

難問に挑み、**合格**をつかむ。

本質を問う問題で
思考力を鍛える

東大院試 対策問題パック

物理 予想問題集

第**4**集

全5集シリーズ

出題分野

量子力学

統計力学

電磁気学

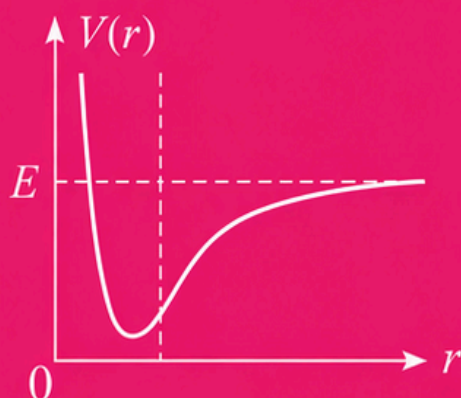
力学

数学

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(r)\psi$$



$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$



この1冊で、院試物理を徹底対策！



オリジナル予想問題を多数収録

過去問を徹底分析した、実戦的な良問で演習！



詳しい解答・解説

解法の考え方から丁寧に解説し、理解を深める！



東大院試の出題傾向に完全対応

典型問題から応用・発展問題まで幅広くカバー！



解法のポイント・物理の本質も解説

答案作成のコツや思考プロセスも学べる！

taku

takuphys.com

本書の使い方

本書は東京大学大学院理学系研究科物理学専攻の公開試験問題・出題分野を参考に**独立に作成した予想演習**である。大学公表の問題や模範解答の転載ではない。実際の出題を予告・保証するものでもない。

第1～3集と重なりにくい模型を採用し、**式の導出、保存則、境界条件、近似の妥当性**を中心に問う。第1～4回の全小問と第5回の20小問中19小問は標準学部物理の適用、第5回第1問(5)のみを幾何学的位相の $+\alpha$ 問題とする。

試験構成と注意

専攻の公表資料では2027年度入学試験(2026年実施)の専門科目は**数学1問・物理3問の計4問必答、試験時間240分**。本書はその構成を参考にすが、独自の解答・難度・配点である。

https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/g_info/49259/

実施手順：「問題編」の第1問～第4問を240分で解き、制限時間後に「詳解編」で検算する。公式を暗記するだけでなく、式の各項の単位・符号・極限を必ず確認する。

第1～3集と異なる重点題材

水素原子の変分法・Stark効果、単一サイトの局所相互作用、Debye-Hückel遮蔽、伝導シート、Airy関数、密度の異なる弦、初帰還確率、周波数以外を急変させる調和振動子、回転系の統計、Paulトラップ、非線形振動子の周波数補正、有限系の一次相転移、複屈折、特異摂動・境界層などを扱う。

目次

本書の使い方	1
第1～3集と異なる重点題材	1
第1回 変分原理・局所相互作用・誘電体への力・臨界漸近	4
第1回第1問水素型原子の変分法と遮蔽【量子力学】	4
第1回第2問相互作用する単一サイトの二種フェルミ粒子【統計力学】	5
第1回第3問平行平板コンデンサーに挿入する誘電体【電磁気学】	6
第1回第4問四次の臨界鞍点とLaplace積分【数学】	7
第2回 縮退 Stark効果・遮蔽・薄膜境界条件・初到達	8
第2回第1問水素原子 $n=2$ の線形 Stark効果【量子力学】	8
第2回第2問 Debye-Hückel遮蔽と電解質【統計力学】	9
第2回第3問導電性二次元シートでの電磁波の反射【電磁気学】	10

第 2 回第 4 問ドリフト拡散の境界到達確率【数学】	11
第 3 回 量子三角井戸・波の界面・初帰還の統計	12
第 3 回第 1 問重力型量子井戸と Airy 関数【量子力学】	12
第 3 回第 2 問二準位の多重度を持つ Schottky 系【統計力学】	13
第 3 回第 3 問異なる線密度を持つ弦の振動【古典力学】	14
第 3 回第 4 問一次元ランダムウォークの初帰還【数学】	15
第 4 回 量子変位クエンチ・回転統計・Paul トラップ・非線形振動	16
第 4 回第 1 問調和振動子の突然の中心移動【量子力学】	16
第 4 回第 2 問二次元回転トラップ中の古典気体【統計力学】	17
第 4 回第 3 問高周波 Paul トラップの有効ポテンシャル【電磁気学・力学】	18
第 4 回第 4 問 Duffing 振動子の永年項と周波数補正【数学】	19
第 5 回 断熱スピン・一次転移・複屈折・境界層	20
第 5 回第 1 問回転磁場中のスピンと幾何学的位相【量子力学】	20
第 5 回第 2 問有限系の一次相転移とエネルギー揺らぎ【統計力学】	21
第 5 回第 3 問複屈折位相板と偏光測定【電磁気学】	22
第 5 回第 4 問特異摂動と境界層の幅【数学】	23
第 1 回 詳解：変分・局所状態・誘電体力・臨界漸近	24
第 1 回第 1 問の解答水素型原子の変分法	24
第 1 回第 2 問の解答相互作用する単一サイト	25
第 1 回第 3 問の解答誘電体に働く力	26
第 1 回第 4 問の解答四次鞍点の漸近	27
第 2 回 詳解：縮退摂動・Debye 遮蔽・導電シート・初到達	28
第 2 回第 1 問の解答水素原子の Stark 効果	28
第 2 回第 2 問の解答 Debye-Hückel 遮蔽	29
第 2 回第 3 問の解答二次元導電シート	30
第 2 回第 4 問の解答ドリフト拡散の初到達	31
第 3 回 詳解：Airy 束縛状態・Schottky 比熱・界面振動・初帰還	32
第 3 回第 1 問の解答量子三角井戸と Airy 関数	32
第 3 回第 2 問の解答 Schottky 二準位系	33

第 3 回第 3 問の解答線密度の異なる弦	34
第 3 回第 4 問の解答対称ランダムウォークの初帰還	35
第 4 回 詳解：変位クエンチ・回転系・高周波平均・非線形振動	36
第 4 回第 1 問の解答調和振動子の変位クエンチ	36
第 4 回第 2 問の解答回転系の古典気体	37
第 4 回第 3 問の解答高周波 Paul トラップ	38
第 4 回第 4 問の解答 Duffing 振動子の永年項	39
第 5 回 詳解：スピン断熱発展・有限系転移・偏光・境界層	40
第 5 回第 1 問の解答回転する磁場中のスピン	40
第 5 回第 2 問の解答有限系の一次転移	41
第 5 回第 3 問の解答複屈折と偏光	42
第 5 回第 4 問の解答境界層の幅	43
学習設計・予想根拠	44
出典と権利	44

第 1 回 | 変分原理・局所相互作用・誘電体への力・臨界漸近

本書独自の模試条件：4 大問必答／240 分／各大問 100 点換算。各大問は 5 小問。難度や配点は東京大学の公式指定ではありません。

第 1 回 第 1 問 水素型原子の変分法と遮蔽【量子力学】

質量 m 、電荷 $-e$ の粒子が、固定された電荷 $+Ze$ から Coulomb 引力 $V(r) = -Ze^2/(4\pi\epsilon_0 r)$ を受ける。 $\kappa = Ze^2/(4\pi\epsilon_0) > 0$ 、 $a > 0$ とし、実試行波動関数を $\psi_a(\mathbf{r}) = C_a e^{-r/a}$ とする。最後に小さい遮蔽 $\delta V(r) = \eta\kappa(1 - e^{-r/\lambda})/r$ ($|\eta| \ll 1, \lambda > 0$) を加える。

- (1) 波動関数を規格化して C_a を決めよ。
- (2) 運動エネルギーと Coulomb ポテンシャルの期待値を求めよ。
- (3) $\langle H \rangle_a$ を最小にする a_* と変分エネルギー E_* を求めよ。
- (4) 最小点での virial 関係 $2\langle T \rangle = -\langle V \rangle$ を確認せよ。
- (5) 最適状態に対する δV の一次補正を積分で計算し、 $\lambda \rightarrow \infty$ での極限を示せ。

第1回 第2問 相互作用する単一サイトの二種フェルミ粒子【統計力学】

一つのサイトに $\uparrow, \downarrow$ のフェルミ粒子がそれぞれ 0 個または 1 個存在できる。二粒子が同時にいる場合のみエネルギー $U > 0$ を要する。化学ポテンシャル μ 、温度 T として、 $n = n_{\uparrow} + n_{\downarrow}$ 、 $D = n_{\uparrow}n_{\downarrow}$ を定義する。

- (1) 4つの微視状態を列挙し、大分配関数 Ξ を求めよ。
- (2) 平均粒子数 $\langle n \rangle$ と二重占有率 $\langle D \rangle$ を求めよ。
- (3) 粒子数揺らぎ $\text{Var}(n)$ を $\langle n \rangle, \langle D \rangle$ で表せ。
- (4) 等温感受率 $\partial \langle n \rangle / \partial \mu$ と揺らぎの関係を示せ。
- (5) $\mu = U/2$ で $\langle n \rangle = 1$ を示し、 $T \rightarrow 0$ の二重占有率を求めよ。

第1回 第3問 平行平板コンデンサーに挿入する誘電体【電磁気学】

長さ L 、幅 w 、極板間隔 $d \ll L, w$ の平行平板コンデンサーに、比誘電率 $\varepsilon_r > 1$ の誘電体板を横から長さ x ($0 \leq x \leq L$) だけ挿入する。誘電体と真空の領域は面積方向に並列、縁効果は無視できる。面積 $A = wL$ 。

- (1) 静電容量 $C(x)$ を求め、並列接続となる理由を説明せよ。
- (2) 電圧 V 固定で、真空部と誘電体部の電場 E および D を求めよ。
- (3) 総電荷 Q 固定の静電エネルギー $U_Q(x)$ と挿入力 F_Q を求めよ。
- (4) 電圧 V 固定時に電源の仕事を含むポテンシャルを選び、挿入力 F_V を求めよ。
- (5) いずれの条件でも誘電体が吸い込まれることを示し、 $\varepsilon_r \rightarrow 1$ での極限を確認せよ。

第 1 回 第 4 問 四次の臨界鞍点と Laplace 積分【数学】

大きな実数 $N > 0$ と実数 t に対して

$$I_N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-N \left(\frac{x^4}{4} + \frac{tx^2}{2} \right) \right] dx$$

を考える。必要な Gamma 関数は $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} y^{s-1} e^{-y} dy$ で定義する。

- (1) $t > 0$ 固定で $N \rightarrow \infty$ の先頭漸近形を求めよ。
- (2) $t = 0$ の積分を Gamma 関数で厳密に評価せよ。
- (3) $t < 0$ 固定で極小点を調べ、先頭漸近形を求めよ。
- (4) $t = sN^{-1/2}$ での厳密なスケーリング表示を求めよ。
- (5) $t = 0$ の分布で $\langle x^2 \rangle$ を求め、 $t > 0$ の Gaussian スケーリングと比較せよ。

第 2 回 | 縮退 Stark 効果・遮蔽・薄膜境界条件・初到達

本書独自の模試条件：4 大問必答／240 分／各大問 100 点換算。各大問は 5 小問。難度や配点は東京大学の公式指定ではありません。

第 2 回 第 1 問 水素原子 $n = 2$ の線形 Stark 効果【量子力学】

水素原子の $n = 2$ 準位を、スピンと微細構造を無視して考える。 $+z$ 向きの一様静電場 $\mathcal{E}$ を印加し、電子の摂動を $H' = e\mathcal{E}z$ とする。Bohr 半径を a_0 とし、必要に応じて次を用いよ ($C = 1/(4\sqrt{2\pi a_0^3})$) :

$$\psi_{200} = C(2 - r/a_0)e^{-r/(2a_0)}, \quad \psi_{210} = C(r/a_0)e^{-r/(2a_0)} \cos \theta.$$

- (1) 偶奇性と角運動量から、 $n = 2$ 部分空間で非零となる z の行列要素を判定せよ。
- (2) $\langle 200|z|210 \rangle$ を計算せよ。 $\int_0^\infty r^n e^{-r/a_0} dr = n!a_0^{n+1}$ を使ってよい。
- (3) 縮退摂動行列を対角化し、一次エネルギー分裂と固有状態を求めよ。
- (4) $n = 1$ の非縮退基底状態で一次補正がゼロとなる理由を述べよ。
- (5) $2s, 2p_0$ に小さい無摂動エネルギー差 $\Delta > 0$ がある場合の正確な 2×2 固有値と、弱電場での低い準位の二次補正を求めよ。

第2回 第2問 Debye-Hückel 遮蔽と電解質【統計力学】

誘電率 ε の一様媒質に価数 ± 1 のイオンが各平均密度 n_0 で存在する。各イオンの電荷は $\pm e$ 、温度は T 、静電ポテンシャルは ϕ である。希薄な古典平衡で $n_{\pm}(\mathbf{r}) = n_0 \exp[\mp \beta e \phi(\mathbf{r})]$ 、 $\beta = (k_B T)^{-1}$ とする。原点に試験電荷 Q を置く。

- (1) $|\beta e \phi| \ll 1$ で誘起電荷密度を線形化せよ。
- (2) Poisson 方程式から遮蔽定数 κ_D を求めよ。
- (3) $r > 0$ での球対称ポテンシャルを求め、原点の電荷を満たす係数を決めよ。
- (4) 誘起電荷の空間積分が $-Q$ であることを確かめよ。
- (5) 裸の Coulomb ポテンシャルとの差を利用して、試験電荷の遮蔽による過剰エネルギー $\frac{1}{2} Q \phi_{\text{ind}}(0)$ を求め、近似条件を述べよ。

第2回 第3問 導電性二次元シートでの電磁波の反射【電磁気学】

真空中 $z = 0$ に、複素シート伝導率 $\sigma_s(\omega)$ の極薄膜を置く。 $z < 0$ から $+z$ へ進む x 偏光平面波を垂直入射し、時間依存を $e^{-i\omega t}$ とする。真空インピーダンス $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 。表面電流は $K_x = \sigma_s E_x(0)$ 、入射・反射・透過電場振幅比を r, t とする。

- (1) 電場の接線連続性から r, t の関係を求めよ。
- (2) 磁場の跳び条件から r, t を $Z_0 \sigma_s$ で表せ。
- (3) 実正の σ_s に対する反射率 R 、透過率 T 、吸収率 A を求めよ。
- (4) σ_s が実正の場合に吸収率の最大値とその条件を求めよ。
- (5) $\sigma_s(\omega) = n_{2D} e^2 \tau / [m(1 - i\omega\tau)]$ の Drude 模型で $\text{Re } \sigma_s > 0$ を示し、一般の複素伝導率の A を表せ。

第2回 第4問 ドリフト拡散の境界到達確率【数学】

$0 < X_t < L$ で $dX_t = v dt + \sqrt{2D} dW_t$ ($D > 0$) に従う粒子を考える。 $x = 0, L$ は吸収境界とする。 W_t は標準 Brown 運動で、 v は実定数。 $p(x)$ は初期位置 x から先に L に達する確率、 $\tau(x)$ はどちらかの端に達するまでの平均時間とする。

- (1) 微小時間の後退方程式から生成作用素 $\mathcal{L}$ を求めよ。
- (2) $\mathcal{L}p = 0$ と境界条件を解き、 $v \neq 0$ の $p(x)$ を求めよ。
- (3) $v \rightarrow 0$ の極限を計算せよ。
- (4) $\mathcal{L}\tau = -1$ と境界条件を解き、 $v \neq 0$ の $\tau(x)$ を $p(x)$ で表せ。
- (5) $v \rightarrow 0$ で $\tau(x) = x(L-x)/(2D)$ を得て、 D の次元を検算せよ。

第 3 回 | 量子三角井戸・波の界面・初帰還の統計

本書独自の模試条件：4 大問必答／240 分／各大問 100 点換算。各大問は 5 小問。難度や配点は東京大学の公式指定ではありません。

第 3 回 第 1 問 重力型量子井戸と Airy 関数【量子力学】

半直線 $x > 0$ で質量 m の粒子が線形ポテンシャル $V(x) = Fx$ ($F > 0$) に束縛される。 $x = 0$ は無限に高い壁とし $\psi(0) = 0$ 、無限遠で規格化可能とする。Airy 関数 $\text{Ai}(u)$ は $y''(u) = uy(u)$ の減衰解とする。

- (1) 長さ $\ell = (\hbar^2/2mF)^{1/3}$ を導入し Schrödinger 方程式を Airy 方程式に変換せよ。
- (2) $\text{Ai}(-a_n) = 0$ ($0 < a_1 < a_2 < \dots$) を用い、束縛エネルギー E_n を求めよ。
- (3) 固有関数を規格化せよ。 $\int_{-a_n}^{\infty} \text{Ai}(u)^2 du = \text{Ai}'(-a_n)^2$ を使ってよい。
- (4) Hellmann–Feynman 定理で $\langle x \rangle_n$ を求め、virial 定理を確認せよ。
- (5) WKB 量子化を用いて大きな n における a_n の漸近式を導け。硬い壁の位相を含む条件は $\int_0^{E/F} p(x) dx = \pi\hbar(n - 1/4)$ とする。

第3回 第2問 二準位の多重度を持つ Schottky 系【統計力学】

独立な N 個のサイトは、基底エネルギー 0（縮退度 1）と励起エネルギー $\Delta > 0$ （縮退度 $g \geq 1$ ）のどちらかを取る。サイト間相互作用を無視する。 $\beta = (k_B T)^{-1}$ とする。

- (1) 正準分配関数 Z_N を求めよ。
- (2) 励起占有率 p と内部エネルギー U を求めよ。
- (3) 熱容量 C_V とエネルギーの分散を求め、関係 $\text{Var}(E) = k_B T^2 C_V$ を検算せよ。
- (4) $T \rightarrow 0$ と $T \rightarrow \infty$ での C_V の振る舞いを求めよ。
- (5) $g = 1$ のとき C_V の極大条件を無次元変数 $u = \Delta/(k_B T)$ で導き、極大温度が $T \sim \Delta/k_B$ となる理由を説明せよ。

第3回 第3問 異なる線密度を持つ弦の振動【古典力学】

長さ L の両端固定弦に張力 $T > 0$ が一様に掛かっている。左半分 $0 < x < L/2$ は線密度 μ_1 、右半分 $L/2 < x < L$ は線密度 μ_2 (ともに正) とする。小振幅横変位を $y(x, t)$ とする。

- (1) 各領域の波動方程式と速度 c_i を求め、界面条件を列挙せよ。
- (2) 正規モードの各領域の解を構成し、許される角振動数 ω の行列式条件を導け。
- (3) $\mu_1 = \mu_2$ のとき通常の弦の固有振動数を再現せよ。
- (4) 無限界面に左から入射する波の反射振幅 r と透過振幅 t を求めよ。
- (5) エネルギー流を用い、反射率と透過率の和が 1 になることを示せ。

第3回 第4問 一次元ランダムウォークの初帰還【数学】

整数格子上を $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ で動く対称ランダムウォークを考える。 $\xi_j = \pm 1$ は各確率 $1/2$ で独立、 $S_0 = 0$ 。原点への初帰還時刻を $T_0 = \min\{n \geq 1 : S_n = 0\}$ とする。

- (1) 偶数時刻 $2n$ で原点にいる確率 u_{2n} を求めよ。
- (2) 特性関数 $\langle e^{ikS_n} \rangle$ を求め、平均・分散を計算せよ。
- (3) 原点帰還確率の生成関数 $U(z) = \sum_{n \geq 0} P(S_n = 0)z^n$ を求めよ。
- (4) 初帰還確率の生成関数 $F(z) = \sum_{n \geq 1} P(T_0 = n)z^n$ を求めよ。
- (5) $P(T_0 = 2n)$ を二項係数で表し、 $n \rightarrow \infty$ の漸近形を求めよ。

第 4 回 | 量子変位クエンチ・回転統計・Paul トラップ・非線形振動

本書独自の模試条件：4 大問必答／240 分／各大問 100 点換算。各大問は 5 小問。難度や配点は東京大学の公式指定ではありません。

第 4 回 第 1 問 調和振動子の突然の中心移動【量子力学】

粒子は初め $H_i = p^2/(2m) + m\omega^2 x^2/2$ の基底状態にある。 $t = 0$ に中心が距離 d だけ突然動き、 $H_f = p^2/(2m) + m\omega^2 (x - d)^2/2$ となる。 ω 自体は変化しない。 $S = m\omega d^2/(2\hbar)$ と置く。

- (1) H_i, H_f のエネルギー固有値と固有状態の関係を述べよ。
- (2) クエンチ直後の波束を H_f の固有状態で展開し、励起量子数 n の測定確率 P_n を求めよ。
- (3) $\langle n \rangle$ と $\text{Var}(n)$ を求めよ。
- (4) クエンチによる平均仕事 $\langle H_f \rangle - \langle H_i \rangle$ を二通りで計算せよ。
- (5) 初期状態への戻り確率 $|\langle 0_i | e^{-iH_f t/\hbar} | 0_i \rangle|^2$ を求めよ。

第4回 第2問 二次元回転トラップ中の古典気体【統計力学】

二次元 (x, y) で質量 m の非相互作用古典粒子 N 個を、等方調和トラップ $V = m\omega_0^2 r^2/2$ に閉じ込める。角速度 Ω で回る座標系の Hamiltonian は $H_{\text{tot}} = p^2/(2m) + m\omega_0^2 r^2/2 - \Omega L_z$ である。 $|\Omega| < \omega_0$ で、量子統計効果を無視する。

- (1) 運動量の平方完成をして安定条件を説明せよ。
- (2) 平面の位相空間積分から一粒子分配関数 Z_1 を求めよ (測度 $d^2r d^2p/h^2$)。
- (3) 区別できない N 粒子の Z_N を求めよ。
- (4) 平均角運動量 $\langle L_z \rangle$ と一粒子の $\langle r^2 \rangle$ を求めよ。
- (5) L_z の分散と、 $|\Omega| \rightarrow \omega_0$ で分配関数が発散する意味を説明せよ。

第4回 第3問 高周波 Paul トラップの有効ポテンシャル【電磁気学・力学】

平面上のイオン（質量 m 、電荷 q ）が電位

$$\phi(x, y, t) = \frac{V_0 \cos(\Omega t)}{2r_0^2}(x^2 - y^2)$$

の下で運動する。電磁波の遅延や磁気力は無視できるとする。 $a = qV_0/(mr_0^2)$ （符号付き）と置き、 $|a|/\Omega^2 \ll 1$ を仮定する。

- (1) 電位が真空中の Laplace 方程式を満たすことを確かめよ。
- (2) x, y の運動方程式を求めよ。
- (3) 遅い座標 X, Y と速い微小振動 ξ_x, ξ_y に分け、速い成分を先頭次数で求めよ。
- (4) 高周波平均から遅い運動の周波数 ω_{sec} を求めよ。
- (5) 有効ポテンシャルを求め、その適用条件と静電場のみでの閉じ込めとの差を説明せよ。

第 4 回 第 4 問 Duffing 振動子の永年項と周波数補正【数学】

初期条件 $x(0) = A > 0$, $\dot{x}(0) = 0$ の非線形振動子

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon x^3 = 0, \quad \omega_0 > 0, \quad |\epsilon| A^2 \ll \omega_0^2$$

を考える。

- (1) 保存エネルギーを求め、初期エネルギーを書け。
- (2) $x = x_0 + \epsilon x_1 + \cdots$ として零次解と x_1 の方程式を求めよ。
- (3) x_1 の永年項 ($t \sin \omega_0 t$ に比例) を求めよ。
- (4) Lindstedt の考え方で $\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \cdots$ を導き、 ω_1 を求めよ。
- (5) 周期 T の一次補正と近似の適用限界を説明せよ。

第 5 回 | 断熱スピン・一次転移・複屈折・境界層

本書独自の模試条件：4 大問必答／240 分／各大問 100 点換算。各大問は 5 小問。難度や配点は東京大学の公式指定ではありません。

第 5 回 第 1 問 回転磁場中のスピンと幾何学的位相【量子力学】

スピン $1/2$ の Hamiltonian が $H(t) = -\frac{\Delta}{2} \mathbf{n}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ($\Delta > 0$) で与えられる。 $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ は単位ベクトル。 θ は一定、 φ が 0 から 2π へゆっくり一周する。Pauli 行列の標準表示を用いる。

- (1) 固有エネルギーと基底状態の正規化 spinor を求めよ。
- (2) 基底状態での $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ を求めよ。
- (3) 動的位相 $-\int E dt / \hbar$ を求めよ。
- (4) 断熱条件を $\dot{\varphi}, \theta, \Delta$ から評価せよ。
- (5) 【+ α 】 Berry 接続 $\mathcal{A}_\varphi = i \langle + | \partial_\varphi + \rangle$ と、一周の幾何学的位相を求めよ。

第5回 第2問 有限系の一次相転移とエネルギー揺らぎ【統計力学】

粒子 N 個の大きい系で、互いに区別された二つの巨視的相 A,B のみが競合している。相 $i = 1, 2$ の全エネルギーは $N e_i$ 、状態数は $\exp(N s_i / k_B)$ と近似できる。 $e_2 > e_1, s_2 > s_1$ で、 e_i, s_i は温度によらない定数とする。

- (1) 正準分配関数 Z_N を二項で書け。
- (2) 二相の統計的重みが等しくなる温度 T_c を求めよ。
- (3) 相 2 の確率 $p_2(T)$ と内部エネルギー $U(T)$ を求めよ。
- (4) エネルギー分散と熱容量を求め、 $T = T_c$ での N 依存を調べよ。
- (5) 転移の温度幅が $O(N^{-1})$ となること、潜熱の N 依存を説明せよ。

第5回 第3問 複屈折位相板と偏光測定【電磁気学】

反射・吸収が無視できる理想的な位相板を考える。厚さ d 、主軸の屈折率 n_x, n_y を通る $x \cdot y$ 偏光の波は、振幅を変えず位相だけを得るとする。入射 Jones ベクトルは $\mathbf{E}_{\text{in}} = E_0(1, 1)^T / \sqrt{2}$ 。時間因子は $e^{-i\omega t}$ 、光速は c_0 。

- (1) 出射 Jones ベクトルを全体位相を除いて表せ。
- (2) 相対位相 δ を $\omega, d, n_y - n_x$ で表せ。
- (3) $S_0 = |E_x|^2 + |E_y|^2$, $S_1 = |E_x|^2 - |E_y|^2$, $S_2 = 2 \operatorname{Re}(E_x^* E_y)$, $S_3 = 2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y)$ を求めよ。
- (4) 出射光が直線偏光、円偏光になる δ の条件を述べよ。
- (5) 透過軸と x 軸が角 α をなす理想偏光子の後の強度比 $I(\alpha)/I_0$ を求めよ。

第5回 第4問 特異摂動と境界層の幅【数学】

小さな $\epsilon > 0$ に対して境界値問題

$$\epsilon y''(x) + y'(x) = 0 \quad (0 < x < 1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

を考える。

- (1) $\epsilon > 0$ での厳密解を求めよ。
- (2) $\epsilon \rightarrow 0^+$ における外部解 ($x > 0$ 固定) と境界条件との矛盾を説明せよ。
- (3) $X = x/\epsilon$ を用いて内部解 (境界層解) を求めよ。
- (4) $\int_0^1 y(x) dx$ の厳密式と $\epsilon \rightarrow 0^+$ の漸近形を求めよ。
- (5) $\int_0^1 [y'(x)]^2 dx$ を求め、境界層の幅が $O(\epsilon)$ であることを定量化せよ。

第 1 回 | 詳解：変分・局所状態・誘電体力・臨界漸近

第 1 回 第 1 問の解答 水素型原子の変分法

(1) 3 次元球対称積分で

$$1 = 4\pi|C_a|^2 \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a} dr = 4\pi|C_a|^2 \frac{a^3}{4}.$$

したがって位相を実正に選ぶと $C_a = (\pi a^3)^{-1/2}$ 。

(2) $\nabla\psi_a = -\hat{r}\psi_a/a$ 。部分積分で $\langle T \rangle = (\hbar^2/2m) \int |\nabla\psi_a|^2 d^3r = \boxed{\hbar^2/(2ma^2)}$ 。また $\langle r^{-1} \rangle = (4/a^3) \int_0^\infty r e^{-2r/a} dr = 1/a$ なので $\boxed{\langle V \rangle = -\kappa/a}$ 。

(3) $E(a) = \hbar^2/(2ma^2) - \kappa/a$ 。 $E'(a) = -\hbar^2/(ma^3) + \kappa/a^2 = 0$ から

$$\boxed{a_* = \frac{\hbar^2}{m\kappa}}, \quad \boxed{E_* = -\frac{m\kappa^2}{2\hbar^2}}.$$

$E''(a_*) > 0$ 。この特別な試行関数族は Coulomb 基底状態そのものを含むため、変分上限は実際の基底エネルギーに一致する。

(4) $a = a_*$ で $2\langle T \rangle = \hbar^2/(ma_*^2) = \kappa/a_* = -\langle V \rangle$ 。 $1/r$ 型ポテンシャルの virial 定理に一致する。

(5) 任意の a で

$$\left\langle \frac{e^{-r/\lambda}}{r} \right\rangle = \frac{4}{a^3} \frac{1}{(2/a + 1/\lambda)^2} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{a}{2\lambda}\right)^{-2}.$$

ゆえに一次補正は

$$\boxed{\Delta E^{(1)} = \eta \frac{\kappa}{a_*} \left[1 - \left(1 + \frac{a_*}{2\lambda}\right)^{-2}\right]}.$$

$\lambda \rightarrow \infty$ では $\Delta E^{(1)} \sim \eta\kappa/\lambda \rightarrow 0$ 。 η が小さい限り固有状態の変化による補正は次の次数となる。

検算・適用条件

変分法は試行空間の最小値が厳密基底エネルギーの上界となる方法。本問で等号となるのは指数関数が厳密固有関数であるため。

第1回 第2問の解答 相互作用する単一サイト

(1) 状態は $|0\rangle, |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle$ で $(n, E) = (0, 0), (1, 0), (1, 0), (2, U)$ 。 $z = e^{\beta\mu}$ 、 $u = e^{-\beta U}$ と置くと

$$\Xi = 1 + 2z + z^2 u.$$

(2) $\langle n \rangle = \beta^{-1} \partial_\mu \ln \Xi$ 、二重占有は最後の状態の確率なので

$$\langle n \rangle = \frac{2z + 2z^2 u}{\Xi}, \quad \langle D \rangle = \frac{z^2 u}{\Xi}.$$

(3) $n^2 = n + 2D$ は各微視状態で厳密に成り立つ。よって

$$\text{Var}(n) = \langle n \rangle + 2\langle D \rangle - \langle n \rangle^2.$$

(4) $\partial_\mu \langle n \rangle = \partial_\mu^2 (\ln \Xi) / \beta = \beta (\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2)$ 。 n は占有数でエネルギーと可換なので

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial \mu} = \beta \text{Var}(n) \geq 0.$$

(5) $\mu = U/2$ なら $z^2 u = 1$ で $\Xi = 2 + 2z$ 、 $\langle n \rangle = (2z + 2)/(2 + 2z) = 1$ 。 $\langle D \rangle = 1/[2(1 + e^{\beta U/2})] \rightarrow 0$ ($T \rightarrow 0$)。このとき単一占有 2 状態が残る。

検算・適用条件

$\chi = \beta \text{Var}$ が正しいのはここでは粒子数演算子が Hamiltonian と可換だからである。非可換量子演算子一般では虚時間相関が必要。

第1回 第3問の解答 誘電体に働く力

- (1) 両領域は同じ極板間電圧を共有するため並列接続。真空部 $C_0 = \varepsilon_0 w(L-x)/d$ 、誘電体部 $C_d = \varepsilon_0 \varepsilon_r w x/d$ だから

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 w}{d} [L + (\varepsilon_r - 1)x].$$

- (2) 縁効果を見捨てるすると $E = V/d$ は両領域で等しく、 $D_{\text{vac}} = \varepsilon_0 V/d$ 、 $D_{\text{die}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r V/d$ 。各部の自由電荷は D に面積を掛けたもので和は $Q = CV$ 。

- (3) 外部回路を切り離すと $U_Q = Q^2/(2C)$ 。力はエネルギー減少の方向なので

$$F_Q = -\frac{\partial}{\partial U_Q} x = \frac{Q^2}{2C(x)^2} \frac{\varepsilon_0 w(\varepsilon_r - 1)}{d} > 0.$$

- (4) 電圧固定では電源が $dW_{\text{bat}} = V dQ$ を行う。力を出すべきポテンシャルは $U_{\text{cap}} - VQ = -CV^2/2$ 。よって

$$F_V = \frac{V^2}{2} \frac{\partial}{\partial C} x = \frac{\varepsilon_0 w(\varepsilon_r - 1)V^2}{2d}.$$

蓄積エネルギー $CV^2/2$ を単独で微分すると符号を間違える。

- (5) 両者とも $\varepsilon_r > 1$ で $F > 0$ となり挿入方向へ引かれる。 $\varepsilon_r \rightarrow 1$ では $\partial C/\partial x \rightarrow 0$ なので力がゼロ。 $Q = CV$ で比較すると同じ瞬間の状態では $F_Q = F_V$ だが、移動中に固定する変数が異なる。

検算・適用条件

固定電荷では蓄積エネルギー、固定電圧では電源を含む Legendre 変換後のポテンシャルを微分する。

第1回 第4問の解答 四次鞍点の漸近

- (1) $t > 0$ では唯一の極小が $x = 0$ で $\phi''(0) = t$ 。 $x = O(N^{-1/2})$ と見ると四次項は高次なので

$$I_N(t) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{Nt}} \quad (t > 0).$$

必要なら四次項の Gaussian 平均から相対補正は $-3/(4Nt^2) + O(N^{-2})$ 。

- (2) $t = 0$ では $y = Nx^4/4$ の置換により

$$I_N(0) = \frac{\Gamma(1/4)}{\sqrt{2} N^{1/4}}.$$

$N^{-1/4}$ であり、二次鞍点の $N^{-1/2}$ とは異なる。

- (3) $t = -a < 0$ と置くと $\phi = x^4/4 - ax^2/2$ の極小は $x_{\pm} = \pm\sqrt{a}$ 、 $\phi(x_{\pm}) = -a^2/4$ 、 $\phi''(x_{\pm}) = 2a$ 。二つの極小の寄与を加えて

$$I_N(-a) \sim 2\sqrt{\frac{\pi}{Na}} \exp\left(\frac{Na^2}{4}\right).$$

- (4) $t = s/\sqrt{N}$ 、 $x = N^{-1/4}y$ で指数の N 依存が消える。厳密に

$$I_N(s/\sqrt{N}) = N^{-1/4} F(s), \quad F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^4/4 - sy^2/2} dy.$$

この式は固定 t の展開が破綻する臨界領域をつなぐ。

- (5) $\langle x^2 \rangle = \int x^2 e^{-Nx^4/4} dx / I_N(0)$ から

$$\langle x^2 \rangle_{t=0} = \frac{2\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)\sqrt{N}}.$$

$t > 0$ 固定では $\langle x^2 \rangle \sim 1/(Nt)$ 。臨界点で幅が $N^{-1/4}$ となり、分散の大きさは $N^{-1/2}$ に増大する。

検算・適用条件

Laplace 法で極小の数が変わる場合、極小ごとの寄与を漏らさない。 $t \rightarrow 0$ と $N \rightarrow \infty$ は一般に交換できない。

第 2 回 | 詳解：縮退摂動・Debye 遮蔽・導電シート・初到達

第 2 回 第 1 問の解答 水素原子の Stark 効果

(1) $z = r \cos \theta$ は空間反転で符号が変わるのでパリティが同じ二状態間の行列要素はゼロ。また球面調和関数の選択則は $\Delta \ell = \pm 1, \Delta m = 0$ 。 $n = 2$ の $2s$ と $2p_0$ 間だけが混合し、 $2p_{\pm 1}$ は一次では動かない。

(2) 指定された規格化関数から角度積分 $\int \cos^2 \theta d\Omega = 4\pi/3$ 。従って

$$\begin{aligned}\langle 200|z|210\rangle &= \frac{1}{32\pi a_0^3} \frac{4\pi}{3a_0} \int_0^\infty r^4 (2 - r/a_0) e^{-r/a_0} dr \\ &= \frac{1}{24a_0^4} (2 \cdot 4! - 5!) a_0^5 = \boxed{-3a_0}.\end{aligned}$$

符号は与えた波動関数の位相の選び方によるが分裂の大きさは変わらない。

(3) 基底 $(2s, 2p_0)$ で

$$H'_{n=2} = \begin{pmatrix} 0 & -3e\mathcal{E}a_0 \\ -3e\mathcal{E}a_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

固有値は $\boxed{\Delta E_{\pm} = \pm 3e\mathcal{E}a_0}$ 。 $\mathcal{E} > 0$ では固有ベクトル $(|2s\rangle \mp |2p_0\rangle)/\sqrt{2}$ に対応し、 $2p_{\pm 1}$ は一次補正ゼロ。

(4) $1s$ は偶パリティで $\langle 1s|z|1s\rangle = 0$ 。一次効果がゼロでも二次の Stark 効果は一般に残る。

(5) 無摂動の $2p_0$ が $2s$ より Δ 高いとして基準 $E_{2s} = 0$ を取ると

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 0 & -3e\mathcal{E}a_0 \\ -3e\mathcal{E}a_0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad \boxed{E_{\pm} = \frac{\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 36e^2 a_0^2 \mathcal{E}^2}}{2}}.$$

$3ea_0|\mathcal{E}| \ll \Delta$ で $E_- = -9e^2 a_0^2 \mathcal{E}^2 / \Delta + O(\mathcal{E}^4)$ 。分母 $\Delta \rightarrow 0$ では非縮退の二次式が破綻し、縮退対角化が必要である。

検算・適用条件

Stark 効果では「縮退した部分空間内で摂動行列を先に対角化する」ことが最重要。縮退を無視して二次摂動を使うと分母が発散する。

第2回 第2問の解答 Debye-Hückel 遮蔽

- (1) $|\beta e\phi| \ll 1$ で $n_{\pm} \simeq n_0(1 \mp \beta e\phi)$ 。よって

$$\rho_{\text{ind}} = e(n_+ - n_-) \simeq -2n_0\beta e^2\phi.$$

電荷が正なら逆符号のイオンが集まる。

- (2) $-\varepsilon\nabla^2\phi = Q\delta^{(3)}(\mathbf{r}) + \rho_{\text{ind}}$ から

$$(\nabla^2 - \kappa_D^2)\phi = -\frac{Q}{\varepsilon}\delta^{(3)}(\mathbf{r}), \quad \kappa_D^2 = \frac{2n_0e^2}{\varepsilon k_B T}.$$

遮蔽長は $\lambda_D = 1/\kappa_D$ 。

- (3) $r > 0$ で球対称の方程式は $(r\phi)'' - \kappa_D^2(r\phi) = 0$ 。無限遠で減衰する解を選び、原点の Gauss 条件 $4\pi\varepsilon r^2(-\phi') \rightarrow Q$ に合わせると

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} e^{-\kappa_D r}.$$

- (4) $\rho_{\text{ind}} = -\varepsilon\kappa_D^2\phi$ なので

$$Q_{\text{ind}} = -\varepsilon\kappa_D^2 Q \int_0^\infty r e^{-\kappa_D r} dr = \boxed{-Q}.$$

十分広い空間で総電荷が相殺される。

- (5) 裸の $Q/(4\pi\varepsilon r)$ との差は $r \rightarrow 0$ で

$$\phi_{\text{ind}}(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Q(e^{-\kappa_D r} - 1)}{4\pi\varepsilon r} = -\frac{Q\kappa_D}{4\pi\varepsilon}.$$

そのため所定の定義による過剰エネルギーは

$$\Delta U = -\frac{Q^2\kappa_D}{8\pi\varepsilon}.$$

Boltzmann の線形化 $|e\phi| \ll k_B T$ がイオン分布の記述域で必要。特に点電荷の極近傍で線形理論は厳密には破綻するので、短距離カットオフと希薄・弱結合条件が要る。

検算・適用条件

遮蔽ポテンシャルの係数は $(\nabla^2 - \kappa^2)e^{-\kappa r}/r = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ でチェックできる。

第2回 第3問の解答 二次元導電シート

(1) E_x の接線成分は連続なので入射振幅を 1 としたとき $t = 1 + r$ 。

(2) $+z$ 波の H_y は E_x/Z_0 、 $-z$ 波では $-E_x/Z_0$ 。表面電流条件 $\hat{z} \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = \mathbf{K}$ により $-2r/Z_0 = \sigma_s(1+r)$ 。
 $s = Z_0\sigma_s$ として

$$r = -\frac{s}{2+s}, \quad t = \frac{2}{2+s}.$$

(3) 両側が同じ真空なのでパワー比は振幅絶対値の二乗でよい。実正 s なら

$$R = \frac{s^2}{(2+s)^2}, \quad T = \frac{4}{(2+s)^2}, \quad A = \frac{4s}{(2+s)^2}.$$

$R + T + A = 1$ がエネルギー保存。

(4) $A(s) = 4s/(2+s)^2$ を微分して $A'(s) = 4(2-s)/(2+s)^3$ 。したがって

$$A_{\max} = \frac{1}{2} \quad \text{at } s = 2.$$

単一对称チャネルの受動的シートでは 50% が上限。

(5) Drude 模型は

$$\sigma_s = \frac{n_{2D}e^2\tau}{m} \frac{1+i\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}, \quad \text{Re } \sigma_s = \frac{n_{2D}e^2\tau/m}{1+\omega^2\tau^2} > 0.$$

複素 s では $R = |s|^2/|2+s|^2$ 、 $T = 4/|2+s|^2$ 、差を取ると

$$A = \frac{4 \text{Re } s}{|2+s|^2} \geq 0.$$

検算・適用条件

表面伝導率の単位は S (シーメンス)、 $Z_0\sigma_s$ は無次元。バルク伝導率 S/m とは区別する。

第2回 第4問の解答 ドリフト拡散の初到達

- (1) 任意の滑らかな
- f
- に対する Itô 展開の条件付き期待値から

$$\mathbb{E}_x[f(X_{t+dt})] - f(x) = (vf'(x) + Df''(x))dt + o(dt).$$

従って $\mathcal{L} = v\partial_x + D\partial_x^2$ 。

- (2) 境界条件
- $p(0) = 0, p(L) = 1$
- と
- $Dp'' + vp' = 0$
- を解く。
- $v \neq 0$
- なら

$$p(x) = \frac{1 - e^{-vx/D}}{1 - e^{-vL/D}}.$$

- (3)
- $v \rightarrow 0$
- では分子・分母を
- v
- で一次展開すると
- $p(x) \rightarrow x/L$
- 。漂流のない対称拡散で幾何学的比率となる。

- (4)
- $D\tau'' + v\tau' = -1$
- 。
- p
- が同次方程式を満たすことから
- $\tau = (Lp - x)/v$
- は直ちに非同次方程式を満たし、両端でゼロなので

$$\tau(x) = \frac{L}{v} \frac{1 - e^{-vx/D}}{1 - e^{-vL/D}} - \frac{x}{v}.$$

この表示は $v \neq 0$ で有効。

- (5)
- $p(x) = x/L + \frac{v}{2D} \frac{x(L-x)}{L} + O(v^2)$
- を代入すると

$$\lim_{v \rightarrow 0} \tau(x) = \frac{x(L-x)}{2D}.$$

$[D] = L^2/T$ なので右辺の次元は時間。平均時間は区間中央で最大になる。

検算・適用条件

前向き Fokker-Planck 方程式と後向き方程式の作用素を混同しない。初到達確率・平均時間は後向き生成作用素で求める。

第 3 回 | 詳解: Airy 束縛状態・Schottky 比熱・界面振動・初帰還

第 3 回 第 1 問の解答 量子三角井戸と Airy 関数

(1) $-\hbar^2\psi''/(2m) + Fx\psi = E\psi$ に $x = \ell u + E/F$ を入れ、 $\ell^3 = \hbar^2/(2mF)$ を使うと $\psi_{uu} = u\psi$ となる。無限遠で減衰する解は $\text{Ai}(u)$ 。

(2) 境界 $x = 0$ では $u = -E/(F\ell)$ 。 $\text{Ai}(-a_n) = 0$ より

$$E_n = F\ell a_n = \left(\frac{\hbar^2 F^2}{2m}\right)^{1/3} a_n.$$

(3) 指定された Airy 恒等式を $x = \ell(u + a_n)$ に用いて

$$\psi_n(x) = \frac{\text{Ai}(x/\ell - a_n)}{\sqrt{\ell} |\text{Ai}'(-a_n)|}.$$

実数波動関数の全体符号は自由。半直線上で直交規格化される。

(4) $\partial_F H = x$ なので Hellmann–Feynman から

$$\langle x \rangle_n = \frac{\partial E_n}{\partial F} = \frac{2E_n}{3F}.$$

従って $\langle V \rangle = F\langle x \rangle = 2E_n/3$ 、 $\langle T \rangle = E_n/3$ で $2\langle T \rangle = \langle V \rangle$ 。壁では波動関数がゼロとなり、この関係と両立する。

(5) 古典的転回点は $x_t = E/F$ 。 $p(x) = \sqrt{2m(E - Fx)}$ から

$$\int_0^{E/F} p(x) dx = \frac{2\sqrt{2m}}{3F} E^{3/2} = \frac{2}{3} \hbar \left(\frac{E}{F\ell}\right)^{3/2}.$$

指定された量子化条件から

$$a_n \sim \left[\frac{3\pi}{2} \left(n - \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} \quad (n \gg 1).$$

検算・適用条件

Airy 関数の漸近ゼロ点では壁の境界条件による位相 $-1/4$ を忘れない。 $E \propto F^{2/3}$ から virial 関係が直ちに検算できる。

第3回 第2問の解答 Schottky 二準位系

(1) 1 サイトでは $z_1 = 1 + ge^{-\beta\Delta}$ 。独立な N サイトなので $Z_N = (1 + ge^{-\beta\Delta})^N$ 。

(2) 励起状態にある確率は

$$p = \frac{ge^{-\beta\Delta}}{1 + ge^{-\beta\Delta}}, \quad U = N\Delta p.$$

$U = -\partial_\beta \ln Z_N$ でも同じ式を得る。

(3) $\partial_T p = (\Delta/k_B T^2)p(1-p)$ なので

$$C_V = \frac{N\Delta^2}{k_B T^2} p(1-p) = Nk_B u^2 p(1-p), \quad u = \beta\Delta.$$

各サイトのエネルギーは $0, \Delta$ だから独立和の分散は $\text{Var}(E) = N\Delta^2 p(1-p) = k_B T^2 C_V$ 。

(4) $T \rightarrow 0$ では $u \rightarrow \infty$ で $C_V \sim Nk_B g u^2 e^{-u} \rightarrow 0$ 。 $T \rightarrow \infty$ では $p \rightarrow g/(1+g)$ で $C_V \sim Nk_B u^2 g/(1+g)^2 \rightarrow 0$ 。
両端で小さく、中間温度に山 (Schottky ピーク) がある。

(5) $g = 1$ なら $C_V/(Nk_B) = u^2/[4 \cosh^2(u/2)]$ 。微分して

$$u \tanh(u/2) = 2, \quad u_{\max} \simeq 2.399.$$

よって $T_{\max} \simeq \Delta/(2.399k_B)$ 。典型エネルギー差が熱エネルギーと同程度となる領域で最大になる。

検算・適用条件

内部エネルギーの零点移動は C_V を変えない。熱容量ピークは相転移を意味せず、独立した少数準位の熱励起だけでも発生する。

第3回 第3問の解答 線密度の異なる弦

- (1) 弦の微小要素への張力の差から $\mu_i \partial_t^2 y = T \partial_x^2 y$ 、 $c_i = \sqrt{T/\mu_i}$ 。界面で変位 y が連続し、点質量・外力がないので横向き張力 $T \partial_x y$ も連続する。

- (2) $k_i = \omega/c_i$, $a = L/2$ とし、固定端を満たすモードを

$$y_1 = A \sin(k_1 x) e^{-i\omega t}, \quad y_2 = B \sin[k_2(L-x)] e^{-i\omega t}$$

とおく。 $x = a$ で $A \sin(k_1 a) = B \sin(k_2 a)$ 、 $A k_1 \cos(k_1 a) = -B k_2 \cos(k_2 a)$ 。非自明解の条件は

$$k_1 \cos(k_1 a) \sin(k_2 a) + k_2 \sin(k_1 a) \cos(k_2 a) = 0.$$

両 $\sin$ がゼロになる場合も含むので、 $\cot$ 式よりこの行列式形が安全。

- (3) $k_1 = k_2 = k$ で左辺は $k \sin(2ka) = k \sin(kL)$ 。従って $\omega_n = n\pi \sqrt{T/\mu}/L$ ($n = 1, 2, \dots$)。

- (4) 界面を $x = 0$ として左側の入射・反射変位を $e^{ik_1 x} + r e^{-ik_1 x}$ 、右側を $t e^{ik_2 x}$ とおく。 $1+r = t$ 、 $k_1(1-r) = k_2 t$ から

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}.$$

- (5) 時間平均のエネルギー流は $\langle P \rangle = T\omega k |A|^2/2$ 。したがって

$$R = |r|^2 = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}, \quad T = \frac{k_2}{k_1} |t|^2 = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

$R + T = 1$ 。振幅の透過比 $|t|^2$ をそのままパワー透過率とすると誤る。

検算・適用条件

固有モードの節が界面に来ると $\cot$ 表現は特異になるが、行列式条件はその場合も扱える。界面では変位と張力勾配が連続する。

第3回 第4問の解答 対称ランダムウォークの初帰還

(1) $S_{2n} = 0$ には正の歩幅 n 回と負の歩幅 n 回が必要。従って

$$u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}, \quad P(S_{2n+1} = 0) = 0.$$

(2) 独立性から $\langle e^{ikS_n} \rangle = \langle e^{ik\xi} \rangle^n = (\cos k)^n$ 。 $k = 0$ で微分すれば $\langle S_n \rangle = 0, \text{Var}(S_n) = n$ 。 $k = O(n^{-1/2})$ で $(\cos k)^n \sim e^{-nk^2/2}$ となる。

(3) 二項級数 $(1 - z^2)^{-1/2} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} (z^2/4)^n$ より

$$U(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \quad (|z| < 1).$$

(4) 任意の原点への帰還は、初帰還に続いて原点からの独立な再出発である。更新方程式 $U(z) = 1 + F(z)U(z)$ から

$$F(z) = 1 - \frac{1}{U(z)} = 1 - \sqrt{1 - z^2}.$$

(5) 二項級数の係数比較から

$$P(T_0 = 2n) = \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} 4^{-n}, \quad P(T_0 = 2n+1) = 0.$$

Stirling 式 $\binom{2n}{n} \sim 4^n / \sqrt{\pi n}$ で

$$P(T_0 = 2n) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} n^{-3/2}.$$

$F(1) = 1$ より最終的には必ず帰還するが、初帰還時間の平均は発散する。

検算・適用条件

帰還確率 $u_{2n} \sim n^{-1/2}$ と、初帰還確率 $P(T_0 = 2n) \sim n^{-3/2}$ は異なる量。生成関数の更新恒等式が両者を結ぶ。

第 4 回 | 詳解：変位クエンチ・回転系・高周波平均・非線形振動

第 4 回 第 1 問の解答 調和振動子の変位クエンチ

(1) 新旧は同じ振動数なので固有値はいずれも $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ 。新しい固有状態は並進演算子 $\hat{T}(d) = \exp(-ipd/\hbar)$ を用いて $|n; d\rangle = \hat{T}(d)|n; 0\rangle$ と書ける。

(2) $\ell_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ とおき $\alpha = d/(\sqrt{2}\ell_0)$ 。調和振動子の変位演算子 $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha a)$ で新基底へ射影すると、初期基底状態は $\pm\alpha$ の coherent 状態に相当する。 $e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n (\pm\alpha)^n |n; d\rangle / \sqrt{n!}$ から

$$P_n = e^{-S} \frac{S^n}{n!}, \quad S = |\alpha|^2 = \frac{m\omega d^2}{2\hbar}.$$

(3) Poisson 分布の生成関数 $\sum_n P_n z^n = e^{S(z-1)}$ を微分すると

$$\langle n \rangle = S, \quad \text{Var}(n) = S.$$

(4) 新 Hamiltonian を初期基底状態で直接平均すると

$$\langle H_f \rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}m\omega^2 d^2, \quad \langle H_i \rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

別法では $\langle H_f \rangle = \hbar\omega(\langle n \rangle + 1/2)$ 。両者から

$$\langle W \rangle = \hbar\omega S = \frac{1}{2}m\omega^2 d^2.$$

(5) 対角表示で

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{n \geq 0} P_n e^{-i\omega(n+1/2)t} \\ &= e^{-i\omega t/2} \exp[-S(1 - e^{-i\omega t})]. \end{aligned}$$

従って

$$|A(t)|^2 = \exp[-2S(1 - \cos \omega t)].$$

$t = 2\pi k/\omega$ で 1 へ復帰し、 $t = \pi/\omega$ で e^{-4S} となる。

検算・適用条件

突然近似では波動関数は時刻 0 に不連続には変わらない。変化するのは Hamiltonian と、その固有基底における展開係数。

第4回 第2問の解答 回転系の古典気体

(1) $\Omega = \Omega \hat{z}$ とすると

$$H_{\text{rot}} = \frac{(\mathbf{p} - m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2}{2m} + \frac{m}{2}(\omega_0^2 - \Omega^2)r^2.$$

 r 積分が収束するには $|\Omega| < \omega_0$ が必要。(2) 平方完成した運動量を積分して $\int e^{-\beta p'^2/(2m)} d^2p = 2\pi m/\beta$ 、位置側は $\int e^{-\beta m(\omega_0^2 - \Omega^2)r^2/2} d^2r = 2\pi/[\beta m(\omega_0^2 - \Omega^2)]$ 。 $h = 2\pi\hbar$ より

$$Z_1 = \frac{1}{\beta^2 \hbar^2 (\omega_0^2 - \Omega^2)}.$$

(3) 古典希薄気体の Gibbs 因子を含め

$$Z_N = \frac{Z_1^N}{N!}.$$

Maxwell-Boltzmann 近似であり量子縮退の強い低温では使わない。

(4) $\partial_\Omega \ln Z_N = \beta \langle L_z \rangle$ から

$$\langle L_z \rangle = \frac{2N\Omega}{\beta(\omega_0^2 - \Omega^2)}.$$

位置 Gaussian の直接積分によれば

$$\langle r^2 \rangle = \frac{2}{\beta m(\omega_0^2 - \Omega^2)}.$$

従って $\langle L_z \rangle = Nm\Omega \langle r^2 \rangle$ と整合する。

(5) 二階微分から

$$\text{Var}(L_z) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln Z_N}{\partial \Omega^2} = \frac{2N(\omega_0^2 + \Omega^2)}{\beta^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}.$$

 $|\Omega| \rightarrow \omega_0$ で有効な復元力が消失するため、平面無限の模型では粒子が外へ広がり Z_N が発散する。有限容器なら境界がこの発散を抑える。

検算・適用条件

回転系は単に座標変換するだけでなく $-\Omega L_z$ を含める。分配関数の Ω 微分は角運動量の平均と揺らぎを与える。

第4回 第3問の解答 高周波 Paul トラップ

- (1) $\partial_x^2 \phi = V_0 \cos \Omega t / r_0^2$ 、 $\partial_y^2 \phi = -V_0 \cos \Omega t / r_0^2$ なので $\nabla^2 \phi = 0$ (z 方向依存なし)。静的な電場のみでは三方向の安定束縛が難しいことの端緒となる。

- (2) $F = -q\nabla\phi$ から

$$\ddot{x} + a \cos \Omega t x = 0, \quad \ddot{y} - a \cos \Omega t y = 0.$$

y 方向では高周波力の符号が反転する。

- (3) $x = X + \xi_x$ で X を速い一周期の間一定とみなし、 $\ddot{\xi}_x \simeq -aX \cos \Omega t$ 。平均ゼロの特殊解は $\xi_x \simeq (a/\Omega^2)X \cos \Omega t$ 。同じく

$$\xi_x \simeq \frac{a}{\Omega^2} X \cos \Omega t, \quad \xi_y \simeq -\frac{a}{\Omega^2} Y \cos \Omega t.$$

- (4) 元の方程式へ戻して一周期平均をとると $\langle \cos^2 \Omega t \rangle = 1/2$ 。従って

$$\ddot{X} + \frac{a^2}{2\Omega^2} X \simeq 0, \quad \ddot{Y} + \frac{a^2}{2\Omega^2} Y \simeq 0, \quad \omega_{\text{sec}} = \frac{|a|}{\sqrt{2}\Omega}.$$

符号の違う速い駆動でも、平均後は両方向が復元力になる。

- (5) $m\omega_{\text{sec}}^2 r^2/2$ から

$$U_{\text{eff}}(X, Y) = \frac{ma^2}{4\Omega^2} (X^2 + Y^2).$$

$|a|/\Omega^2 \ll 1$ および $\omega_{\text{sec}} \ll \Omega$ が時間スケール分離条件。高周波に時間変化する場で動的閉じ込めが可能のため、静的ポテンシャルのみの制限とは矛盾しない。

検算・適用条件

微小高速振動 ξ の符号と $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$ を落とすと世俗周波数に $\sqrt{2}$ のずれが生じる。

第4回 第4問の解答 Duffing 振動子の永年項

(1) 運動方程式に $\dot{x}$ を掛けて積分すると

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{\epsilon x^4}{4} = \frac{\omega_0^2 A^2}{2} + \frac{\epsilon A^4}{4}.$$

単位質量のエネルギー表示である。

(2) 零次の $\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$ から $x_0 = A \cos \omega_0 t$ 。一次では

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^3 = -\frac{A^3}{4} [3 \cos \omega_0 t + \cos 3\omega_0 t], \quad x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0.$$

(3) $(\partial_t^2 + \omega_0^2)(t \sin \omega_0 t) = 2\omega_0 \cos \omega_0 t$ なので、共鳴する外力が

$$x_{1,\text{sec}} = -\frac{3A^3}{8\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

を生む。 ϵt が大きくなると通常の摂動展開は破綻する。

(4) $\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1$ 、 $\tau = \omega t$ とおく。一次の $\cos \tau$ 共鳴項を消す条件は $-2\omega_0 \omega_1 A + 3A^3/4 = 0$ 。よって

$$\omega_1 = \frac{3A^2}{8\omega_0}, \quad \omega \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{3\epsilon A^2}{8\omega_0^2} \right).$$

硬化ばね $\epsilon > 0$ では周波数が増える。

(5) 一次の周期は

$$T \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 - \frac{3\epsilon A^2}{8\omega_0^2} \right).$$

$|\epsilon| A^2 / \omega_0^2 \ll 1$ で振幅・周波数補正が小さい。 $\epsilon < 0$ では四次ポテンシャルが大きな x で下へ発散するが、小振幅井戸近傍の短い時間尺度ではこの局所近似が使える。

検算・適用条件

永年項は真の振幅が無制限に増えることを示すのではなく、固定周波数で展開した摂動級数の非一様性を示す。

第 5 回 | 詳解：スピン断熱発展・有限系転移・偏光・境界層

第 5 回 第 1 問の解答 回転する磁場中のスピン

- (1) $(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = I$ なので固有値は ± 1 、エネルギーは $E_{\pm} = \mp \Delta/2$ 。低いエネルギーは $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = +1$ の spinor で

$$|+\rangle; \theta, \varphi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad E_g = -\Delta/2.$$

規格化は $\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) = 1$ 。

- (2) Pauli 行列の期待値を直接計算すると $\langle \sigma_x \rangle = \sin \theta \cos \varphi$ 、 $\langle \sigma_y \rangle = \sin \theta \sin \varphi$ 、 $\langle \sigma_z \rangle = \cos \theta$ なので $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{n}$ 。

- (3) 基底枝の動的位相は $\gamma_{\text{dyn}} = -\hbar^{-1} \int_0^{\mathcal{T}} E_g dt = \Delta \mathcal{T} / (2\hbar)$ 。 $\mathcal{T}$ は一周の所要時間（張力などと区別）。

- (4) θ 一定で $\dot{\varphi} = \nu$ の場合、励起固有状態 $|-\rangle$ との非断熱結合の大きさは

$$|\langle - | \dot{+} \rangle| = \frac{|\nu| \sin \theta}{2}.$$

エネルギー間隔は Δ なので $\hbar |\nu| \sin \theta / 2 \ll \Delta$ が十分小さい結合の条件。単純な安全条件 $\hbar |\nu| \ll \Delta$ でもよい。

- (5) $[\alpha]$ spinor を φ 微分すると $\partial_{\varphi} |+\rangle = (0, ie^{i\varphi} \sin \theta/2)^{\top}$ で

$$\mathcal{A}_{\varphi} = i \langle + | \partial_{\varphi} + \rangle = -\sin^2 \frac{\theta}{2} = -\frac{1 - \cos \theta}{2}.$$

一周では

$$\gamma_B = \int_0^{2\pi} \mathcal{A}_{\varphi} d\varphi = -\pi(1 - \cos \theta) = -\frac{\Omega_{\text{solid}}}{2} \pmod{2\pi}.$$

これは通常の動的位相とは別に生じる幾何学的位相である。

検算・適用条件

Berry 位相は固有状態のゲージ変更で 2π の整数倍だけ変わり得るが、閉路の位相因子は物理的に不変。断熱条件を満たすときの $[\alpha]$ 問題。

第5回 第2問の解答 有限系の一次転移

(1) 相ごとの Boltzmann 重みは状態数と $e^{-\beta E}$ の積だから

$$Z_N = \exp \left[N \left(\frac{s_1}{k_B} - \beta e_1 \right) \right] + \exp \left[N \left(\frac{s_2}{k_B} - \beta e_2 \right) \right].$$

(2) 両重みが等しいとき $\Delta s/k_B = \beta_c \Delta e$ 。 $\Delta e = e_2 - e_1 > 0$, $\Delta s = s_2 - s_1 > 0$ とすると

$$T_c = \frac{\Delta e}{\Delta s}.$$

(3) $w_i = \exp[N(s_i/k_B - \beta e_i)]$, $p_2 = w_2/(w_1 + w_2)$ 。 よって

$$p_2 = \frac{1}{1 + \exp[-N(\Delta s/k_B - \beta \Delta e)]}, \quad U = N(e_1 + \Delta e p_2).$$

(4) エネルギー $N e_1$, $N e_2$ の二点分布なので

$$\text{Var}(E) = N^2 (\Delta e)^2 p_2 (1 - p_2), \quad C = \frac{N^2 (\Delta e)^2}{k_B T^2} p_2 (1 - p_2).$$

$T = T_c$ で $p_2 = 1/2$ となり $C(T_c) = N^2 (\Delta e)^2 / (4 k_B T_c^2)$ 。有限の N では T_c と熱容量極大点 T_{peak} は厳密には一致しない。 T^{-2} 因子のため $\frac{dC}{dT} \Big|_{T_c} = -2C(T_c)/T_c < 0$ 。 大きい N では

$$T_{\text{peak}} = T_c - \frac{4 k_B^2 T_c^3}{N^2 (\Delta e)^2} + O(N^{-4}), \quad C_{\text{max}} \sim C(T_c) \propto N^2.$$

(5) p_2 が 0 から 1 へ変わるには $N|\Delta s/k_B - \beta \Delta e| = O(1)$ 、すなわち $\Delta \beta = O(1/N \Delta e)$ 。 $\Delta T = O(k_B T_c^2 / (N \Delta e))$ であり幅が N^{-1} となる。熱力学極限で内部エネルギーの跳びは $\Delta U = N \Delta e$ 、潜熱は系の大きさに比例する。

検算・適用条件

ピークの高さ N^2 と幅 N^{-1} を掛けると全熱容量の積分が $O(N)$ となり、潜熱 $N \Delta e$ と整合する。この単純な二相近似では各相内の熱容量を無視している。 $C(T_c)$ と C_{max} は有限 N では異なるが、 $N \rightarrow \infty$ では先頭の N^2 スケーリングが一致する。

第5回 第3問の解答 複屈折と偏光

- (1) x 軸と y 軸は異なる位相を得る。共通位相 $\exp(in_x\omega d/c)$ を除くと

$$\mathbf{E}_{\text{out}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\delta} \end{pmatrix}.$$

波の時間因子の規約は $e^{-i\omega t}$ とする。

- (2) $\delta = (n_y - n_x)\omega d/c$ 。相対位相は屈折率差と厚みに比例する。

- (3) $E_x = E_0/\sqrt{2}$ 、 $E_y = E_0 e^{i\delta}/\sqrt{2}$ を代入すると

$$S_0 = |E_0|^2, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = |E_0|^2 \cos \delta, \quad S_3 = |E_0|^2 \sin \delta.$$

この定義で $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 。 S_3 の符号は教科書によって定義が異なるので本問の定義を用いる。

- (4) $\delta = k\pi$ (整数 k) なら二成分が同相または逆相で直線偏光。 $\delta = (k + 1/2)\pi$ なら二成分の振幅が等しく位相差が $\pi/2$ で円偏光。それ以外は一般に楕円偏光となる。

- (5) 軸方向の単位ベクトル $(\cos \alpha, \sin \alpha)^\top$ へ射影する。振幅は $E_0(\cos \alpha + e^{i\delta} \sin \alpha)/\sqrt{2}$ 。 $I_0 \propto |E_0|^2$ とすれば

$$\frac{I(\alpha)}{I_0} = \frac{1}{2}[1 + \sin(2\alpha) \cos \delta].$$

$\delta = 0$ で $\alpha = \pi/4$ なら 100% 透過、 $\delta = \pi/2$ ではどの方向でも 50% 透過する。

検算・適用条件

これは界面反射を補償した理想位相板の模型。実際の結晶内のエネルギー流や境界反射を計算する場合、屈折率による振幅規約も必要となる。

第5回 第4問の解答 境界層の幅

- (1) $y' = Ce^{-x/\epsilon}$ として積分すると $y = A + Be^{-x/\epsilon}$ 。 $y(0) = 0, y(1) = 1$ から

$$y(x) = \frac{1 - e^{-x/\epsilon}}{1 - e^{-1/\epsilon}}.$$

- (2) 固定 $x > 0$ で $e^{-x/\epsilon} \rightarrow 0$ 、従って $y_{\text{out}}(x) = 1$ 。しかし $y_{\text{out}}(0) = 1$ は元の境界条件 $y(0) = 0$ と一致しない。最高階微分を消す極限は非一様である。

- (3) $X = x/\epsilon$ と置くと $y_X'' + y_X' = 0$ (ここだけ X 微分)。 $Y(0) = 0, Y(\infty) = 1$ を課して

$$Y(X) = 1 - e^{-X}.$$

変化は $X = O(1)$ すなわち $x = O(\epsilon)$ で起こる。

- (4) 厳密に積分すると

$$\int_0^1 y(x) dx = \frac{1 - \epsilon(1 - e^{-1/\epsilon})}{1 - e^{-1/\epsilon}} = \frac{1}{1 - e^{-1/\epsilon}} - \epsilon.$$

従って $\int_0^1 y dx = 1 - \epsilon + O(e^{-1/\epsilon})$ 。

- (5) $y'(x) = e^{-x/\epsilon} / [\epsilon(1 - e^{-1/\epsilon})]$ から

$$\begin{aligned} \int_0^1 (y')^2 dx &= \frac{1 - e^{-2/\epsilon}}{2\epsilon(1 - e^{-1/\epsilon})^2} \\ &= \frac{1 + e^{-1/\epsilon}}{2\epsilon(1 - e^{-1/\epsilon})} \sim \frac{1}{2\epsilon}. \end{aligned}$$

勾配 $y' = O(\epsilon^{-1})$ が幅 $O(\epsilon)$ に集中するので積分は $O(\epsilon^{-1})$ となる。

検算・適用条件

外部解が境界条件の一方を満たさなくても数値解の大部分を正しく近似できる。境界層解を加えると一様近似が得られる。

学習設計：出題傾向と重点技法

分野	基礎解法	第 4 集での再構成
量子力学	境界・対称性、縮退、変分、定常・非定常	変分水素、Stark 効果、Airy 状態、変位クエンチ、断熱スピン
統計力学	分配関数、揺らぎ、自由エネルギー、線形化	Hubbard 局所状態、遮蔽、回転気体、有限系転移
電磁気学・力学	Maxwell 境界条件、エネルギー、固有振動	半挿入誘電体、導電シート、弦の界面、Paul トラップ、複屈折
数学	漸近法、確率過程、微分方程式、特異摂動	臨界鞍点、初到達、初帰還、Duffing、境界層

題材そのものの出題頻度を数値的に予測したものではない。選定は過去の出題分野で繰り返し要求される**計算法の転用可能性**を基準とする。2026 年度以前の公開資料を参照しているが、近未来の試験の出題を保証しない。

＋ α ：第 5 回第 1 問 (5) では、スピンの断熱発展での Berry 位相を導く。ほかの 99 小問は基礎の適用力を測る設計である。

出典と権利

本書の問題・独自解答は本教材のために新規に作成した。東大の実際の過去問の文面や図をそのまま掲載したものではない。題材と出題分野の比較の参照先は<https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/about/147/>である。**taku** 著、**takuphys.com**。未実施年度の公式問題として引用・再配布しないこと。