

東大院試の物理 公式集

数学・量子力学・統計力学・電磁気学・力学

公式の定義／適用条件／解法の入口／落とし穴

この公式集の目的

過去問で繰り返し必要になる計算道具を素早く検索し、「どの公式を、いつ、どの前提で使うか」まで確認できるようにまとめた学習用資料。教科書『東大院への物理』（135 ページ校正版）と同じ符号規約・適用条件で使えるように整えた。

重要：東京大学が編集・公認した資料ではありません。また、試験会場への持ち込み可否を示すものではありません。年度別主題の対応は作業用索引に基づき、全小問の照合を終えたことを意味しません。

Contents

1	使い方と表記・共通の定数	4
2	数学：すべての分野の共通基盤	5
2.1	固有値・スペクトル分解・射影	5
2.2	微積分・変分法・Gaussian 積分	6
2.3	Fourier 変換・畳み込み・デルタ関数	6
2.4	常微分方程式・Green 関数	7
2.5	偏微分方程式・固有関数展開	7
2.6	複素関数・漸近解析	8
2.7	確率・積分変換の便利な式	8
2.8	特殊関数・行列多項式の追加公式	9
3	量子力学：演算子・固有値・遷移	10
3.1	基本原理と波動関数	10
3.2	調和振動子・コヒーレント状態	11
3.3	角運動量・中心力	12
3.4	定常摂動論・縮退摂動	12
3.5	時間依存摂動・磁気共鳴	13
3.6	断熱時間発展・Berry 位相	14
3.7	散乱理論・WKB	14
3.8	周期ポテンシャル・磁場・ゲージ	14
3.9	密度行列と量子相関（過去問で必要な範囲）	15
3.10	古い年度も含む典型補助公式	16
4	統計力学：分配関数から応答まで	17
4.1	熱力学ポテンシャルと一般関係式	17
4.2	正準・大正準分配関数	17
4.3	古典理想気体・相空間	18
4.4	Bose–Einstein/Fermi–Dirac 統計	18
4.5	Bose 凝縮・トラップ・光格子の基礎	19
4.6	独立スピン・Curie 則・断熱消磁	20
4.7	Ising 模型・転送行列	20
4.8	Landau 理論・臨界現象	20
4.9	揺らぎ・拡散・Fokker–Planck	21
4.10	高分子・エントロピー弾性	21
5	電磁気学・力学：境界条件と保存則	23
5.1	Maxwell 方程式とポテンシャル	23
5.2	静電場と境界値問題	23
5.3	磁場・誘導・回路	24
5.4	電磁波・Fresnel 係数・導波管	25
5.5	Lorentz 力・運動する荷電粒子	26
5.6	特殊相対論・電磁場の変換	26
5.7	解析力学・正規振動	27
5.8	中心力・散乱・剛体	27
5.9	連続体・流体・波動	28
5.10	過去問の補助：冷たいプラズマ・運動する系	28
6	解法選択の最短ルート（実戦索引）	30

6.1	問題文から最初に選ぶ式	30
6.2	計算途中でやる 5 つの検算	30
6.3	頻出の等号が成立する条件	30
7	重要公式の適用条件・符号規約（教科書校正版と統一）	32
7.1	外力と仕事：符号の二つの規約	32
7.2	量子の静的感受率：等時刻分散とは限らない	32
7.3	密度状態数・縮退度・次元	33
7.4	反強磁性 Ising 鎖と固有値の符号	33
7.5	揺らぎ・確率分布を扱う時の例外	34
7.6	Bloch バンドと弱摂動の無次元条件	34
7.7	Fresnel 係数・境界条件の採用規約	34
7.8	固有時・散乱角・保存量の追加チェック	35
8	過去問解法への橋渡し：途中式で確かめる 8 例	36
8.1	例 1：非可換二準位系の感受率	36
8.2	例 2：独立二状態鎖の張力と伸長	36
8.3	例 3：Ising 鎖の相関が交替する場合	36
8.4	例 4：2 次元状態密度と Fermi エネルギー	36
8.5	例 5：周期デルタ列のバンド端の展開	36
8.6	例 6：Fresnel の接線電場での反射・透過	37
8.7	例 7：鏡像法の力とエネルギーの二分の一	37
8.8	例 8：低温 Fermi 気体の粒子数固定	37
8.9	最後に：問題を見たときの選択表	37
9	年度別主題索引・資料の範囲	38
9.1	古い年度と公開原題の扱い	40

1 使い方と表記・共通の定数

本書は「定理の証明集」ではなく、手計算を進めるための検索可能な公式帳である。各公式には単位系、境界条件、近似が必要なときの条件を付けた。まず独力で問題の保存則・対称性・固有空間を決め、その後に公式を参照する。

推奨する解答の順序：(1) 系と仮定を宣言、(2) 保存則・対称性を確認、(3) 方程式・境界条件を立て、(4) 次元・極限で検算、(5) 最後に数値代入。

基本定数と単位

$$\hbar = h/(2\pi), \quad \beta = (k_B T)^{-1}, \quad c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2},$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}, \quad \ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$$

条件・使い方：特に断らない限り SI 単位系。電荷は符号を持つ q 、素電荷の大きさは $e > 0$ と区別する。

主要ベクトル恒等式

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0, & \nabla \times (\nabla f) &= 0, \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \\ \nabla \cdot (f \mathbf{A}) &= \nabla f \cdot \mathbf{A} + f \nabla \cdot \mathbf{A}\end{aligned}$$

条件・使い方：領域と境界の正則性に注意。Gauss/Stokes で表面項を捨てるには条件が必要。

頻出の積分

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/(4a)}, \quad \Re a > 0, \\ \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-ax} dx &= \frac{\Gamma(s)}{a^s}, \quad \Re a, \Re s > 0, \\ \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx &= \Gamma(s)\zeta(s), \quad \Re s > 1\end{aligned}$$

条件・使い方：積分の可積分性と Γ 関数の引数条件を先に確認。

典型的な符号ミス： Fourier 変換の $e^{\pm ikx}$ 、時間依存の $e^{-i\omega t}$ 、Green 関数の方程式の前の $-$ 、電磁波の複素波数の虚部の符号。

2 数学：すべての分野の共通基盤

2.1 固有値・スペクトル分解・射影

Hermite 行列のスペクトル分解

$$H = H^\dagger = \sum_a \lambda_a P_a, \quad P_a P_b = \delta_{ab} P_a, \\ f(H) = \sum_a f(\lambda_a) P_a, \quad e^{tH} = \sum_a e^{t\lambda_a} P_a$$

条件・使い方：縮退があれば P_a は対応する固有空間への射影。非 Hermite 行列には一般にそのまま使えない。

2 次元 Hermite 行列

$$H = h_0 I + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad E_\pm = h_0 \pm |\mathbf{h}|, \\ P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm \hat{\mathbf{h}} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad \mathbf{h} \neq 0$$

条件・使い方：2 準位・Pauli 行列・Rabi 振動で頻出。 $|\mathbf{h}| = 0$ ではこの射影公式を使用しない。

Pauli 行列と反交換

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I + i\epsilon_{ijk} \sigma_k, \\ [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} I, \\ (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})I + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

条件・使い方：係数 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は実ベクトルでも複素ベクトルでも代数恒等式として成立。

2 準位の時間発展

$$e^{-it\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma}/\hbar} = I \cos \frac{|\mathbf{h}|t}{\hbar} - i \frac{\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{h}|} \sin \frac{|\mathbf{h}|t}{\hbar}$$

条件・使い方：時間独立 $\mathbf{h}$ 。磁場中スピン、磁気共鳴、測定の基底変換に使用。

行列式・逆行列の更新

$$\det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \det A (1 + \mathbf{v}^T A^{-1} \mathbf{u}), \\ (A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} \mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T A^{-1} \mathbf{u}}$$

条件・使い方： A が可逆で、後式の分母が非零。散乱の接触相互作用・境界条件で有効。

Schur 補元

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad S_D = D - CA^{-1}B, \\ \det M = \det A \det S_D$$

条件・使い方：ブロック A が可逆。2 自由度以上の振動、分配関数の Gaussian 積分の整理に利用。

Jordan 鎖と行列指数

$$A = \lambda I + N, \quad N^r = 0, \\ e^{tA} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k N^k}{k!}$$

条件・使い方：対角化できない場合。多重根から $te^{\lambda t}$ が現れる。

2.2 微積分・変分法・Gaussian 積分

多次元 Gaussian 積分

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{J}^T \mathbf{x}} d^n x = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2}\mathbf{J}^T A^{-1} \mathbf{J}},$$

$$\langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle = (A^{-1})_{ij}$$

条件・使い方： A は実対称正定値。Feynman 積分・正規振動・古典統計で用いる。

汎関数の Euler–Lagrange 方程式

$$\delta \int \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = 0 \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0$$

条件・使い方：境界で変分 $\delta q = 0$ または自然境界条件を課す。

Lagrange 未定乗数と制約

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_a \lambda_a \nabla g_a(\mathbf{x}), \quad g_a(\mathbf{x}) = 0$$

条件・使い方：制約面の接空間で一次変分が消える条件。極小・極大の判定は二次変分が必要。

ガウス積分の微分生成

$$I(a, b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/(4a)},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2+bx} dx = \frac{\partial^n I(a, b)}{\partial b^n}$$

条件・使い方：積分区間は全実線、 $\Re a > 0$ 。期待値と高次モーメントを迅速に求める。

Gamma/Beta 関数

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

条件・使い方：指数や球面積分で自然に現れる。

2.3 Fourier 変換・畳み込み・デルタ関数

採用する Fourier 規約

$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx,$$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{ikx},$$

$$\widetilde{\partial_x f(k)} = ik \tilde{f}(k)$$

条件・使い方：積分の収束は通常の意味または tempered distribution として解釈。

変換の重要な対

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-k^2/(4a)} \quad (a > 0),$$

$$\mathcal{F}[\delta(x-a)] = e^{-ika},$$

$$\mathcal{F}[f * g] = \tilde{f} \tilde{g}$$

条件・使い方：デルタ関数の正規化と 2π を確認。

Fourier 直交・Poisson 和公式

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ikx} dx = 2\pi\delta(k),$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nL) = \frac{1}{L} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{f}\left(\frac{2\pi m}{L}\right)$$

条件・使い方：十分な減衰・正則性、または分布として。周期系の許容波数 $k_m = 2\pi m/L$ に注意。

2.4 常微分方程式・Green 関数

定数係数の 2 階方程式

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)/m,$$

$$x_h(t) = e^{-\gamma t}(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t),$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

条件・使い方：表示した x_h は不足減衰 $\omega_0 > \gamma$ 。臨界・過減衰は特性根で処理。

因果的 Green 関数

$$(\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2)G_R(t) = \delta(t),$$

$$G_R(t) = \theta(t) \frac{e^{-\gamma t} \sin \Omega t}{\Omega},$$

$$x(t) = x_h(t) + \int_{-\infty}^t \frac{G_R(t-t')F(t')}{m} dt'$$

条件・使い方： $\omega_0 > \gamma$ 、 $G_R(0^+) = 0$, $G'_R(0^+) = 1$ 。初期値の扱いは x_h に含める。

Sturm–Liouville 形式

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = \lambda w(x)y,$$

$$\int_a^b w(x)y_m(x)y_n(x)dx = 0 \quad (\lambda_m \neq \lambda_n)$$

条件・使い方： $p, w > 0$ 、自己共役境界条件を仮定。Bessel/Legendre・波動方程式の固有関数展開に使う。

2.5 偏微分方程式・固有関数展開

熱方程式の基本解（1 次元）

$$\partial_t u = D\partial_x^2 u,$$

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(x-y)^2/(4Dt)}}{\sqrt{4\pi Dt}} u_0(y) dy \quad (t > 0)$$

条件・使い方： $D > 0$ 、無限直線。有限領域では境界条件に合わせた固有関数が必要。

波動方程式（d'Alembert 公式）

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u,$$

$$u(x, t) = \frac{u_0(x-ct) + u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds$$

条件・使い方：無限直線、初期値 $u(x, 0) = u_0(x)$, $u_t(x, 0) = v_0(x)$ 。

Laplace・Helmholtz の自由 Green 関数

$$\begin{aligned}\nabla^2 \frac{1}{r} &= -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r}), \\ (\nabla^2 + k^2) \frac{e^{ikr}}{r} &= -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

条件・使い方：後式は外向き放射条件を選ぶ $k > 0$ の Green 関数。

1 階 PDE の特性曲線

$$\begin{aligned}\partial_t u + a(u)\partial_x u &= 0, \\ \frac{dx}{dt} &= a(u), \quad \frac{du}{dt} = 0\end{aligned}$$

条件・使い方：特性線が交差すると古典解が破綻し、衝撃波・弱解の扱いが必要。

2.6 複素関数・漸近解析

留数定理

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= 2\pi i \sum_{z_j \in \text{int} C} \text{Res}_{z=z_j} f, \\ \text{Res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{h(z)} &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad (h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0)\end{aligned}$$

条件・使い方：閉曲線の正方向は反時計回り。無限遠の弧積分が消えるかを確認。

Laplace 法（内部の非退化極小）

$$\begin{aligned}I(\lambda) &= \int_a^b e^{-\lambda f(x)} g(x) dx, \\ I(\lambda) &\sim g(x_*) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f''(x_*)}} e^{-\lambda f(x_*)}\end{aligned}$$

条件・使い方： $\lambda \rightarrow \infty$ 、一意な内部極小 $f'(x_*) = 0, f''(x_*) > 0, g(x_*) \neq 0$ 。

Airy 関数・転回点の形

$$\begin{aligned}\text{Ai}''(z) &= z \text{Ai}(z), \\ \text{Ai}(z) &\sim \frac{e^{-2z^{3/2}/3}}{2\sqrt{\pi} z^{1/4}} \quad (z \rightarrow +\infty)\end{aligned}$$

条件・使い方：WKB の転回点付近で直接 WKB が破綻するときの接続関数。

母関数・二項展開

$$\begin{aligned}(1-x)^{-\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n, \quad |x| < 1, \\ e^{(t/2)(z-z^{-1})} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(t) z^n\end{aligned}$$

条件・使い方：Bessel 関数 J_n の母関数は $z \neq 0$ 。

2.7 確率・積分変換の便利な式

期待値・条件付き確率・分散

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_x xp(x), \quad \text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2, \\ \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]]\end{aligned}$$

条件・使い方：連続変数は総和を積分に置き換える。物理的揺らぎは共分散まで扱う。

多変数正規分布の特性関数

$$\varphi(\mathbf{k}) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}}] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{k}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{k}}$$

条件・使い方： $\boldsymbol{\Sigma}$ は半正定値。中心極限定理・拡散過程の特徴づけに使う。

2.8 特殊関数・行列多項式の追加公式

Cayley–Hamilton 定理（2 次正方行列）

$$A^2 - (\mathrm{Tr} A)A + (\det A)I = 0,$$

$$A^{-1} = \frac{(\mathrm{Tr} A)I - A}{\det A}$$

条件・使い方：逆行列は $\det A \neq 0$ の場合。一般次元でも特性多項式に A を代入すれば零になる。

Vandermonde 行列式

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

条件・使い方：多項式補間・固有値の異なりに伴う線形独立の判定に用いる。

Laplace 変換の初期値処理

$$F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t) \mathrm{d}t,$$

$$\mathcal{L}[f'](s) = sF(s) - f(0^+),$$

$$\mathcal{L}[f''](s) = s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

条件・使い方：収束半平面を持つ因果信号。初期値を忘れず代数方程式に変換する。

Bessel 関数の微分方程式と再帰

$$x^2 J_\nu'' + x J_\nu' + (x^2 - \nu^2) J_\nu = 0,$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

条件・使い方：円柱座標の Helmholtz 問題。原点正則な解として J_ν を選ぶ場合が多い。

Hermite 多項式の母関数

$$\mathrm{e}^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} H_m(x) H_n(x) \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn}$$

条件・使い方：物理学者型 Hermite 多項式。確率論の Hermite 規約とは係数が異なる。

3 量子力学：演算子・固有値・遷移

3.1 基本原理と波動関数

Schrödinger 方程式と確率流

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}, t)\right]\psi, \\ \rho &= |\psi|^2, \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{m}\Im(\psi^*\nabla\psi), \\ \partial_t\rho + \nabla\cdot\mathbf{j} &= 0 \end{aligned}$$

条件・使い方：確率流は非磁場・実の局所ポテンシャルの場合。磁場中は $\mathbf{j} = \Re(\psi^*(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})\psi)/m$ 。

期待値・不確定性関係

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle \psi | A | \psi \rangle, \\ (\Delta A)^2 &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2, \\ \Delta A \Delta B &\geq \frac{1}{2}|\langle [A, B] \rangle| \end{aligned}$$

条件・使い方： A, B は自己共役な観測量。Robertson の形は共分散項を省いた下界。

位置・運動量の交換

$$\begin{aligned} [x_i, p_j] &= i\hbar\delta_{ij}, \\ p_j &= -i\hbar\partial_j, \\ e^{iap/\hbar}xe^{-iap/\hbar} &= x + a \end{aligned}$$

条件・使い方：最後は演算子の共役変換。状態ベクトルへの平行移動の符号とは区別する。

Ehrenfest 定理

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle A \rangle &= \frac{i}{\hbar}\langle [H, A] \rangle + \langle \partial_t A \rangle, \\ m\frac{d^2}{dt^2}\langle x \rangle &= -\langle V'(x) \rangle \end{aligned}$$

条件・使い方：Hamiltonian $p^2/(2m) + V(x)$ 。一般に $\langle V'(x) \rangle \neq V'(\langle x \rangle)$ 。

1次元デルタ関数ポテンシャルの接続

$$\begin{aligned} V(x) &= g\delta(x-a), \\ \psi(a^+) &= \psi(a^-), \\ \psi'(a^+) - \psi'(a^-) &= \frac{2mg}{\hbar^2}\psi(a) \end{aligned}$$

条件・使い方： g は符号付き。 $g < 0$ の束縛単位は $E = -mg^2/(2\hbar^2)$ 。

段差ポテンシャルの透過・反射

$$\begin{aligned} r &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}, \\ R &= |r|^2, \quad T = \frac{k_2}{k_1}|t|^2, \quad R + T = 1 \end{aligned}$$

条件・使い方：左右で質量が同じ・進行波 $k_1, k_2 > 0$ ・非吸収。確率流の k 比を忘れない。

3.2 調和振動子・コヒーレント状態

生成消滅演算子

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \\ [a, a^\dagger] &= 1, \quad H = \hbar\omega(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}), \\ a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{aligned}$$

条件・使い方：振動子近似。位置の行列要素は $x = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}(a + a^\dagger)$ 。

基底状態と Gaussian 分散

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}, \\ \langle x^2 \rangle_0 &= \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad \langle p^2 \rangle_0 = \frac{m\hbar\omega}{2} \end{aligned}$$

条件・使い方：無限直線の調和振動子。

四次摂動の 1 次エネルギー補正

$$\begin{aligned} \Delta E_n^{(1)} &= \lambda \langle n|x^4|n\rangle, \\ \langle n|x^4|n\rangle &= 3(2n^2 + 2n + 1) \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \end{aligned}$$

条件・使い方：摂動 $V_1 = \lambda x^4$ が十分小さいとき。 $\lambda < 0$ はポテンシャルが下に有界でなく真の基底状態を持たないため形式的摂動に限る。

コヒーレント状態

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= \alpha|\alpha\rangle, \\ |\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \\ \langle n\rangle &= |\alpha|^2, \quad (\Delta n)^2 = |\alpha|^2 \end{aligned}$$

条件・使い方：Poisson 数分布。調和振動子下で $\alpha(t) = \alpha(0)e^{-i\omega t}$ 。

変位演算子

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}, \\ D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) &= a + \alpha, \\ |\alpha\rangle &= D(\alpha)|0\rangle \end{aligned}$$

条件・使い方：突然加えた一定外力は平方完成によって変位演算子に帰着する。

単一モードのスクイーミング

$$\begin{aligned} S(r) &= \exp\left[\frac{r}{2}(a^2 - a^{\dagger 2})\right], \\ S^\dagger(r) a S(r) &= a \cosh r - a^\dagger \sinh r, \\ (\Delta x)_{S|0}^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega} e^{-2r} \end{aligned}$$

条件・使い方： $r \in \mathbb{R}$ 、 $x \propto a + a^\dagger$ の規約。共役運動量の分散は e^{2r} 倍。

3.3 角運動量・中心力

角運動量の代数

$$\begin{aligned}[J_i, J_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}J_k, \\ J^2|jm\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|jm\rangle, \\ J_z|jm\rangle &= \hbar m|jm\rangle\end{aligned}$$

条件・使い方： $j = 0, 1/2, 1, \dots, m = -j, \dots, j$ 。

昇降演算子

$$J_{\pm}|jm\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|j, m\pm 1\rangle$$

条件・使い方： $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ 。スピン選択則と相互作用の行列要素に使う。

球対称ポテンシャルと動径方程式

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}) &= R_{\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad u(r) = rR_{\ell}(r), \\ -\frac{\hbar^2}{2m}u'' + \left[V(r) + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2}\right]u &= Eu\end{aligned}$$

条件・使い方：原点の正則性、有限井戸の接続を課す。中心力の束縛状態や散乱に基本。

水素型原子のエネルギー

$$\begin{aligned}E_n &= -\frac{\mu(Ze^2)^2}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2 n^2}, \\ a_Z &= \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu Ze^2}\end{aligned}$$

条件・使い方：換算質量 μ を使用。スピン・微細構造などを無視した非相対論的 Coulomb 模型。

同種 2 粒子の対称化

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{|a\rangle_1|b\rangle_2 \pm |b\rangle_1|a\rangle_2}{\sqrt{2(1 \pm |\langle a|b\rangle|^2)}}$$

条件・使い方：+ は対称、- は反対称； $a = b$ では反対称状態なし。フェルミ粒子の全波動関数は反対称。

3.4 定常摂動論・縮退摂動

非縮退 Rayleigh–Schrödinger 摂動

$$\begin{aligned}E_n^{(1)} &= \langle n|V|n\rangle, \\ E_n^{(2)} &= \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m|V|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}, \\ |n^{(1)}\rangle &= \sum_{m \neq n} \frac{\langle m|V|n\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}|m\rangle\end{aligned}$$

条件・使い方： $H = H_0 + \lambda V$ の係数、非縮退で級数が有効な範囲。分母符号に注意。

縮退摂動論

$$H_{\text{eff}}^{(1)} = PVP, \quad P = \sum_{a=1}^d |a\rangle\langle a|$$

条件・使い方：縮退部分空間で PVP を対角化してから補正を求める。固有値の接近で非縮退式を使わない。

変分原理

$$E_0 \leq \frac{\langle \varphi | H | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle}$$

条件・使い方： H が下に有界な自己共役演算子で、試行状態は定義域内。励起エネルギーへの単純適用不可。

Hellmann–Feynman 定理

$$\frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = \langle n(\lambda) | \partial_\lambda H | n(\lambda) \rangle$$

条件・使い方：規格化された孤立固有状態。力・応答係数を固有値の微分として取り出す。

3.5 時間依存摂動・磁気共鳴

相互作用表示

$$\begin{aligned} V_I(t) &= e^{iH_0 t/\hbar} V(t) e^{-iH_0 t/\hbar}, \\ U_I(t, t_0) &= \mathcal{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(s) ds \right] \end{aligned}$$

条件・使い方：時間順序積 $\mathcal{T}$ に注意。異時刻で可換でなければ指数を普通の指数にしない。

一次の遷移振幅

$$\begin{aligned} c_f^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{i\omega_{fi}s} V_{fi}(s) ds, \\ \omega_{fi} &= (E_f - E_i)/\hbar \end{aligned}$$

条件・使い方：相互作用前に $|i\rangle$ が準備される。短時間・弱い駆動を仮定。

二次の時間順序振幅

$$\begin{aligned} c_f^{(2)}(t) &= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_m \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \\ &\quad \times e^{i\omega_{fm}t_1 + i\omega_{mi}t_2} V_{fm}(t_1) V_{mi}(t_2) \end{aligned}$$

条件・使い方：二光子遷移など。中間状態 m を足し、 $t_2 < t_1$ を必ず保つ。

Fermi の黄金律

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_f), \quad E_f = E_i$$

条件・使い方：連続終状態、長時間・弱い摂動。時間に周期性があれば吸収・放出のエネルギー条件を変更する。

Rabi 振動（回転波近似）

$$\begin{aligned} H_{\text{RWA}} &= \frac{\hbar}{2} (\Delta \sigma_z + \Omega_R \sigma_x), \\ P_{1 \rightarrow 2}(t) &= \frac{\Omega_R^2}{\Delta^2 + \Omega_R^2} \sin^2 \left(\frac{t}{2} \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2} \right) \end{aligned}$$

条件・使い方：駆動周波数が共鳴に近く、急速振動項を無視可能な領域。

3.6 断熱時間発展・Berry 位相

断熱近似の状態

$$|\psi_n(t)\rangle \approx e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(s) ds} e^{i\gamma_n(t)} |n(t)\rangle,$$

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle n(s) | \dot{n}(s) \rangle ds$$

条件・使い方：孤立固有準位で非断熱遷移が小さいとき。Berry 位相は閉路でゲージ不変（ 2π を法として）。

非断熱結合の尺度

$$|\langle m | \dot{H} | n \rangle| \ll \frac{|E_n - E_m|^2}{\hbar}, \quad m \neq n$$

条件・使い方：十分条件の目安で、厳密な一様評価は時間区間・端点条件等にも依存する。

3.7 散乱理論・WKB

1 次 Born 近似（3 次元）

$$f^{(1)}(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d^3r,$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2$$

条件・使い方： e^{ikr}/r を散乱波とする規約、同質量の弾性散乱。弱ポテンシャルが必要。

部分波と位相シフト

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell P_\ell(\cos \theta),$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell$$

条件・使い方：短距離中心力・弾性散乱での表示。

WKB の位相積分

$$\psi(x) \approx \frac{C_+}{\sqrt{p(x)}} e^{\frac{i}{\hbar} \int^x p(s) ds} + \frac{C_-}{\sqrt{p(x)}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int^x p(s) ds},$$

$$p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$$

条件・使い方： $|\hbar p'| \ll p^2$ で有効。転回点 $p = 0$ では接続公式が必要。

WKB 量子化・障壁透過

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(E - V(x))} dx \approx \pi\hbar(n + \frac{1}{2}),$$

$$T \sim \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_2}^{x_3} \sqrt{2m(V(x) - E)} dx\right]$$

条件・使い方：前式は滑らかな 2 つの単純転回点を持つ束縛状態。後式は不透明な障壁で指数精度。

3.8 周期ポテンシャル・磁場・ゲージ

Bloch の定理

$$V(x+a) = V(x), \quad \psi_k(x+a) = e^{ik a} \psi_k(x),$$

$$\psi_k(x) = e^{ikx} u_k(x), \quad u_k(x+a) = u_k(x)$$

条件・使い方：周期境界・無限結晶。Brillouin 域 $k \sim k + 2\pi/a$ 。

周期デルタ列の分散 (Kronig–Penney)

$$V(x) = g \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - na),$$

$$\cos(ka) = \cos(qa) + \frac{mg}{\hbar^2 q} \sin(qa), \quad q = \sqrt{2mE}/\hbar$$

条件・使い方： $E > 0$ の表示；許容バンドは右辺の絶対値が 1 以下。第 1 ギャップの弱結合展開は $|mg|a/(\pi\hbar^2) \ll 1$ 。

最小結合とゲージ変換

$$H = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\phi,$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad \phi' = \phi - \partial_t\chi,$$

$$\psi' = e^{iq\chi/\hbar}\psi$$

条件・使い方：荷電粒子の電荷は q （電子なら $-e$ ）。

Landau 準位

$$E_n = \hbar\omega_c(n + \tfrac{1}{2}), \quad \omega_c = \frac{|qB|}{m},$$

$$\frac{\mathcal{N}}{A} = \frac{|qB|}{2\pi\hbar}$$

条件・使い方：2 次元・一様磁場・スピンと端効果を無視。縮退度は単位面積あたり。

3.9 密度行列と量子相関（過去問で必要な範囲）

密度行列・部分トレース

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad \text{Tr} \rho = 1, \quad \rho \succeq 0,$$

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}, \quad \langle O \rangle = \text{Tr}(\rho O)$$

条件・使い方：純粋状態は $\rho^2 = \rho$ 、混合状態は $\text{Tr} \rho^2 < 1$ 。

Bell 状態の部分系

$$|\Phi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2},$$

$$\rho_A = I/2, \quad S_A = -\text{Tr} \rho_A \ln \rho_A = \ln 2$$

条件・使い方：エンタングルメントを扱った過去問の計算に必要な最小限。発展的な量子情報理論は予想問題集側に置く。

スピン相関

$$\langle \Phi^+ | \sigma_x \otimes \sigma_x | \Phi^+ \rangle = 1,$$

$$\langle \Phi^+ | \sigma_y \otimes \sigma_y | \Phi^+ \rangle = -1,$$

$$\langle \Phi^+ | \sigma_z \otimes \sigma_z | \Phi^+ \rangle = 1$$

条件・使い方：Bell 状態の位相・基底を変えると符号パターンも変わる。

3.10 古い年度も含む典型補助公式

有限深さの対称 1 次元井戸

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & (|x| < a), \\ 0 & (|x| \geq a), \end{cases}$$

$$k = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar},$$

$$k \tan(ka) = \kappa \quad (\text{偶}),$$

$$-k \cot(ka) = \kappa \quad (\text{奇})$$

条件・使い方：束縛領域 $-V_0 < E < 0$ 。外部の減衰解と内部の偶奇解を $x = a$ で接続する。

励起子の換算質量と結合エネルギー

$$\mu^{-1} = m_e^{*-1} + m_h^{*-1},$$

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2(4\pi\epsilon)^2 \hbar^2 n^2},$$

$$a_B^* = \frac{4\pi\epsilon \hbar^2}{\mu e^2}$$

条件・使い方：3 次元・放物型バンド・静的誘電率・水素型 Coulomb 相互作用の Wannier 励起子模型。

4 統計力学：分配関数から応答まで

4.1 熱力学ポテンシャルと一般関係式

熱力学第一法則

$$\begin{aligned}dU &= TdS - pdV + \mu dN, \\F &= U - TS, \quad G = U - TS + pV, \\ \Omega &= U - TS - \mu N\end{aligned}$$

条件・使い方：単純圧縮系・粒子数可変。一般化座標の仕事の符号は定義する（後掲「外力と仕事の符号」参照）。

熱力学の微分関係

$$\begin{aligned}dF &= -SdT - pdV + \mu dN, \\d\Omega &= -SdT - pdV - Nd\mu, \\S &= -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}, \quad p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}\end{aligned}$$

条件・使い方：微分で保持する変数を必ず指定。Maxwell 関係式は混合 2 階微分の交換から導く。

Maxwell 関係式の例

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} &= \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,N}, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,N} &= -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,N}\end{aligned}$$

条件・使い方：前者は $F(T, V, N)$ 、後者は $G(T, p, N)$ から。

理想気体と断熱指数

$$\begin{aligned}pV &= Nk_B T, \quad C_V = \frac{f}{2}Nk_B, \\pV^\gamma &= \text{const}, \quad \gamma = C_p/C_V\end{aligned}$$

条件・使い方：熱容量一定の古典理想気体の準静的断熱変化。自由度 f は温度領域に依存。

4.2 正準・大正準分配関数

正準集団

$$\begin{aligned}Z_N(\beta) &= \text{Tr}_N e^{-\beta H}, \quad F = -k_B T \ln Z_N, \\U &= -\partial_\beta \ln Z_N, \quad S = k_B (\ln Z_N + \beta U)\end{aligned}$$

条件・使い方： H が温度に陽に依存しない場合の U 公式。温度依存の有効 Hamiltonian では修正が必要。

エネルギーゆらぎと熱容量

$$\begin{aligned}\text{Var}(E) &= \partial_\beta^2 \ln Z_N, \\C_V &= \frac{\text{Var}(E)}{k_B T^2}\end{aligned}$$

条件・使い方：正準集団・容積固定・Hamiltonian は温度独立。

大正準集団

$$\begin{aligned}\Xi &= \text{Tr} e^{-\beta(H-\mu N)}, \quad \Omega = -k_B T \ln \Xi, \\ \langle N \rangle &= \frac{1}{\beta} \partial_\mu \ln \Xi, \\ \text{Var}(N) &= \frac{1}{\beta^2} \partial_\mu^2 \ln \Xi\end{aligned}$$

条件・使い方：粒子数の出入りが可能な平衡系。

一般化された揺らぎと応答

$$\begin{aligned} H(h) &= H_0 - hX, \\ \partial_h \ln Z &= \beta \langle X \rangle, \quad \chi_X = \partial_h \langle X \rangle, \\ \chi_X &= \beta \text{Var}(X) \quad ([H_0, X] = 0) \end{aligned}$$

条件・使い方：最後の等式は古典系・可換量子系のみ。非可換量子系は後掲の虚時間 Kubo 公式を使用する。 X 自体は h に非依存。

4.3 古典理想気体・相空間

古典分配関数と熱的 de Broglie 波長

$$\begin{aligned} Z_N &= \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \right)^N, \\ \lambda_T &= \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \end{aligned}$$

条件・使い方：3次元・非相互作用・非縮退極限 $n\lambda_T^3 \ll 1$ 。並進自由度のみ。

equipartition（等分配則）

$$\begin{aligned} \langle ax^2/2 \rangle &= \frac{1}{2} k_B T, \quad a > 0, \\ U &= \frac{f}{2} N k_B T \end{aligned}$$

条件・使い方：古典・連続・2次 Hamiltonian の各独立項に対して成立。量子低温では使えない。

Maxwell 速度分布

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{v}) &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-m\boldsymbol{v}^2/(2k_B T)}, \\ \langle v^2 \rangle &= 3k_B T/m \end{aligned}$$

条件・使い方：古典平衡理想気体の単一粒子。速度の大きさの分布は $4\pi v^2$ を掛ける。

4.4 Bose–Einstein/Fermi–Dirac 統計

Bose・Fermi 平均占有数

$$\begin{aligned} n_B(\epsilon) &= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}, \\ n_F(\epsilon) &= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \end{aligned}$$

条件・使い方：Bose 粒子は μ が一粒子基底エネルギーを超えない。

量子気体の大分配関数

$$\begin{aligned} \ln \Xi_B &= - \sum_{\nu} \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_{\nu}}), \\ \ln \Xi_F &= \sum_{\nu} \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon_{\nu}}), \quad z = e^{\beta\mu} \end{aligned}$$

条件・使い方：各 ν は一粒子準位。縮退度は和の中で数える。

自由粒子の状態密度（d 次元）

$$\mathcal{N}(\epsilon) = g_{\text{int}} \frac{V_d}{(2\pi\hbar)^d} \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} (2m\epsilon)^{d/2},$$

$$D(\epsilon) = \frac{d\mathcal{N}}{d\epsilon} \propto \epsilon^{d/2-1}$$

条件・使い方：連続極限。 g_{int} は内部縮退度、 $D(\epsilon)$ は状態密度関数、 V_d は実空間の体積。記号を混同しない。

3 次元自由電子の Fermi エネルギー

$$k_F = \left(\frac{6\pi^2 n}{g_{\text{int}}} \right)^{1/3},$$

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}, \quad n = N/V$$

条件・使い方：内部縮退度 g_{int} （電子スピンなら $g_{\text{int}} = 2$ ）。

Sommerfeld 展開

$$\int_0^\infty \phi(\epsilon) n_F(\epsilon) d\epsilon = \int_0^\mu \phi(\epsilon) d\epsilon$$

$$+ \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \phi'(\mu) + O(T^4)$$

条件・使い方： $k_B T \ll \mu$ 、 ϕ が Fermi 面付近で十分滑らか。固定粒子数では $\mu(T)$ も展開する。

低温自由電子の熱容量（3 次元）

$$C_V \simeq \frac{\pi^2}{2} N k_B \frac{k_B T}{\epsilon_F}$$

条件・使い方：3 次元・非相互作用・自由電子・ $T \ll T_F$ 。2 次元などでは係数や $\mu(T)$ の振る舞いに注意。

4.5 Bose 凝縮・トラップ・光格子の基礎

3 次元一様理想 Bose 気体

$$N_{\text{ex}} = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z), \quad g_s(z) = \sum_{\ell \geq 1} \frac{z^\ell}{\ell^s},$$

$$k_B T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{n}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}$$

条件・使い方：熱力学極限、相互作用なし、基底状態のエネルギーを零とする。

凝縮相の基底占有

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (T \leq T_c)$$

条件・使い方：3 次元一様理想 Bose 気体の熱力学極限。有限粒子数では丸めが生じる。

調和トラップでの理想 Bose 凝縮

$$N_{\text{ex}} \simeq \zeta(3) \left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}} \right)^3,$$

$$k_B T_c \simeq \hbar\bar{\omega} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3}$$

条件・使い方：3 次元トラップ・励起準位の連続近似、 $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ 。基底エネルギーを差し引いて数える。

周期格子の分散・有効質量

$$\epsilon(k) = -2J \cos(ka),$$

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 \epsilon}{dk^2} \bigg|_{k=k_0}$$

条件・使い方：1次元最近接 tight-binding の例。バンド端の曲率の符号が有効質量を決める。

4.6 独立スピン・Curie 則・断熱消磁

独立スピン 1/2 の磁化

$$Z_1 = 2 \cosh(\beta \mu B),$$

$$M = N \mu \tanh(\beta \mu B),$$

$$\chi_{B=0} = \frac{N \mu^2}{k_B T}$$

条件・使い方：エネルギー $-\mu B \sigma_z$ 、相互作用なし。 M は磁気モーメント和で磁化密度ではない。

スピンエントロピーと断熱消磁

$$S = N k_B [\ln(2 \cosh x) - x \tanh x],$$

$$x = \frac{\mu B}{k_B T}, \quad S = \text{const} \implies \frac{B}{T} = \text{const}$$

条件・使い方：理想常磁性体、スピン系のみ・相互作用なし・可逆断熱。格子の熱容量は無視。

4.7 Ising 模型・転送行列

1次元 Ising 転送行列

$$H = -J \sum_i s_i s_{i+1} - h \sum_i s_i, \quad s_i = \pm 1,$$

$$T_{ss'} = \exp \left[\beta J s s' + \frac{\beta h}{2} (s + s') \right]$$

条件・使い方：周期境界では $Z_N = \text{Tr} T^N$ 。1次元・最近接。

転送行列の固有値

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta J} \cosh(\beta h) \pm \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}},$$

$$f = -k_B T \ln \lambda_+$$

条件・使い方：熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ 、任意の実数 J, h 。 λ_+ が最大固有値。 $J < 0, h = 0$ では $\lambda_- < 0$ 。

Ising 相関長（ゼロ場）

$$\langle s_0 s_r \rangle = (\tanh \beta J)^r,$$

$$\xi^{-1} = -\ln |\tanh(\beta J)|$$

条件・使い方：1次元、 $J \neq 0, h = 0$ 、熱力学極限（格子間隔単位）。 $J < 0$ では相関は符号交替し、包絡線の長さ ξ は正。

4.8 Landau 理論・臨界現象

Landau 自由エネルギー

$$f(m) = f_0 + \frac{a}{2}(T - T_c)m^2 + \frac{b}{4}m^4 - hm,$$

$$0 = a(T - T_c)m + bm^3 - h$$

条件・使い方：平均場・ $a, b > 0$ ・対称性 $m \rightarrow -m$ が $h = 0$ で成立。

平均場臨界指数

$$m(h=0, T < T_c) \propto (T_c - T)^{1/2},$$

$$\chi(T > T_c) \propto (T - T_c)^{-1}, \quad m(T = T_c) \propto h^{1/3}$$

条件・使い方：上記 Landau 模型で $\beta_{\text{crit}} = 1/2$, $\gamma_{\text{crit}} = 1$, $\delta_{\text{crit}} = 3$ 。熱力学の β と区別。

Gaussian 揺らぎの相関

$$\mathcal{F}[m] = \frac{1}{2} \int [rm^2 + c(\nabla m)^2] d^d x,$$

$$\langle |m_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \propto \frac{k_B T}{r + ck^2}, \quad \xi = \sqrt{c/r}$$

条件・使い方：変数の Fourier 正規化により比例定数が変化。 $r, c > 0$ 。

4.9 揺らぎ・拡散・Fokker–Planck

Fokker–Planck 方程式 (Ito)

$$dX_t = a(X_t)dt + \sqrt{2D}dW_t,$$

$$\partial_t p = -\partial_x(ap) + D\partial_x^2 p$$

条件・使い方：定数 $D > 0$ 。状態依存拡散なら二階項は $\frac{1}{2}\partial_x^2(b^2 p)$ 。

拡散の平均二乗変位

$$\langle (X_t - X_0)^2 \rangle = 2Dt \quad (1\text{次元}),$$

$$\langle |\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0|^2 \rangle = 2dDt \quad (d\text{次元})$$

条件・使い方：初期位置固定・自由 Brown 運動。漂流成分は差し引く。

Einstein 関係

$$D = \mu_{\text{mob}} k_B T$$

条件・使い方：平衡、線形応答、過減衰 Brown 運動。ここで μ_{mob} は力に対する移動度で化学ポテンシャルではない。

線形応答の Kubo 公式

$$\delta\langle A \rangle(t) = \int_{-\infty}^t \chi_{AB}(t-t') f(t') dt',$$

$$\chi_{AB}(t) = \frac{i}{\hbar} \theta(t) \langle [A(t), B(0)] \rangle_0$$

条件・使い方：摂動 $H' = -f(t)B$ 。量子線形応答、平衡初期状態。

4.10 高分子・エントロピー弾性

2 状態の独立鎖

$$Z_N(F) = [2 \cosh(\beta F a)]^N,$$

$$\langle X \rangle = N a \tanh(\beta F a),$$

$$\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial F} = \beta \text{Var}(X)$$

条件・使い方：各単位長さの射影が $\pm a$ 、張力と伸びのエネルギー $-FX$ 。

小張力のエントロピーばね

$$\langle X \rangle \simeq \frac{Na^2}{k_{\text{B}}T} F, \quad F \simeq \frac{k_{\text{B}}T}{Na^2} \langle X \rangle$$

条件・使い方：上の独立 2 状態鎖・ $|Fa| \ll k_{\text{B}}T$ 。弾性係数が T に比例する。

5 電磁気学・力学：境界条件と保存則

5.1 Maxwell 方程式とポテンシャル

真空中の Maxwell 方程式 (SI)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho / \varepsilon_0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}\end{aligned}$$

条件・使い方：媒質では $\mathbf{D}, \mathbf{H}$ による巨視的表現を用いる。

巨視的 Maxwell 方程式

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{\text{free}}, & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_{\text{free}} + \partial_t \mathbf{D}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}\end{aligned}$$

条件・使い方：線形等方媒質なら $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 。異方性ではテンソル。

ポテンシャルとゲージ変換

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, & \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \chi, & \phi' &= \phi - \partial_t \chi\end{aligned}$$

条件・使い方：Lorenz 条件： $\nabla \cdot \mathbf{A} + c^{-2} \partial_t \phi = 0$ (真空)。

Maxwell 境界条件

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma_{\text{free}}, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{K}_{\text{free}}\end{aligned}$$

条件・使い方： $\mathbf{n}$ は媒質 1 から 2 向き、 σ_{free} は自由面電荷、 $\mathbf{K}_{\text{free}}$ は自由面電流。

エネルギー流 (Poynting の定理)

$$\begin{aligned}\partial_t u + \nabla \cdot \mathbf{S} &= -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \\ u &= \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + B^2 / \mu_0), & \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H}\end{aligned}$$

条件・使い方：表示した u は真空。分散性媒質中の蓄積エネルギーは単純な $\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ ではない場合あり。

5.2 静電場と境界値問題

Poisson 方程式と Coulomb 積分

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= -\rho / \varepsilon_0, \\ \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'\end{aligned}$$

条件・使い方：無限遠でポテンシャルがゼロになる局在電荷、誘電体境界なし。

導体平面の鏡像法

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{-q}|} \right), \\ F_z &= -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}, & U &= -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a}\end{aligned}$$

条件・使い方：点電荷が接地無限導体平面から距離 a 。 U は外力がした仕事を積分して得る誘起分のエネルギー。

球座標の Laplace 方程式（軸対称）

$$\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-\ell-1}) P_{\ell}(\cos \theta)$$

条件・使い方：電荷のない各領域での一般解。原点・無限遠の正則性で係数を制限。

電荷分布の遠方多重極

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} + O(r^{-3}) \right],$$

$$Q = \int \rho d^3r, \quad \mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3r'$$

条件・使い方：観測距離 r が電荷分布のサイズより十分大きい。双極子モーメントは原点選択に注意（ $Q \neq 0$ なら変わる）。

コンデンサーの静電エネルギー

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QV,$$

$$C_{\text{parallel}} = \frac{\epsilon A}{d}$$

条件・使い方：平行板は端効果無視・一様媒質。定電圧/定電荷の力計算では電源の仕事に注意。

5.3 磁場・誘導・回路

Biot–Savart 則

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'$$

条件・使い方：定常電流、真空、無限遠の境界条件。

Faraday 誘導の積分形

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

条件・使い方：固定閉曲線 C 。移動する導体回路では一般に $\oint (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 。

インダクタンスと回路方程式

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}, \quad U_L = \frac{1}{2} LI^2,$$

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C = V_{\text{src}}(t)$$

条件・使い方：集中定数素子で L, R, C を定数とみなす。符号は起電力・電圧降下の定義に依存。

同軸線路の準静電近似

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}, \quad L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a),$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}},$$

$$Z_0 = \sqrt{L'/C'} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln(b/a)$$

条件・使い方：内半径 a 、外導体の内半径 b 、完全導体・均質充填媒質の TEM 線路。

5.4 電磁波・Fresnel 係数・導波管

平面波の分散とエネルギー流

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \Re\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\}, \\ k &= \omega\sqrt{\mu\varepsilon}, \quad \mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\mu\omega}, \\ \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*)\end{aligned}$$

条件・使い方：損失のない線形等方媒質。非真空では位相速度 $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ 。

正入射の電場反射係数

$$\begin{aligned}r_E &= \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad t_E = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}, \\ R &= |r_E|^2, \quad T = \frac{Z_1}{Z_2} |t_E|^2\end{aligned}$$

条件・使い方：損失のない媒質、 $Z_j = \sqrt{\mu_j/\varepsilon_j} > 0$ 、電場の接線成分で定義。

Fresnel 係数（非磁性・電場の接線成分）

$$\begin{aligned}r_s &= \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \\ r_p^{(\tan)} &= \frac{n_1/\cos \theta_i - n_2/\cos \theta_t}{n_1/\cos \theta_i + n_2/\cos \theta_t}\end{aligned}$$

条件・使い方：非磁性の透明媒質。 p 成分は接線電場の符号規約であり、全電場振幅を用いる教科書の表式と符号が異なることがある。

Snell の法則と全反射条件

$$\begin{aligned}n_1 \sin \theta_i &= n_2 \sin \theta_t, \\ \sin \theta_c &= \frac{n_2}{n_1} \quad (n_1 > n_2)\end{aligned}$$

条件・使い方：全反射時は透過媒質の法線方向波数が虚数となり、エバネッセント波を生む。

導体内の複素波数と表皮深さ

$$\begin{aligned}k^2 &= \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega, \\ \delta &= \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}, \quad \mathbf{E} \sim e^{-z/\delta}\end{aligned}$$

条件・使い方：時間規約 $e^{-i\omega t}$ 、良導体 $\sigma \gg \omega\varepsilon$ 、 z 増加方向に減衰する枝を採用。

矩形導波管の遮断周波数

$$\begin{aligned}k_z^2 &= \frac{\omega^2}{v^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \\ \omega_c &= v\pi\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}\end{aligned}$$

条件・使い方：完全導体、断面 $a \times b$ 、TE/TM モード。TM は $m, n \geq 1$ 、TE は両方同時に 0 不可。

双極子放射の角度分布

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\Omega} &= \frac{\omega^4 |p_0|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \sin^2 \theta, \\ P &= \frac{\omega^4 |p_0|^2}{12\pi \varepsilon_0 c^3}\end{aligned}$$

条件・使い方：真空、電気双極子 $\mathbf{p}(t) = \Re(\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t})$ 、時間平均。

Rayleigh 散乱の振幅尺度

$$\alpha_{\text{sphere}} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2},$$

$$\sigma_{\text{sca}} = \frac{k^4 |\alpha_{\text{sphere}}|^2}{6\pi\epsilon_0^2}$$

条件・使い方：小球 $ka \ll 1$ 、非磁性・無損失・非共鳴。入射媒質は真空。

5.5 Lorentz 力・運動する荷電粒子

Lorentz 力と荷電粒子の運動

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m}, \quad r_L = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}$$

条件・使い方：非相対論的・一様静磁場。速度垂直成分のみ円運動する。

一様な直交電磁場のドリフト

$$\mathbf{v}_{E \times B} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

条件・使い方： $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ 、一様場、非相対論的 guiding-center 近似。電荷符号に依存しない。

正準運動量と Hamiltonian

$$\mathbf{p}_{\text{can}} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A},$$

$$H = \frac{(\mathbf{p}_{\text{can}} - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\phi$$

条件・使い方：荷電粒子の速度 $m\mathbf{v}$ と正準運動量を混同しない。

5.6 特殊相対論・電磁場の変換

Lorentz 変換

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right), \quad x' = \gamma(x - vt),$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E^2 - (pc)^2 = m^2 c^4$$

条件・使い方：等速運動する観測系への変換。最後は 4 元運動量の不変量。

一様速度ブーストでの電磁場変換

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel},$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \right)$$

条件・使い方：プライム系が元の系に対して速度 $\mathbf{v}$ で運動する規約。並行・垂直は $\mathbf{v}$ に対して。

電磁場の Lorentz 不変量

$$I_1 = E^2 - c^2 B^2, \quad I_2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

条件・使い方：真空中の場の変換検算に使える。値は慣性系で変わらない。

5.7 解析力学・正規振動

Lagrange 方程式と Hamilton 方程式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= 0, \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}$$

条件・使い方：Legendre 変換が可逆な正則 Lagrangian を仮定。

Poisson 括弧

$$\begin{aligned}\{f, g\} &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right), \\ \frac{df}{dt} &= \{f, H\} + \partial_t f\end{aligned}$$

条件・使い方：正準座標 $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ 。

Noether の保存則

$$\delta L = \frac{d}{dt} F \implies Q = \sum_i p_i \delta q_i - F = \text{const}$$

条件・使い方：時間に依存しない連続対称変換の一次変分。時間並進ならエネルギー保存。

連成振動の固有値問題

$$\begin{aligned}M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ K\mathbf{u}_j &= \omega_j^2 M\mathbf{u}_j, \\ \mathbf{u}_i^T M\mathbf{u}_j &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

条件・使い方： M 正定値、 K 対称。 $M^{-1}K$ が通常の内積で対称とは限らない。

1 自由度の強制振動

$$\begin{aligned}m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= F_0 \cos \omega t, \\ |x_\omega| &= \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}\end{aligned}$$

条件・使い方：定常解の振幅、過渡成分を無視した後。共鳴と品質係数を調べる入口。

5.8 中心力・散乱・剛体

中心力の有効ポテンシャル

$$\begin{aligned}E &= \frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r), \\ V_{\text{eff}}(r) &= V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad L = mr^2\dot{\phi}\end{aligned}$$

条件・使い方：質点 m の中心力問題。二体問題では換算質量を用いる。

中心力の散乱角

$$\begin{aligned}\Theta &= \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b \, dr}{r^2 \sqrt{1 - b^2/r^2 - V(r)/E}}, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{b}{\sin \Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right|\end{aligned}$$

条件・使い方：無限遠で $V \rightarrow 0$ 、入射相対運動エネルギー $E = mv_\infty^2/2$ 、単一価の $b(\Theta)$ 。多価なら枝ごとに和。

Rutherford 散乱

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\kappa}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\Theta/2)}$$

条件・使い方：反発 Coulomb $V(r) = \kappa/r$ 、 $\kappa > 0$ 、非相対論的古典散乱。

慣性モーメントと剛体運動

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega},$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

条件・使い方：慣性テンソルは慣性系/物体系のどちらかで微分するか注意。物体系なら Euler 方程式に $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$ が加わる。

Euler 方程式（主軸系）

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = \tau_1,$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 = \tau_2,$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = \tau_3$$

条件・使い方：物体とともに回転する主軸座標系。

5.9 連続体・流体・波動

連続の方程式

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

条件・使い方：質量保存。非圧縮かつ ρ 定数なら $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ 。

Euler 方程式と Bernoulli 則

$$\rho(\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p - \rho \nabla \Phi,$$

$$\frac{1}{2} v^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \Phi = \text{const}$$

条件・使い方：粘性なし。Bernoulli は定常流の流線上。全空間で同じ定数になるには渦なし等の条件。

弦の波動

$$\partial_t^2 y = \frac{T}{\mu} \partial_x^2 y, \quad v = \sqrt{T/\mu},$$

$$\omega_n = \frac{n\pi v}{L}$$

条件・使い方：両端固定・長さ L ・張力 T ・線密度 μ 。

5.10 過去問の補助：冷たいプラズマ・運動する系

非磁化プラズマの横波分散

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -e\mathbf{E}, \quad \mathbf{J} = -ne\dot{\mathbf{x}},$$

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}, \quad \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$

条件・使い方：一様・無衝突・電子のみ運動する冷たいプラズマ、固定イオン背景。 $\omega < \omega_p$ は伝播せず減衰。

低温プラズマの縦波

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$
$$\varepsilon(\omega) = 0 \implies \omega = \omega_p$$

条件・使い方：冷たい・無磁場・衝突なし・電子プラズマ縦振動。温度が有限なら圧力由来の k 依存を生じる。

可変質量ロケットの速度増分

$$\Delta v = u \ln \frac{M_i}{M_f}$$

条件・使い方：外力なし・排気速度 u は機体に対して一定、非相対論的。一般の重力下では力による積分項を加える。

6 解法選択の最短ルート (実戦索引)

6.1 問題文から最初を選ぶ式

現れた条件・キーワード	最初に書く式	まず確認すること
2 準位・スピン 1/2・磁気共鳴	$H = h_0 I + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma}$	行列基底、駆動の時間依存
狭い障壁・デルタ井戸	ψ' の跳躍条件	波動関数の連続、束縛/散乱の区別
周期ポテンシャル・バンド	$\psi(x+a) = e^{ika} \psi(x)$	単位胞、周期境界、許容 k
摂動 λV	PVP または $E_n^{(1)}, E_n^{(2)}$	縮退の有無、摂動の小ささ
二段階遷移・二光子	$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2$	中間状態、選択則、時間順序
ゆっくり変化する Hamiltonian	断熱位相と非断熱結合	ギャップが閉じる場所はないか
球対称量子井戸・励起子	$u = rR$ の動径方程式	正則性、球対称性、換算質量
散乱と透過	確率流比 $T = j_{\text{trans}}/j_{\text{in}}$	波数/速度の比、WKB 条件
独立粒子の熱力学	Z, Ξ と $\partial_\beta \ln Z$	集団、固定する変数、縮退度
静的量子感受率	$\int_0^\beta \langle \delta X (-i\hbar u) \delta X \rangle du$	可換か非可換かを判定
外力で伸びる鎖	$H_f = H_0 - fL$	$dU = TdS - XdL$ と混同しない
低温フェルミ粒子	Sommerfeld 展開	固定 N か μ か
Bose 凝縮・トラップ	$N_{\text{ex}} = \int g(\epsilon) n_B d\epsilon$	基底エネルギー、状態密度
磁性・断熱消磁	$S(T, B) = \text{const}$	格子熱容量の有無
Ising 鎖	$Z = \text{Tr } T^N$	$J < 0$ の符号交替と相関長
拡散・確率過程	$\partial_t p = -\partial_x(ap) + D\partial_x^2 p$	Ito/Stratonovich、端の流束
電荷分布・導体	Poisson 方程式 / 鏡像法	境界電位、導体の接地有無
媒質境界・電磁波	$\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{E} = 0$	接線成分の振幅規約
導波管・共振器	$k_z^2 = \omega^2/v^2 - k_\perp^2$	TE/TM、壁面境界条件
導体中の交流波	$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$	$e^{-i\omega t}$ 規約と減衰枝
磁場中の荷電粒子	$m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	電荷の符号、ドリフト・回転
連成振動・安定性	$K\mathbf{u} = \omega^2 M\mathbf{u}$	質量行列の正定値性
中心力・古典散乱	$V_{\text{eff}} = V + L^2/(2mr^2)$	転回点と衝突径数
線形微分方程式	特性根・因果 Green 関数	境界条件、初期条件、減衰域
熱/波動方程式	Fourier 変換・固有関数展開	無限区間か有限境界か
複素積分	留数定理	極の位置と大円弧の寄与
大きいパラメータ	Laplace 法・WKB	鞍点が内部か・転回点か

6.2 計算途中で行う 5 つの検算

1. **単位**：指数の中は無次元、遷移率の次元は s^{-1} 、状態密度は energy^{-1} (状態数に対して)。
2. **符号**： $e^{-i\omega t}$ の規約、ポテンシャルエネルギー $q\phi$ 、自由エネルギーの微分符号。
3. **極限**： $T \rightarrow 0, \infty$ 、 $B \rightarrow 0$ 、 $\lambda \rightarrow 0$ 、導体率 $\sigma \rightarrow 0$ 、束縛のない極限。
4. **保存則**： $R + T = 1$ 、 $\int |\psi|^2 = 1$ 、 $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ 、エネルギーの出入り。
5. **適用条件**：摂動の小ささ、断熱ギャップ、量子縮退、転回点、境界条件、状態数の数え方。

重要な学習ルール：公式を単純暗記せず、何を微分・変分・対角化・積分するかを言えるようにする。過去問で新しい設定が出て、最初に立てる方程式は多くの場合この章から選べる。

6.3 頻出の等号が成立する条件

- $\Delta x \Delta p = \hbar/2$ はすべての状態ではなく、特定の最小不確定状態でのみ等号。

- $\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = k_B T \partial_h \langle X \rangle$ は古典または可換量子系の静的応答 ($H = H_0 - hX$) で直ちに成立。量子非可換系では注意。
- $\sigma_{\text{tot}} = \int |f|^2 d\Omega$ は散乱波の正規化と弾性散乱の定義を合わせる。
- $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -d\Phi_B/dt$ の回路移動では運動起電力を別途含める。
- $Z_N = Z_1^N / N!$ は古典的に希薄な識別不能粒子の理想気体極限。
- $pV^\gamma = \text{const}$ は理想気体・準静的断熱・熱容量一定が必要。

7 重要公式の適用条件・符号規約（教科書校正版と統一）

この章は『東大院への物理』135 ページ校正版で確定した訂正事項を反映する。既存の公式を使う前に、(1) 記号の定義、(2) 何を固定して微分するか、(3) 古典・量子可換性、(4) 境界条件、の4点を確認する。

7.1 外力と仕事：符号の二つの規約

圧力型の一般化力

$$\begin{aligned} dU &= TdS - XdL, \\ \Phi(T, X) &= U - TS + XL, \\ d\Phi &= -SdT + LdX \end{aligned}$$

条件・使い方：第一法則で $-XdL$ と定義したときの Legendre 変換。 $d\Phi$ を必ず微分で検算する。

外力結合した微視的 Hamiltonian

$$\begin{aligned} H_f &= H_0 - fL, \quad Z(f) = \text{Tre}^{-\beta(H_0 - fL)}, \\ \mathcal{F}(T, f) &= -k_B T \ln Z(f), \\ \partial_f \mathcal{F} &= -\langle L \rangle \end{aligned}$$

条件・使い方：微視的に f が L に共役な外力であり、 H_0 は外力を加える前のエネルギー。 $+XL$ の Legendre 変換と記号だけで同一視しない。

外力結合の線形応答

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \frac{1}{\beta} \partial_f \ln Z, \\ \partial_f \langle L \rangle &= \beta \text{Var}(L) \quad (\text{可換系}) \end{aligned}$$

条件・使い方： $H_f = H_0 - fL$ 、 L は f 非依存、古典系または $[H_0, L] = 0$ 。一般の量子非可換系には下記の公式を適用。

セルフチェック：「引く外力」 f を使う鎖では $H_f = H_0 - fL$ と書き、 $\partial_f \langle L \rangle \geq 0$ を確かめる。第一法則に $-XdL$ とある別規約なら、自然変数へ変換する符号は $+XL$ 。

7.2 量子の静的感受率：等時刻分散とは限らない

非可換量子系の虚時間 Kubo 相関

$$\begin{aligned} \chi_X &= \left. \frac{\partial \langle X \rangle_h}{\partial h} \right|_{h=0}, \quad H(h) = H_0 - hX, \\ \chi_X &= \int_0^\beta d\lambda \langle \delta X(-i\hbar\lambda) \delta X(0) \rangle_0, \\ X(-i\hbar\lambda) &= e^{\lambda H_0} X e^{-\lambda H_0}, \quad \delta X = X - \langle X \rangle_0 \end{aligned}$$

条件・使い方：有限次元・熱平衡の例。 λ はエネルギーの逆次元、上限 β 。 $[H_0, X] = 0$ のときだけ $\beta \text{Var}(X)$ に簡約する。

二準位系による反例

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{\Delta}{2} \sigma_z, \quad X = \sigma_x, \\ \chi_X &= \frac{2}{\Delta} \tanh\left(\frac{\beta\Delta}{2}\right), \\ \beta \text{Var}_0(X) &= \beta \end{aligned}$$

条件・使い方：非可換系 $[\sigma_z, \sigma_x] \neq 0$ 。 $\beta\Delta \rightarrow 0$ で両式は近づくが、低温では一致しない。

非可換系のスペクトル表示

$$\chi_X = \sum_{n,m} \frac{p_n - p_m}{E_m - E_n} |X_{nm}|^2,$$

$$p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_j e^{-\beta E_j}}$$

条件・使い方：ゼロ分母は連続極限で扱い、縮退ブロック内の適切な基底・対角寄与を保持。 $X_{nm} = \langle n|X|m\rangle$ 。

7.3 密度状態数・縮退度・次元

運動量空間から数えた状態数

$$\mathcal{N}(\epsilon) = g_{\text{int}} \frac{V_d}{(2\pi\hbar)^d} \text{Vol}\{\mathbf{p} : \epsilon(\mathbf{p}) \leq \epsilon\},$$

$$D(\epsilon) = \frac{d\mathcal{N}}{d\epsilon}$$

条件・使い方： g_{int} は内部縮退度、 V_d は実空間体積、 D は状態密度（単位 1/エネルギー）。同じ文字 g を兼用しない。

一般の等方分散と低エネルギー状態密度

$$\epsilon(\mathbf{k}) = c_s |\mathbf{k}|^s, \quad c_s > 0,$$

$$D(\epsilon) = \frac{g_{\text{int}} V_d S_{d-1}}{(2\pi)^d s c_s^{d/s}} \epsilon^{d/s-1},$$

$$S_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

条件・使い方： $\mathbf{k}$ は波数（ $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ ）。 c_s と空間の面積・体積 V_d を区別。低エネルギーでの連続近似。

2次元自由 Fermi 気体

$$D_{2D}(\epsilon) = \frac{g_{\text{int}} \mathcal{A} m}{2\pi\hbar^2},$$

$$\epsilon_F = \frac{2\pi\hbar^2 N}{g_{\text{int}} \mathcal{A} m}$$

条件・使い方： $\mathcal{A}$ は二次元系の面積（分散係数ではない）。二次分散・相互作用なし。

Bose 凝縮の低エネルギー必要条件

$$D(\epsilon) \sim \epsilon^{d/s-1},$$

$$N_{\text{ex}}(T, \mu \rightarrow 0) \sim \int_0^{\epsilon^{d/s-1}} \frac{\epsilon^{d/s-1}}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon$$

条件・使い方：均一な自由粒子の理想気体なら $d/s > 1$ で低エネルギー積分が収束。有限サイズ、相互作用、トラップは別に調べる。

7.4 反強磁性 Ising 鎖と固有値の符号

1次元 Ising 鎖の相関長（任意の結合符号）

$$\langle s_0 s_r \rangle_{h=0} = (\tanh \beta J)^r,$$

$$\xi^{-1} = -\ln |\tanh(\beta J)|$$

条件・使い方： $J \neq 0$ 、熱力学極限、無外場。 $J < 0$ では $(-1)^r$ の交替があり、絶対値を取らない対数は実数でない。

転送行列の固有値から求める相関長

$$\xi^{-1} = -\ln \left| \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right|,$$

$$\frac{\lambda_-}{\lambda_+} = \tanh(\beta J) \quad (h = 0)$$

条件・使い方：零磁場の 1次元最近接模型。外場があるときは連結相関と転送行列の固有モードを用いる。

7.5 揺らぎ・確率分布を扱う時の例外

エネルギー分散と温度微分

$$C_V = \frac{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}{k_B T^2}$$

条件・使い方：正準集団で Hamiltonian が T に陽に依存しない。温度依存の有効 Hamiltonian を置いたときは追加項を確かめる。

古典の一般化力の共分散

$$\partial_f \langle A \rangle_f = \beta (\langle AL \rangle_f - \langle A \rangle_f \langle L \rangle_f)$$

条件・使い方： $H_f = H_0 - fL$ で A が f に直接依存しない古典模型。 $A = L$ のとき分散を得る。

7.6 Bloch バンドと弱摂動の無次元条件

周期デルタ列の第 1 ギャップ

$$\begin{aligned} V(x) &= g \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - na), \quad q_0 = \pi/a, \\ \cos(ka) &= \cos(qa) + \frac{mg}{\hbar^2 q} \sin(qa), \\ \Delta E &= \frac{2|g|}{a} \left[1 + O\left(\frac{|mg|a}{\pi \hbar^2}\right) \right] \end{aligned}$$

条件・使い方： $E > 0$ の分散表示。Zone 端の弱結合十分条件は $|mg|/(\hbar^2 q_0) = |mg|a/(\pi \hbar^2) \ll 1$ 。次元をそろえない $|g| \ll 1$ は不可。

一般の弱い周期ポテンシャル

$$\begin{aligned} V_G &= \frac{1}{a} \int_0^a V(x) e^{-iGx} dx, \\ \Delta E_G &\simeq 2|V_G| \quad (\text{二準位が縮退する Bragg 面}) \end{aligned}$$

条件・使い方：Bragg 面の 2 状態縮退摂動。遠くの準位との結合に比べ $|V_G|$ が小さい必要がある。

7.7 Fresnel 係数・境界条件の採用規約

接線電場の振幅と光学アドミタンス

$$\begin{aligned} r &= \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad t = \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2} = 1 + r, \\ R &= |r|^2, \quad T = \frac{\Re Y_2}{\Re Y_1} |t|^2 \end{aligned}$$

条件・使い方：損失なしで $Y_j > 0$ の場合は $R + T = 1$ 。接線電場で定義した t 。損失媒質での法線流束には $\Re Y_j$ を用いる。

非磁性媒質の s/p アドミタンス

$$\begin{aligned} Y_s &= \frac{n \cos \theta}{Z_{\text{vac}}}, \\ Y_p &= \frac{n}{Z_{\text{vac}} \cos \theta}, \quad Z_{\text{vac}} = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} \end{aligned}$$

条件・使い方：面内電場の接線成分で r, t を定義。p 偏光の全電場振幅の定義とは符号・透過振幅の係数が異なる。

導体中の波の減衰方向

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \Re \left(E_0 e^{ikz - i\omega t} \right), \\ k^2 &= \mu \epsilon \omega^2 + i \mu \sigma \omega, \\ \Im k &> 0 \quad (\text{正の } z \text{ 方向に減衰}) \end{aligned}$$

条件・使い方：良導体近似 $\sigma \gg \omega \epsilon$ なら $k \approx (1 + i)/\delta$ 、 $\delta = \sqrt{2/(\mu \sigma \omega)}$ 。

7.8 固有時・散乱角・保存量の追加チェック

不変な固有時

$$\begin{aligned}d\tau^2 &= dt^2 - \frac{d\boldsymbol{x}^2}{c^2}, \\d\tau &= dt\sqrt{1 - v^2/c^2}\end{aligned}$$

条件・使い方：Lorentz 不変なのは $d\tau$ 全体で、 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ という速度因子単独ではない。

中心力の散乱角と衝突径数

$$\begin{aligned}\Theta &= \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b \, dr}{r^2 \sqrt{1 - b^2/r^2 - V(r)/E}}, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{b}{\sin \Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right|\end{aligned}$$

条件・使い方：中心力、相対運動エネルギー $E = mv_{\infty}^2/2$ 、 $V(\infty) = 0$ 、単一の散乱枝。散乱枝が複数あれば和を取る。

8 過去問解法への橋渡し：途中式で確かめる 8 例

8.1 例 1：非可換二準位系の感受率

設問型：二準位 Hamiltonian に外場を加え、零磁場での静的応答を求める。

出発： $H(h) = \frac{\Delta}{2}\sigma_z - h\sigma_x$ 。固有値は $\pm\Omega$ 、 $\Omega = \sqrt{(\Delta/2)^2 + h^2}$ 。

$$\begin{aligned} Z(h) &= 2 \cosh(\beta\Omega), \\ \langle\sigma_x\rangle_h &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial h} = \frac{h}{\Omega} \tanh(\beta\Omega), \\ \boxed{\chi_x} &= \left. \frac{\partial \langle\sigma_x\rangle_h}{\partial h} \right|_0 = \frac{2}{\Delta} \tanh\left(\frac{\beta\Delta}{2}\right). \end{aligned}$$

一方、 $\langle\sigma_x^2\rangle_0 = 1$ 、 $\langle\sigma_x\rangle_0 = 0$ より分散公式なら β となり一般に不一致。可換性の検査が先である。

8.2 例 2：独立二状態鎖の張力と伸長

1 要素の射影 $s_j a$ ($s_j = \pm 1$)、全伸長 $L = a \sum_j s_j$ と外力 f に対し

$$\begin{aligned} H_f &= -fL, \quad Z_N(f) = [2 \cosh(\beta f a)]^N, \\ \langle L \rangle &= \frac{1}{\beta} \partial_f \ln Z_N = N a \tanh(\beta f a), \\ \partial_f \langle L \rangle &= N \beta a^2 \operatorname{sech}^2(\beta f a) = \beta \operatorname{Var}(L). \end{aligned}$$

符号確認： $f > 0$ なら平均伸長は正で増加する。 $H_f = +fL$ と置けば符号が逆になるため、外力の定義が必要。

8.3 例 3：Ising 鎖の相関が交替する場合

零磁場、熱力学極限の転送行列の固有値は

$$\lambda_+ = 2 \cosh K, \quad \lambda_- = 2 \sinh K, \quad K = \beta J.$$

そのため

$$\langle s_0 s_r \rangle = \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^r = (\tanh K)^r, \quad \boxed{\xi = -\frac{1}{\ln |\tanh K|}}.$$

$J < 0$ では $\tanh K < 0$ で、奇数距離の相関は負。絶対値は相関の包絡線にだけ用いる。

8.4 例 4：2 次元状態密度と Fermi エネルギー

二次分散 $\epsilon = \hbar^2 k^2 / (2m)$ の二次元面積を $\mathcal{A}$ 、内部縮退度を g_{int} とすると

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\epsilon) &= \frac{g_{\text{int}} \mathcal{A}}{(2\pi)^2} \pi k^2 = \frac{g_{\text{int}} \mathcal{A} m}{2\pi \hbar^2} \epsilon, \\ D(\epsilon) &= \frac{g_{\text{int}} \mathcal{A} m}{2\pi \hbar^2}, \quad \boxed{\epsilon_F = \frac{2\pi \hbar^2 N}{g_{\text{int}} \mathcal{A} m}}. \end{aligned}$$

検算： D はエネルギーに依存しない。縮退度を 2 倍にすると同じ粒子数の ϵ_F は半分になる。

8.5 例 5：周期デルタ列のバンド端の展開

$V(x) = g \sum_n \delta(x - na)$ 。 $q_0 = \pi/a$ で $k = \pi/a$ 、 $qa = \pi + \eta$ と書くと

$$\begin{aligned} -1 &= \cos(qa) + \frac{mg}{\hbar^2 q} \sin(qa) \\ &= -1 + \frac{\eta^2}{2} - \alpha_0 \eta + O(\eta^3, \alpha_0 \eta^2), \quad \alpha_0 = \frac{mg}{\hbar^2 q_0}. \end{aligned}$$

一方の解は $\eta = 0$ 、もう一方は $\eta \simeq 2mg/(\hbar^2 q_0)$ 。したがって

$$\boxed{\Delta E \simeq \frac{2|g|}{a}}, \quad \boxed{\frac{|mg|a}{\pi \hbar^2} \ll 1} \quad (\text{展開の十分な弱結合条件}).$$

ギャップ幅の結果だけを暗記せず、無次元の小パラメータを確認する。高次項の次数は無次元変数 η, α_0 で数える。

8.6 例 6：Fresnel の接線電場での反射・透過

境界面で $E_{t,\parallel} = E_{i,\parallel} + E_{r,\parallel}$ 、かつ接線磁場連続を用いる。波の正向きに対するアドミタンス Y_j に対し

$$1 + r = t, \quad Y_1(1 - r) = Y_2 t, \\ r = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad t = \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2}.$$

損失なしなら $R = |r|^2$ 、 $T = (Y_2/Y_1)|t|^2$ 。検算： $R + T = 1$ 。p 偏光の全電場振幅を用いた別規約とは符号と定義を照合する。

8.7 例 7：鏡像法の力とエネルギーの二分の一

接地導体平面から高さ a にある点電荷 q に対して鏡像電荷 $-q$ を距離 $2a$ に置くと

$$F_z = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2a)^2} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2}, \\ \boxed{U(a)} = -\int_{\infty}^a F_z(a') da' = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a}.$$

鏡像電荷を実在する別粒子とみなして $q\phi_{\text{image}}$ を丸ごと数えると、エネルギーを 2 倍に誤る。正しい誘起エネルギーは $\frac{1}{2}q\phi_{\text{image}}$ である。

8.8 例 8：低温 Fermi 気体の粒子数固定

三次元自由 Fermi 気体の状態密度 $D(\epsilon) = C\sqrt{\epsilon}$ 、Sommerfeld 展開より

$$N = \frac{2C}{3}\mu^{3/2} + \frac{\pi^2 C}{12}(k_B T)^2 \mu^{-1/2} + O(T^4), \\ \boxed{\mu(T)} = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + O(T^4) \right].$$

注意： N 固定の問題では化学ポテンシャル μ を ϵ_F のまま固定せず、 T^2 補正まで求める。

8.9 最後に：問題を見たときの選択表

設問の特徴	最初に使う操作	代表的な検算
2×2 スピン行列	Pauli 分解・固有値・行列指数	$U^\dagger U = I$
自由エネルギーの外場微分	$H(h)$ の符号と $\partial_h \ln Z$	$\chi \geq 0$ (安定平衡)
量子磁化率	$[H_0, X]$ を先に計算	高温極限の分散
格子系の相関	転送行列の固有値比	$ \lambda_-/\lambda_+ < 1$
Bose/Fermi 粒子	状態密度と基底の扱い	粒子数の単位
導体・誘電体の境界	接線 E, H と法線 D, B	エネルギー流保存
大きなパラメータ	Taylor/WKB/Laplace の近似	無次元の少量
静電場の像電荷	境界電位・力積分	$F = -dU/da$
散乱角	保存エネルギー・角運動量	$V \rightarrow 0$ で直進

公開・引用について：この公式集は大学の公式資料ではなく、原題の文章を転載した問題集でもない。掲載する年度別索引は学習補助であり、100 学習枠は実際の試験大問数を意味しない。式には適用条件があり、全公式の逐次独立査読は今後の課題である。

9 年度別主題索引・資料の範囲

本編の公式は標準的な学部物理の公式を独自に整理したもので、東京大学の公開過去問題から問題文を転載したものではない。次の年度別索引は既存の過去 25 年度の作業用主題台帳を引き継いでおり、原題のすべての設問を精査したものではない。年度と試験実施年のずれにも注意する。

公式の参照に使う順序：年度別主題を見つける → 分野の該当節へ進む → 数式の条件を読む → 詳細な導出は別冊『東大院への物理』（2026 年 10 月 14 日校正版）で確認する。

量子力学（主題索引：年度順）

年度	作業用の主題分類
2026	周期デルタ関数とバンドギャップ
2025	時間依存摂動と二光子遷移
2024	スクイーズド状態
2023	2 次元調和振動子
2022	最小不確定状態
2020	二準位測定・Bell 型相関
2019	調和振動子と四次摂動
2018	断熱近似
2017	二粒子振動子と自由波束
2016	磁束中の電子とゼロモード
2015	円周上のデルタ関数ポテンシャル
2014	水素原子・Landau 準位・正準変換
2013	量子調和振動子・コヒーレント状態
2012	スピンと磁気共鳴
2011	分離型ポテンシャル
2010	無限深井戸と中央デルタ障壁
2009	スピン 1/2 と量子相関
2008	2 次元等方調和振動子
2007	角運動量の量子化
2006	無限深井戸と一次摂動論
2005	有限井戸と共鳴透過
2004	量子調和振動子
2003	井戸の拡張と断熱定理
2002	1 次元調和振動子・コヒーレント状態
2001	有限井戸の束縛状態・浅い引力井戸

統計力学（主題索引：年度順）

年度	作業用の主題分類
2026	高分子鎖と Ising 模型
2025	調和トラップ中の Bose 気体
2024	理想気体と吸着平衡
2023	Dirac 電子・低温比熱
2022	Bose 凝縮と磁場
2020	古典理想気体・Fermi 統計
2019	2 方向スピン模型・転送行列
2018	古典理想気体・有限箱 Bose 気体
2017	反強磁性 Ising 模型
2016	連成振動子とフォノンの低温比熱
2015	高分子鎖と揺らぎ・応答
2014	2 次元 Fermi 気体・2 バンド
2013	3 次元理想 Bose 気体・断熱磁場変化
2012	剛体回転子・オルト／パラ水素
2011	三角スピン模型・Brillouin 関数
2010	2 状態鎖状分子とエントロピー

年度	作業用の主題分類
2009	Fermi・Bose 統計と大分配関数
2008	3 状態分子と揺らぎ・応答
2007	相互作用スピン対の磁化率
2006	黒体放射と Planck 分布
2005	自由電子気体と熱電子放出
2004	2 状態鎖状分子・張力・Gibbs 自由エネルギー
2003	二元合金・平均場・Landau 展開・相分離
2002	鎖状高分子・エントロピー弾性と電場
2001	周期 1 次元 Ising 模型・分配関数

電磁気学・力学（主題索引：年度順）

年度	作業用の主題分類
2026	荷電質点・磁場・回転する管
2025	静電場・Poisson 方程式・鏡像法
2024	Rayleigh 散乱・光ピンセット
2023	双極子・四重極子・相互作用
2022	電磁波・Fresnel 係数・全反射
2020	同軸ケーブル・TEM モード
2019	重力波による連星運動の減衰
2018	電気双極子の放射・干渉
2017	二重振子・固有モード移行
2016	相対論的ロケット・固有加速度
2015	運動する電荷と Lorentz 変換
2014	導体の表皮効果・電力反射率
2013	電磁ポテンシャル・荷電粒子・ゲージ変換
2012	束縛電子の強制振動と誘電体分散
2011	電磁場中の荷電粒子・不均一磁場
2010	導体内の電磁波・平行導体
2009	弾性散乱・2 体中心力運動
2008	矩形導波管のモードと遮断周波数
2007	回転系の制限 3 体問題
2006	平面電磁波・真空の Maxwell 方程式
2005	スイングバイ・重力の中心力散乱
2004	光電場下の電子の運動・電場エネルギー
2003	同軸・偏心導線と接地円筒
2002	誘電界面での電磁波の反射・屈折
2001	一定固有加速度で運動するロケット

数学（主題索引：年度順）

年度	作業用の主題分類
2026	冪零行列・行列指数／特性曲線
2025	Pauli 行列／直交多項式
2024	Fourier 変換／固有値
2023	留数定理／行列指数
2022	複素積分／階数 1 摂動・安定性
2020	移流拡散／巡回行列
2019	Hermite 行列・SU(3)／スペクトル ζ
2018	最小ノルム解／非線形方程式
2017	Laplace 変換／回転
2016	行列漸化式／非線形波動
2015	Cayley-Hamilton／熱核
2014	常微分方程式／巡回行列

年度	作業用の主題分類
2013	Vandermonde / 偏微分方程式
2012	Pauli 行列 / 連立 PDE
2011	反交換行列 / Green 関数
2010	最急降下法 / 波動方程式
2009	実対称行列 / 二準位
2008	3 次元回転 / Hermite 多項式
2007	回転・Vandermonde / 複素解析
2006	スペクトル分解 / 変分法
2005	ユニタリ行列 / Fokker-Planck
2004	多項式の線形写像 / 熱方程式
2003	外積・回転 / 球対称波動
2002	実対称行列 / Laplace 方程式
2001	部分空間 / Bessel / 減衰振動

9.1 古い年度と公開原題の扱い

1993～2000 年度入学分の資料には、現在と出題形式が異なる選択式の専門問題・一般問題が含まれる。本書では二重井戸、プラズマ分散、断熱消磁、同種フェルミ粒子、球形有限井戸、WKB、矩形導波管などの解法に共通する公式を収録した。問題数や出題確率をそのまま近年と比較しない。

参考ページ（2026 年 10 月 14 日時点の参照先）：

<https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/about/147/>

https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/g_info/49259/

<https://akinomyoga.github.io/ributsu-inshi-kakomon/>

利用上の注意：出題範囲・試験制度・持ち込み可否等は受験年度の正式な募集要項・案内を優先。本書を試験に持ち込めるとの保証はない。内容は自習用、第 2 版。全小問の照合や完全査読は未了。