \quad \boxed{p_\phi = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + s \cos \theta =: m_z}.$$

鉛直角運動量と対称軸角運動量に相当する保存量である。

(3) $\dot{\phi} = (m_z - s \cos \theta)/(I_1 \sin^2 \theta)$ をエネルギー $E = T + V$ へ代入する。 $\dot{\psi}$ は $\omega_3 = s/I_3$ で表せるので

$$\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) = E, \quad \boxed{V_{\text{eff}} = \frac{(m_z - s \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{s^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta}.$$

$0 < \theta < \pi$ を仮定する。

(4) θ を一定にし、 $\dot{\theta} = 0, \dot{\phi} = \Omega_p$ とした Euler-Lagrange 方程式 $\partial L / \partial \theta = 0$ から

$$\sin \theta [I_1 \Omega_p^2 \cos \theta - s \Omega_p + Mgl] = 0.$$

$0 < \theta < \pi$ で

$$\boxed{I_1 \cos \theta \Omega_p^2 - s \Omega_p + Mgl = 0}.$$

$\cos \theta > 0$ では判別式 $s^2 - 4I_1 Mgl \cos \theta \geq 0$ が実歳差の条件。

(5) $s^2 \gg 4I_1 Mgl |\cos \theta|$ の速い自転では、二根のうち小さい根が

$$\boxed{\Omega_{\text{slow}} \simeq \frac{Mgl}{s}}.$$

重力トルクの大きさ $Mgl \sin \theta$ と角運動量 s の方向変化率 $s \Omega_p \sin \theta$ の釣り合いとしても解釈できる。

確認・適用条件

対称コマの定常歳差と微小な θ 振動（章動）は別問題。 $\cos \theta = 0$ のときは二次方程式が一次へ退化する。

第4回 第4問の解答 Legendre 多項式と球面多重極

- (1) 二項展開 $(1+u)^{-1/2} = 1 - u/2 + 3u^2/8 + \dots$ に $u = -2xt + t^2$ を代入すると

$$G = 1 + xt + \frac{1}{2}(3x^2 - 1)t^2 + \dots, \quad \boxed{P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = (3x^2 - 1)/2}.$$

- (2) 方程式は

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_\ell}{dx} \right] + \ell(\ell+1)P_\ell = 0}.$$

二つの次数 $\ell \neq m$ の式を互いに掛けて引き、 $[-1, 1]$ 上で積分する。 $1-x^2$ が端で消えるので境界項は 0 であり、固有値 $\ell(\ell+1)$ が異なることから $\int P_\ell P_m dx = 0$ となる。

- (3) P_0 は積分 2、 P_1 は $\int x^2 dx = 2/3$ 、 P_2 は多項式を二乗して積分すれば $2/5$ 。一般式は

$$\boxed{\int_{-1}^1 P_\ell(x)^2 dx = \frac{2}{2\ell+1}}.$$

- (4) $r_< = \min(r, r')$ 、 $r_> = \max(r, r')$ 、 $\cos \gamma = \hat{r} \cdot \hat{r}'$ とすれば

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r_>} \left(1 - 2 \frac{r_<}{r_>} \cos \gamma + \frac{r_<^2}{r_>^2} \right)^{-1/2}$$

である。母関数を使って

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r_>} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^\ell P_\ell(\cos \gamma)}.$$

- (5) 球面電荷の各 ℓ 成分を積分すると、球外の係数は $\sigma_\ell a^{\ell+2}/[(2\ell+1)\epsilon r^{\ell+1}]$ 。今回 $\ell = 0, 2$ のみなので

$$\boxed{\phi(r, \theta) = \frac{\sigma_0 a^2}{\epsilon r} + \frac{\sigma_2 a^4}{5\epsilon r^3} P_2(\cos \theta) \quad (r > a)}.$$

全電荷は $Q = 4\pi a^2 \sigma_0$ 、四重極項は r^{-3} で減衰する。

確認・適用条件

角度多重極の係数は $2\ell+1$ を伴う。 P_2 成分の全電荷は直交性により 0 である。

第5回 | 詳解：二スピン系・二状態 Markov 過程・電子プラズマ・離散拡散

第5回 第1問の解答 二つのスピン $1/2$ の交換相互作用

- (1) $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = [\mathbf{S}^2 - \mathbf{s}_1^2 - \mathbf{s}_2^2]/2$, $\mathbf{s}_i^2 = 3/4$. 全スピン $S = 0$ の一重項 $|s\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ は

$$E_s = -\frac{3J}{4}.$$

$S = 1$ の三重項 $|t_1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$, $|t_0\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$, $|t_{-1}\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$ は $E_{t_m} = J/4 - hm$ ($m = 1, 0, -1$)。

- (2) 4 状態の Boltzmann 重みの和で

$$Z = e^{3\beta J/4} + e^{-\beta J/4}(1 + 2 \cosh \beta h).$$

$J > 0, h = 0$ の基底状態は一重項である。

- (3) $M = \beta^{-1} \partial_h \ln Z$ なので

$$M = \frac{2e^{-\beta J/4} \sinh(\beta h)}{Z}.$$

感受率 $\chi = \partial_h M|_{h=0}$ は

$$\chi_0 = \frac{2\beta}{e^{\beta J} + 3}.$$

低温で $\chi_0 \rightarrow 0$ となるのはスピンギャップ J のためである。

- (4) $h = 0$ で一重項の重み $P_s = e^{3\beta J/4}/Z_0 = e^{\beta J}/(e^{\beta J} + 3)$ 、三重項全体の重み $1 - P_s$ 。一重項では相関 $-3/4$ 、三重項では $1/4$ なので

$$\langle \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \rangle = -\frac{3}{4}P_s + \frac{1}{4}(1 - P_s) = \frac{1}{4} - P_s.$$

- (5) $h = 0$ の密度行列は $\rho = P_s|s\rangle\langle s| + (1 - P_s)P_t/3$ (P_t は三重項への射影)。積基底で第二スピンを部分転置すると、固有値は一つが $1/2 - P_s$ 、残りの三つが $(1 + 2P_s)/6$ 。後者は常に正で、前者が負になるのは $P_s > 1/2$ すなわち $e^{\beta J} > 3$ 。従って

$$T < \frac{J}{k_B \ln 3} \quad (\text{エンタングルメントあり}).$$

二量子ビットでは部分転置の正值性が分離可能性の必要十分条件である。

確認・適用条件

+ α は (5) のみ。(1)–(4) は角運動量の合成、分配関数、応答という標準的な基礎問題である。

第 5 回 第 2 問の解答 二状態 Markov 過程と線形応答

- (1) 状態 0 からの流入が $a(1-p)$ 、状態 1 からの流出が bp だから

$$\dot{p} = a(1-p) - bp = a - (a+b)p.$$

- (2) $\gamma = a+b$ と置けば固定点は $p_* = a/\gamma$ 。一次線形 ODE の解は

$$p(t) = p_* + [p(0) - p_*]e^{-\gamma t}.$$

γ^{-1} が緩和時間である。

- (3) 定常状態で $\mathbb{E}[n(t) | n(0) = 1] = p_* + (1-p_*)e^{-\gamma t}$ ($t \geq 0$)。よって

$$\langle n(t)n(0) \rangle = p_*^2 + p_*(1-p_*)e^{-\gamma t}.$$

時間反転対称な二状態平衡鎖では $t < 0$ も同じとなり

$$C(t) = p_*(1-p_*)e^{-\gamma|t|}.$$

- (4) 詳細釣り合い $a/b = e^{-\beta(\Delta-h)}$ から $p_* = 1/[1 + e^{\beta(\Delta-h)}]$ 。微分して

$$\chi_{\text{eq}} = \frac{\partial p_*}{\partial h} = \beta p_*(1-p_*) = \beta \text{Var}(n).$$

ここでは n は古典的な確率変数なので通常の揺らぎ応答公式がそのまま適用できる。

- (5) 総率が一定の模型として $a(h) = \gamma p_{\text{eq}}(h)$ 、 $b(h) = \gamma[1-p_{\text{eq}}(h)]$ と取れる。線形化で $\dot{\delta p} + \gamma \delta p = \gamma \chi_{\text{eq}} \delta h(t)$ 。
 $\delta h(t) \propto e^{-i\omega t}$ とすると

$$\chi(\omega) = \frac{\delta p_\omega}{\delta h_\omega} = \frac{\gamma}{\gamma - i\omega} \chi_{\text{eq}}.$$

$\omega \rightarrow 0$ で静的感受率へ、 $|\omega| \gg \gamma$ では応答の振幅が小さくなる。

確認・適用条件

周波数応答の分母 $\gamma \mp i\omega$ は $e^{\mp i\omega t}$ という時間依存の規約で変化する。

第5回 第3問の解答 冷たい電子プラズマ中の電磁波

- (1) 電子の運動方程式 $m\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E}$ 。時間依存 $e^{-i\omega t}$ で $-i\omega m\mathbf{v}_0 = -e\mathbf{E}_0$ なので

$$\boxed{\mathbf{v}_0 = -i\frac{e}{m\omega}\mathbf{E}_0}, \quad \boxed{\mathbf{j}_0 = -n_e e\mathbf{v}_0 = i\frac{n_e e^2}{m\omega}\mathbf{E}_0}.$$

- (2) Maxwell の Ampère 方程式の導電電流を電束の項へまとめる。

$$-i\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E}_0 = \mathbf{j}_0 - i\omega\varepsilon_0\mathbf{E}_0, \quad \boxed{\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}.$$

非磁性 $\mu = \mu_0$ から $k^2 = \mu_0\varepsilon(\omega)\omega^2$ すなわち

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2}.$$

- (3) $\omega > \omega_p$ では $k = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}/c$ が実であり

$$\boxed{v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}}, \quad \boxed{v_g = \frac{d}{d\omega}k = c\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}.$$

$v_{\text{ph}}v_g = c^2$ だが、群速度は狭帯域波束の包絡の伝搬速度を表す。信号先端（情報先端）の速度と一般には同一視できない。この無損失・冷たいプラズマ模型では、伝搬帯の群速度は平均エネルギー流速と一致する。

- (4) $\omega < \omega_p$ では $k = i\kappa$ 、 $\kappa = \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}/c$ を選べば、 $z > 0$ の波は $e^{-\kappa z}$ と減衰する。

$$\boxed{\ell_{\text{pen}} = \frac{1}{\kappa} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}}.$$

この無衝突理想模型には吸収減衰ではなく遮断（evanescence）が生じる。

- (5) $\omega > \omega_p$ の平面波について $|B_0| = k|E_0|/\omega$ 、 $|v_0| = e|E_0|/(m\omega)$ 。平均エネルギー密度は

$$\bar{u} = \frac{\varepsilon_0|E_0|^2}{4} + \frac{|B_0|^2}{4\mu_0} + \frac{n_e m |v_0|^2}{4}.$$

後二項は $\varepsilon_0|E_0|^2(1 - \omega_p^2/\omega^2)/4$ および $\varepsilon_0|E_0|^2\omega_p^2/(4\omega^2)$ であり

$$\boxed{\bar{u} = \frac{\varepsilon_0|E_0|^2}{2}}.$$

確認・適用条件

無衝突・冷たい・固定イオン背景という近似である。衝突や熱運動を考慮すると分散・減衰則が変わる。群速度は一般の情報先端速度を与えない。

第 5 回 第 4 問の解答 周期格子の離散拡散

- (1) $u_j = e^{i\theta_k j}$ 、 $\theta_k = 2\pi k/N$ とすると離散 Laplacian の固有値は $e^{i\theta_k} - 2 + e^{-i\theta_k} = -4 \sin^2(\theta_k/2)$ なので

$$\lambda_k = -\frac{4D}{a^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

- (2) 初期 Fourier 係数 $\hat{u}_k(0) = N^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} u_j(0) e^{-i2\pi k j/N}$ を使う。モード独立なので

$$u_j(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k(0) e^{\lambda_k t} e^{i2\pi k j/N}.$$

実初期値なら $\hat{u}_{N-k} = \overline{\hat{u}_k}$ で実解を得る。

- (3) 和を取れば $\sum_j (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) = 0$ 。従って $\bar{u}(t) = \bar{u}(0) = \hat{u}_0(0)$ 。 $k \neq 0$ では $\sin^2(\pi k/N) > 0$ ゆえ $\lambda_k < 0$ で指数減衰する。

- (4) 最小の非零 $|\lambda_k|$ は $k = 1$ (または $N-1$) であり

$$\tau = \frac{a^2}{4D \sin^2(\pi/N)}.$$

$N \gg 1$ で $\sin(\pi/N) \sim \pi/N$ だから $\tau \rightarrow L^2/(4\pi^2 D)$ 。円周長 L の連続拡散と一致する。

- (5) 左辺を全格子で足すと 0 なので必要条件是 $\sum_j f_j = 0$ 。 f を離散 Fourier 変換し、 $k \neq 0$ に対して固有値で割ると

$$\hat{u}_k = \frac{a^2 \hat{f}_k}{4 \sin^2(\pi k/N)} \quad (k \neq 0), \quad \hat{u}_0 = 0.$$

これが平均ゼロの一意解であり、条件が破れれば解は存在しない。

確認・適用条件

保存則は零固有値に対応する。Poisson 方程式は逆行列を機械的に使う前に、零モードとの直交条件を確認する。

出題設計・優先学習テーマ

本集の題材は大学から予告された出題内容ではなく、過去問に頻出する**基礎原理を初見設定で使わせる**という一般的な作問技法を意識して選定したものである。

回	量子力学	統計力学	電磁気学／力学・数学
1	量子リングと磁束	Einstein 固体と状態数	理想ソレノイド、円環 Laplace 方程式
2	中央デルタ障壁	相互作用する吸着サイト	Foucault 振り子、Gaussian 行列
3	Landau 準位	二次元 Bose 気体	接地導体球、Jordan ブロック
4	自由 Gaussian 波束	硬球ビリアル展開	対称コマ、Legendre 多重極
5	二スピン交換相互作用	二状態 Markov 過程	冷たい電子プラズマ、離散拡散

高優先度：初見でも応用しやすい基礎

- **固有値問題**：量子リング、Landau 準位、Jordan ブロック、離散 Fourier モード。対称性・境界条件・縮退の判定を最初に行う。
- **熱力学的導出**：微視状態数、相互作用する少数自由度、二次元 Bose 統計、ビリアル係数。分配関数の微分と近似条件を区別する。
- **保存則と境界条件**：誘導電場と Poynting、鏡像法、対称コマ、周期拡散。エネルギーの流れ・境界値の一意性を検算に使う。
- **量の定義**：電流、磁化率、状態密度、相関関数、群速度。符号規約と物理的単位を最終式で必ず確認する。

発展問題の選び方

話題性のある量子情報（第 5 回第 1 問 (5)）は $+\alpha$ とし、その問題を落としても標準の 19 大問と残る小問で十分に基礎を練習できる構成にした。どの題材が出題されるかについて**統計的な確率や的中保証は主張しない**。

出典・権利・改訂について

本書の問題および解答は本書用に独立作成したものであり、大学の過去問原文を転載していない。過去問題と最新の試験構成に関する一次情報の確認先は<https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/about/147/>とhttps://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/g_info/49259/。独自の解答には誤りが残る可能性があり、数式の限定検査は全小問の外部査読を意味しない。