

難問に挑み、**合格**をつかむ。

本質を問う問題で
思考力を鍛える

東大院試 対策問題パック

物理 予想問題集

第**5**集

全5集シリーズ

出題分野

量子力学

統計力学

電磁気学

力学

数学

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r,t)$$



$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$



この1冊で、院試物理を徹底対策！



オリジナル予想問題を多数収録

過去問を徹底分析した、実戦的な良問で演習！



詳しい解答・解説

解法の考え方から丁寧に解説し、理解を深める！



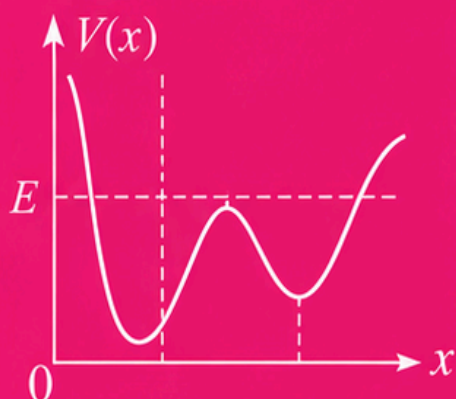
東大院試の出題傾向に完全対応

典型問題から応用・発展問題まで幅広くカバー！



解法のポイント・物理の本質も解説

答案作成のコツや思考プロセスも学べる！



taku

takuphys.com

本書の使い方

本書は東京大学大学院理学系研究科物理学専攻の公開過去問で用いられる基礎技法を参考に**独自作成した 5 回分の模擬試験**である。実際の問題や大学の模範解答を転載したものではなく、将来の出題を予告するものでもない。

第 1~4 集とは異なる題材を優先した。**固有値と対称性、熱力学の状態方程式、Maxwell 方程式、境界条件、確率・漸近解析**の使い分けを問う。第 5 回第 1 問 (5) の量子 Fisher 情報のみを発展的な「 $+\alpha$ 」とし、残りの 99 小問は学部基礎からの導出を基本に設計した。

模擬試験の条件（独自設定）

5 回とも**数学 1 問・物理 3 問の 4 大問、240 分**を目安とする。各大問は 5 小問で、配点と難易度は本書独自。大学公式の日程・配点・出題可能性を表すものではない。まず問題だけを解き、解説で符号・単位・保存量・極限を確認する。

参考にする公開資料

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻の公開過去問題集：<https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/about/147/>。本書の問題文と解説は独立制作であり、同サイトの公式設問の転載ではない。

今回の出題設計

回	物理・統計の中心	電磁気・数学の中心
1	スピン 3/2・光子と物質気体の混合系	Drude-Hall・三変数 Schur 補行列
2	異方的振動子・非調和分配関数	漏れ電流・Bessel 固有展開
3	同種フェルミ粒子・有限集団ゆらぎ	Fabry-Pérot・Poisson 和公式
4	水素双極子遷移・負温度	pinch 力・Mellin 積分
5	量子計測 ($+\alpha$)・一般次元 BEC	近点移動・大偏差

目次

本書の使い方	1
参考にする公開資料	1
今回の出題設計	1
第 1 回 スピン 3/2・光子と気体の混合系・Hall 応答・三変数 Gaussian	4
第 1 回第 1 問スピン 3/2 の対称性と 4 次元 Hamiltonian 【量子力学】	4

第 1 回第 2 問光子と単原子気体が共存する断熱容器【統計力学】	5
第 1 回第 3 問散逸を持つ Drude 電子の Hall 応答【電磁気学】	6
第 1 回第 4 問三変数 Gaussian 積分とブロック Schur 補行列【数学】	7
第 2 回 異方的振動子・非調和熱力学・漏れ電流・Bessel 展開	8
第 2 回第 1 問二次元量子調和振動子の結合と縮退分裂【量子力学】	8
第 2 回第 2 問弱い非調和性を持つ古典振動子【統計力学】	9
第 2 回第 3 問漏れ電流がある円筒コンデンサー【電磁気学】	10
第 2 回第 4 問円板上の熱方程式と Bessel 関数【数学】	11
第 3 回 同種粒子・有限集団・光共振器・Poisson 和公式	12
第 3 回第 1 問同種フェルミ粒子の接触相互作用【量子力学】	12
第 3 回第 2 問有限系における粒子数ゆらぎ【統計力学】	13
第 3 回第 3 問 Fabry-Pérot 光共振器の透過【電磁気学】	14
第 3 回第 4 問 Gaussian の Poisson 和公式と熱核【数学】	15
第 4 回 水素原子遷移・負温度・電流ピンチ・Mellin 積分	16
第 4 回第 1 問水素型原子の電気双極子遷移【量子力学】	16
第 4 回第 2 問上限エネルギーを持つスピン系と負温度【統計力学】	17
第 4 回第 3 問円柱導体の自己磁場と pinch 力【電磁気学】	18
第 4 回第 4 問 Mellin 積分のパラメータ微分【数学】	19
第 5 回 量子計測・一般次元 BEC・近点移動・大偏差	20
第 5 回第 1 問二準位量子系の位相推定と Fisher 情報【量子力学】	20
第 5 回第 2 問べき型トラップ中の Bose 気体と凝縮条件【統計力学】	21
第 5 回第 3 問中心力の小さな補正による近点移動【古典力学】	22
第 5 回第 4 問二項分布の大偏差と Chernoff 評価【数学】	23
第 1 回 詳解：スピン 3/2・混合断熱系・磁気伝導・三変数 Gaussian	24
第 1 回第 1 問の解答スピン 3/2 の偶奇ブロックと遷移	24
第 1 回第 2 問の解答光子と物質気体の混合断熱系	25
第 1 回第 3 問の解答 Drude-Hall 応答	26
第 1 回第 4 問の解答三変数 Gaussian と Schur 補行列	27
第 2 回 詳解：正規モード・摂動展開・漏れ RC・円板拡散	28

第 2 回第 1 問の解答二次元振動子の結合	28
第 2 回第 2 問の解答古典非調和振動子の正準展開	29
第 2 回第 3 問の解答円筒コンデンサーの漏れ	30
第 2 回第 4 問の解答 Bessel 固有関数による熱拡散	31
第 3 回 詳解: Pauli 原理・超幾何分布・共振・Poisson 双対性	32
第 3 回第 1 問の解答同種フェルミ粒子の接触相互作用	32
第 3 回第 2 問の解答有限母集団と超幾何分布	33
第 3 回第 3 問の解答 Fabry-Pérot 共振器	34
第 3 回第 4 問の解答 Poisson 和公式と円周上の熱核	35
第 4 回 詳解: 双極子選択則・温度の符号・磁気力・対数積分	36
第 4 回第 1 問の解答水素原子の双極子遷移	36
第 4 回第 2 問の解答二準位系の負温度	37
第 4 回第 3 問の解答電流 pinch 効果と磁気エネルギー	38
第 4 回第 4 問の解答 Mellin 積分と対数モーメント	39
第 5 回 詳解: 局所位相推定・BEC の次元依存・軌道歳差・大偏差	40
第 5 回第 1 問の解答二準位位相推定と Fisher 情報	40
第 5 回第 2 問の解答べき型トラップと Bose 凝縮	41
第 5 回第 3 問の解答補正中心力による近点歳差	42
第 5 回第 4 問の解答 Bernoulli 和の大偏差	43
学習後の確認と採点の観点	44
解答・検査の限界	44

第 1 回 | スピン 3/2 ・ 光子と気体の混合系 ・ Hall 応答 ・ 三変数 Gaussian

本書独自の模試条件：4 大問必答／240 分／各大問 100 点換算。各大問は 5 小問。難度や配点は東京大学の公式指定ではありません。

第 1 回 第 1 問 スピン 3/2 の対称性と 4 次元 Hamiltonian 【量子力学】

$S_z|m\rangle = \hbar m|m\rangle$ ($m = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2$) を満たすスピン 3/2 について、 $D > 0$ 、実数 Ω (ともにエネルギーの単位) を用い

$$H = D(S_z/\hbar)^2 + \Omega(S_x/\hbar)$$

を考える。 $S_{\pm}|m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}|m\pm 1\rangle$ ($s = 3/2$) を用いてよい。

- (1) $(|3/2\rangle, |1/2\rangle, |-1/2\rangle, |-3/2\rangle)$ 基底で H を 4×4 行列表示せよ。
- (2) $m \leftrightarrow -m$ の反転対称性を用い、偶・奇各 2 次元の不変部分空間とその 2×2 行列を求めよ。
- (3) 4 つの固有エネルギーを、偶奇ラベル $p = +1, -1$ を付けて求めよ。 $\Omega = 0$ での縮退度も示せ。
- (4) $0 < \Omega \ll D$ での最低エネルギーを Ω^2 まで展開し、縮退摂動論と照合せよ。
- (5) 偶部分空間の初期状態 $(|1/2\rangle + |-1/2\rangle)/\sqrt{2}$ から、 $(|3/2\rangle + |-3/2\rangle)/\sqrt{2}$ へ遷移する確率を厳密に求めよ。

第1回 第2問 光子と単原子気体が共存する断熱容器【統計力学】

光子気体と非相対論的な古典単原子理想気体（粒子数 N 固定）が、体積 V の容器内で同じ温度 T に保たれ、互いに熱平衡にある。光子のエネルギーは $U_\gamma = aVT^4$ 、圧力は $P_\gamma = aT^4/3$ ($a > 0$) である。物質気体は $U_m = 3Nk_B T/2$ 、 $P_m = Nk_B T/V$ 。両者の間に非断熱的な外部熱流はなく、十分ゆっくり可逆膨張させる。 $N, V, T > 0$ とする。

- (1) 第一法則 $dU = T dS - P dV$ から、混合系のエントロピー $S(T, V)$ を加法定数まで求めよ。
- (2) 初期 (T_i, V_i) から最終 (T_f, V_f) への可逆断熱変化を決める暗黙の関係式を求めよ。
- (3) 断熱経路の対数微分 $d \ln T / d \ln V$ を求め、光子が優勢・物質気体が優勢な二つの極限を比較せよ。
- (4) 定積熱容量 C_V を求め、断熱経路で $dU/dV = -P$ が成り立つことを確かめよ。
- (5) 無次元比 $r = aVT^3/(Nk_B)$ が断熱膨張で増加するか減少するかを求め、その物理的意味を述べよ。

第1回 第3問 散逸を持つ Drude 電子の Hall 応答【電磁気学】

平面内の電子（電荷 $-e$ 、質量 m 、数密度 n ）に $\mathbf{B} = B\hat{z}$ 、弱い直流電場 $\mathbf{E}$ をかける。平均速度 $\mathbf{v}$ は

$$m\dot{\mathbf{v}} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - m\mathbf{v}/\tau \quad (\tau > 0)$$

に従い、電流密度は $\mathbf{j} = -nev$ とする。 $\omega_c = eB/m$ （符号付き）と置く。

- (1) 定常状態の x, y 成分を連立方程式で表せ。
- (2) $\mathbf{v}$ を $\mathbf{E}$ で表し、導電率テンソル σ を求めよ。
- (3) 抵抗率テンソル $\rho = \sigma^{-1}$ を求め、Hall 係数 $E_y/(j_x B)$ を $j_y = 0$ の条件で計算せよ。
- (4) $B = 0$ の導電率と $|\omega_c \tau| \gg 1$ の Hall 導電率の主要項を求めよ。
- (5) $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ が非負であることを示し、Hall 項が直接 Joule 発熱しない理由を説明せよ。

第 1 回 第 4 問 三変数 Gaussian 積分とブロック Schur 補行列【数学】

実数 $a, b > 0$ 、 $u, v \in \mathbb{R}$ と $c > u^2/a + v^2/b$ を満たす c を考え、

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & u \\ 0 & b & v \\ u & v & c \end{pmatrix}, \quad Z(J_1, J_2, K) = \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} + J_1 x_1 + J_2 x_2 + K y\right] dx_1 dx_2 dy$$

とする。ただし $\mathbf{x} = (x_1, x_2, y)^\top$ 。 $s = c - u^2/a - v^2/b$ を用いてよい。

- (1) 二次形式を平方完成して A の正定値性を示し、 $\det A$ を求めよ。
- (2) 一般の源 J_1, J_2, K に対する Z を閉形式で求めよ。
- (3) $J_1 = J_2 = K = 0$ とする。 y 固定での (x_1, x_2) の条件付き平均と共分散行列を求めよ。
- (4) 同じ分布で $\text{Var}(y)$ 、 $\text{Cov}(x_1, y)$ 、 $\text{Cov}(x_1, x_2)$ を求めよ。
- (5) x_1, x_2 を積分消去した y の周辺密度と、 $s \rightarrow 0^+$ における揺らぎを説明せよ。

第 2 回 | 異方的振動子・非調和熱力学・漏れ電流・Bessel 展開

本書独自の模試条件：4 大問必答／240 分／各大問 100 点換算。各大問は 5 小問。難度や配点は東京大学の公式指定ではありません。

第 2 回 第 1 問 二次元量子調和振動子の結合と縮退分裂【量子力学】

質量 m の粒子に対し

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \lambda m\omega^2 xy, \quad |\lambda| < 1$$

を考える。 $\hbar\omega$ をエネルギー尺度とする。

- (1) 座標 $u = (x + y)/\sqrt{2}$, $v = (x - y)/\sqrt{2}$ で Hamiltonian を分離せよ。
- (2) 正確なエネルギー E_{n_u, n_v} と基底エネルギーを求めよ。
- (3) $\lambda = 0$ で縮退する第一励起準位が $\lambda \neq 0$ でどう分裂するか述べよ。
- (4) 基底状態で $\langle xy \rangle$ を求め、 λ の符号との関係を調べよ。
- (5) $|\lambda| \ll 1$ で基底エネルギーを λ^2 まで展開し、一次補正が消える理由を説明せよ。

第 2 回 第 2 問 弱い非調和性を持つ古典振動子【統計力学】

一次元古典系 $H = p^2/(2m) + kx^2/2 + \epsilon x^4$ ($m, k > 0, \epsilon \geq 0$) を温度 T の正準分布で考える。 $\beta = 1/(k_B T)$ 、 $\epsilon k_B T/k^2 \ll 1$ とする。位相空間の無次元化定数は自由に選んでよい。

- (1) $\epsilon = 0$ の分配関数 Z_0 を求めよ。
- (2) $\epsilon = 0$ で $\langle x^2 \rangle_0, \langle x^4 \rangle_0, \langle x^6 \rangle_0$ を求めよ。
- (3) $\ln Z$ を ϵ の一次まで展開せよ。
- (4) 平均エネルギー U と熱容量 C_V を ϵ の一次まで求めよ。
- (5) $\langle x^2 \rangle$ の一次補正を求め、非調和項が揺らぎを抑えることを示せ。

第2回 第3問 漏れ電流がある円筒コンデンサー【電磁気学】

内半径 a 、外半径 $b > a$ 、長さ $L \gg b$ の同軸電極間は、誘電率 ε 、弱い直流伝導率 $\sigma > 0$ の一様な媒体で満たされる。端効果は無視し、外部回路は時刻 $t = 0$ に切り離す。

- (1) 内外電極間電圧 V による静電場 $E_r(r)$ と静電容量 C を求めよ。
- (2) 伝導電流 I と漏れコンダクタンス $G = I/V$ を求めよ。
- (3) 電荷 $Q(t)$ の時間発展方程式と減衰時定数 τ を求めよ。
- (4) 初期蓄積エネルギー U_0 と瞬間 Joule 損失 $P(t)$ の関係を求めよ。
- (5) $\int_0^\infty P(t) dt = U_0$ を確かめ、 τ の形の意味を説明せよ。

第 2 回 第 4 問 円板上の熱方程式と Bessel 関数【数学】

半径 a の円板で軸対称温度 $u(r, t)$ が $\partial_t u = D(u_{rr} + r^{-1}u_r)$ ($D > 0, 0 < r < a$) に従う。境界 $u(a, t) = 0$ 、 $r = 0$ で有限、初期値 $u(r, 0) = u_0$ (定数) とする。Bessel 関数 J_0 は $(rJ'_0(kr))' + k^2 r J_0(kr) = 0$ を満たす。

- (1) 変数分離から固有関数 $J_0(kr)$ と固有値を導け。
- (2) $J_0(\alpha_n) = 0$ を正の零点 $0 < \alpha_1 < \dots$ としたとき時定数を求めよ。
- (3) 固有関数の直交関係 $\int_0^a r J_0(\alpha_m r/a) J_0(\alpha_n r/a) dr$ を述べよ。
- (4) 初期値 u_0 の展開係数と $u(r, t)$ を求めよ。
- (5) $t \rightarrow \infty$ で支配的な緩和率と、中心温度の符号を確認せよ。

第 3 回 | 同種粒子・有限集団・光共振器・Poisson 和公式

本書独自の模試条件：4 大問必答／240 分／各大問 100 点換算。各大問は 5 小問。難度や配点は東京大学の公式指定ではありません。

第 3 回 第 1 問 同種フェルミ粒子の接触相互作用【量子力学】

一次元調和振動子 $h = p^2/(2m) + m\omega^2 x^2/2$ に、同じ質量のスピン $1/2$ フェルミ粒子が 2 個存在する。全 Hamiltonian は $H = h_1 + h_2 + g\delta(x_1 - x_2)$ ($g > 0$, g は十分小さい) である。単粒子基底軌道を $\phi_0(x) = (\pi a^2)^{-1/4} e^{-x^2/(2a^2)}$ 、第一励起を $\phi_1(x) = \sqrt{2}(x/a)\phi_0(x)$ ($a = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$) とする。

- (1) 全波動関数の反対称性から、同じ軌道を占める二粒子のスピン状態を決めよ。
- (2) 両粒子が ϕ_0 を占める状態の相互作用一次補正を計算せよ。
- (3) 一方が ϕ_0 、他方が ϕ_1 の場合の空間対称・反対称波動関数を規格化せよ。
- (4) この二つの空間状態の相互作用一次補正を求め、スピン多重度を述べよ。
- (5) $g \rightarrow 0$ でのエネルギー順序と、反対称空間波動関数の接触エネルギーが厳密にゼロとなる理由を説明せよ。

第3回 第2問 有限系における粒子数ゆらぎ【統計力学】

$M \geq 2$ 個の等価なサイトに、区別できない粒子 N 個 ($0 < N < M$) を1サイト最大1個の制約で無作為に配置する。 m 個 ($1 \leq m \leq M$) の指定部分系中の粒子数を K とし、すべての $\binom{M}{N}$ 配置は等確率とする。

- (1) $K = k$ である確率を組合せ数で表し、可能な k の範囲を書け。
- (2) 部分系の平均粒子数 $\langle K \rangle$ を求めよ。
- (3) $\text{Var}(K)$ を M, N, m で表せ。
- (4) $m = M$ でのゆらぎと、 $M \rightarrow \infty$ で $N/M \rightarrow p$ かつ m 固定の分布を求めよ。
- (5) 大分配的な独立 Bernoulli 近似と比較し、全粒子数保存による修正因子を説明せよ。

第3回 第3問 Fabry-Pérot 光共振器の透過【電磁気学】

間隔 L で向き合う二枚の同じ損失のない鏡に単色平面波を入射する。鏡の強度反射率を $0 < R < 1$ 、強度透過率を $1 - R$ とする。位相規約を選び、共振器全体の透過振幅が

$$t_{\text{FP}}(k) = \frac{(1 - R)e^{ikL}}{1 - Re^{2ikL}}$$

と表されるものとする。真空中で $\omega = ck$ とする。

- (1) 振幅を多重反射の等比級数から導け。
- (2) 強度透過率 $\mathcal{T} = |t_{\text{FP}}|^2$ を $\sin^2(kL)$ を用いて表せ。
- (3) 透過が最大となる共鳴条件と、隣り合う共鳴の角周波数差 $\Delta\omega_{\text{FSR}}$ を求めよ。
- (4) $R \rightarrow 1$ の鋭い共鳴に対して透過率の半値全幅 $\Delta\omega_{\text{FWHM}}$ を求めよ。
- (5) finesse $\mathcal{F} = \Delta\omega_{\text{FSR}}/\Delta\omega_{\text{FWHM}}$ を計算し、 $R \rightarrow 0$ の場合に鋭い共鳴の近似が破綻することを述べよ。

第 3 回 第 4 問 Gaussian の Poisson 和公式と熱核【数学】

$t > 0$ として $\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2}$ を定義する。Fourier 変換を $\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx$ とし、Poisson 和公式 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi m)$ を使ってよい。

- (1) $f(x) = e^{-\pi t x^2}$ の Fourier 変換を求めよ。
- (2) $\theta(t) = t^{-1/2} \theta(1/t)$ を導け。
- (3) $t \rightarrow \infty$ および $t \rightarrow 0^+$ の $\theta(t)$ の先頭 2 項を求めよ。
- (4) 周長 L の周期区間の熱方程式 $\partial_\tau u = D \partial_x^2 u$ の固有値と熱核の跡 $K(\tau)$ を求めよ。
- (5) $\tau \rightarrow 0$ における $K(\tau)$ の主要項と、 $\tau \rightarrow \infty$ で残るモードを求めよ。

第 4 回 | 水素原子遷移・負温度・電流ピンチ・Mellin 積分

本書独自の模試条件：4 大問必答／240 分／各大問 100 点換算。各大問は 5 小問。難度や配点は東京大学の公式指定ではありません。

第 4 回 第 1 問 水素型原子の電気双極子遷移【量子力学】

Bohr 半径 $a = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$ を用い、水素原子の正規化された状態を

$$\psi_{1s} = \frac{e^{-r/a}}{\sqrt{\pi a^3}}, \quad \psi_{2p_z} = \frac{r \cos \theta}{4\sqrt{2\pi} a^{5/2}} e^{-r/(2a)}$$

とする。束縛エネルギーは $E_n = -\hbar^2/(2ma^2n^2)$ 。電子に z 方向の弱い電場 $E(t) = \mathcal{E} \cos(\omega t)$ を加え、摂動は $V(t) = e\mathcal{E}z \cos(\omega t)$ とする。

- (1) ψ_{1s} および ψ_{2p_z} の規格化を積分で確認せよ。
- (2) パリティから $\langle 1s|z|1s \rangle = 0$ を示し、 $\langle 2p_z|x|1s \rangle = \langle 2p_z|y|1s \rangle = 0$ を示せ。
- (3) $d = \langle 2p_z|z|1s \rangle$ を計算せよ。
- (4) 共鳴角周波数 $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ を求めよ。
- (5) $\omega = \omega_0$ の弱励起・短時間極限（回転波近似）で $1s \rightarrow 2p_z$ の遷移確率を求め、近似の条件を述べよ。

第4回 第2問 上限エネルギーを持つスピン系と負温度【統計力学】

相互作用しない $N \gg 1$ 個の二準位スピンがある。各スピンのエネルギーは $+\epsilon/2$ (高エネルギー) か $-\epsilon/2$ (低エネルギー) で $\epsilon > 0$ 。高エネルギーを占有するスピン数を n 、比率を $p = n/N$ とする。

- (1) 固定 n の状態数 $\Omega(n)$ と $E(n)$ を求めよ。
- (2) Stirling 近似からエントロピー密度 $S/(Nk_B)$ を求めよ。
- (3) $1/T = \partial S / \partial E$ から、 $p > 1/2$ の状態が負温度になることを示せ。
- (4) 逆温度 $\beta = 1/(k_B T)$ の正準分配関数と $U(\beta)$ を求めよ。
- (5) 熱容量 C を求め、負温度でも $C \geq 0$ であることを説明せよ。

第4回 第3問 円柱導体の自己磁場と pinch 力【電磁気学】

半径 a の長い円柱導体を z 方向に電流 I が均一な電流密度 $J_z = I/(\pi a^2)$ で流れる。透磁率は全領域で μ_0 、静磁場・端効果なしとする。磁気エネルギーを計算するとき外側半径 $R > a$ で打ち切る。

- (1) Ampère の法則から $B_\phi(r)$ を内側 $0 < r < a$ と外側 $a < r < R$ で求めよ。
- (2) Lorentz 力密度 $\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ の向きと大きさを導け。
- (3) 静的な力の釣り合い $-\nabla p + \mathbf{f} = 0$ から $p(0) - p(a)$ を求めよ。
- (4) 磁気エネルギーの円柱内部寄与 U_{in}/L を求めよ。
- (5) $a < r < R$ の磁気エネルギーと、単位長さ当たりの有効自己インダクタンス $\mathcal{L}'$ を求めよ。

第4回 第4問 Mellin 積分のパラメータ微分【数学】

x と a は正の無次元実数とし、対数は無次元変数に対して取る。 $a > 0$ 、 $0 < s < 2$ に対して $I(s, a) = \int_0^\infty x^{s-1}/(x^2 + a^2) dx$ とする。必要なら $\int_0^\infty t^{s-1}/(1+t^2) dt = (\pi/2) \csc(\pi s/2)$ を用いてよい。

- (1) $I(s, a)$ が収束する s の範囲を示せ。
- (2) $I(s, a)$ を a, s で表せ。
- (3) $\int_0^\infty dx/(x^2 + a^2)$ を求めよ。
- (4) $\int_0^\infty \ln x dx/(x^2 + a^2)$ を求めよ。
- (5) $\int_0^\infty (\ln x)^2 dx/(x^2 + a^2)$ を求め、 $a = 1$ の対称性と比較せよ。

第 5 回 | 量子計測・一般次元 BEC・近点移動・大偏差

本書独自の模試条件：4 大問必答／240 分／各大問 100 点換算。各大問は 5 小問。難度や配点は東京大学の公式指定ではありません。

第 5 回 第 1 問 二準位量子系の位相推定と Fisher 情報【量子力学】

計測したい小さな位相 θ を持つ純粋な二準位状態

$$|\psi_\theta\rangle = (|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle)/\sqrt{2}$$

を用意する。 $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ で測定する。古典 Fisher 情報を $F_{\text{cl}} = \sum_j (\partial_\theta p_j)^2 / p_j$ と定義する。最後の小問だけ発展問題とする。

- (1) 密度行列 ρ_θ を $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基底で書き、純粋性 $\text{Tr}\rho_\theta^2$ を求めよ。
- (2) $|\pm\rangle$ の測定確率 $p_\pm(\theta)$ を求めよ。
- (3) 一般の θ で古典 Fisher 情報 F_{cl} を計算せよ（端点では極限值を考えよ）。
- (4) N 回独立測定したときの Fisher 情報と、局所的な不偏推定の Cramér–Rao 下界を述べよ。
- (5) 【+ α 】 N 粒子 GHZ 状態 $(|0\rangle^{\otimes N} + e^{iN\theta}|1\rangle^{\otimes N})/\sqrt{2}$ の量子 Fisher 情報 $F_Q = 4(\langle\psi'|\psi'\rangle - |\langle\psi|\psi'\rangle|^2)$ を計算し、推定上の注意を述べよ。

第5回 第2問 ベキ型トラップ中の Bose 気体と凝縮条件【統計力学】

d 次元空間の非相互作用 Bose 粒子を、半古典近似の一粒子 Hamiltonian $H = p^2/(2m) + \kappa r^q$ ($m, \kappa, q > 0$) で閉じ込める。最低エネルギーを 0 とする。位相空間の状態数を $(2\pi\hbar)^{-d} \int d^d x d^d p$ で数える。状態密度は $g(E) = CE^{\alpha-1}$ ($C > 0$) の形となる。

- (1) スケーリング変換だけから $\alpha = d/2 + d/q$ を導け。
- (2) $\mu \rightarrow 0^-$ における励起粒子数 N_{ex} を Gamma・zeta 関数で表せ。
- (3) 凝縮温度が非零となる α の必要条件と、凝縮可能な場合の T_c を求めよ。
- (4) $T < T_c$ で励起エネルギー U_{ex} と定容熱容量の温度依存を求めよ。
- (5) $d = 3, q = 2$ と $d = 2, q \rightarrow \infty$ の場合を比較し、後者の意味と制約を説明せよ。

第5回 第3問 中心力の小さな補正による近点移動【古典力学】

質量 m の粒子が平面内で

$$F_r = -\frac{k}{r^2} - \frac{\eta}{r^3}, \quad k > 0, \quad \eta \geq 0$$

の中心力を受ける。角運動量 $\ell = mr^2\dot{\phi}$ は一定とし、 $\ell^2 > m\eta$ を仮定する。 $u(\phi) = 1/r$ を使う。

- (1) 有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(r)$ とエネルギー保存式を求めよ。
- (2) Binet 方程式を導き、 $u'' + \nu^2 u = mk/\ell^2$ の ν を求めよ。
- (3) 円軌道半径 r_c を求め、微小振動が安定な条件を述べよ。
- (4) 束縛運動の $u(\phi)$ の一般形と、近点から次の近点までの角度を求めよ。
- (5) $m\eta/\ell^2 \ll 1$ で1周あたりの近点移動角を求め、 $\eta \rightarrow 0$ の Kepler 極限を確認せよ。

第 5 回 第 4 問 二項分布の大偏差と Chernoff 評価【数学】

独立 Bernoulli 確率変数 $X_1, \dots, X_n$ が $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$ ($0 < p < 1$) に従う。 $S_n = \sum_i X_i$, $\bar{X}_n = S_n/n$ とする。

- (1) 母関数 $\mathbb{E}e^{tS_n}$ とその対数を求めよ。
- (2) $q \in (0, 1)$ に対し $\sup_t [tq - \ln(1 - p + pe^t)]$ を計算し、rate function $I(q)$ を求めよ。
- (3) $I(p) = 0$ 、 $I'(p) = 0$ および $I''(p)$ を求めよ。
- (4) $q > p$ に対して $P(\bar{X}_n \geq q) \leq e^{-nI(q)}$ を導け。
- (5) nq が整数として $P(\bar{X}_n = q)$ の Stirling 漸近形を求め、中心極限定理の分散との接続を説明せよ。

第 1 回 | 詳解：スピン 3/2・混合断熱系・磁気伝導・三変数 Gaussian

第 1 回 第 1 問の解答 スピン 3/2 の偶奇ブロックと遷移

- (1) $S_x = (S_+ + S_-)/2$ と $s = 3/2$ から、隣接行列要素は $\sqrt{3}/2, 1, \sqrt{3}/2$ 。よって

$$H = \begin{pmatrix} 9D/4 & \sqrt{3}\Omega/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\Omega/2 & D/4 & \Omega & 0 \\ 0 & \Omega & D/4 & \sqrt{3}\Omega/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}\Omega/2 & 9D/4 \end{pmatrix}.$$

- (2) $R|m\rangle = |-m\rangle$ について $R^2 = 1$ かつ $[R, H] = 0$ 。 $p = +1$ (偶) または -1 (奇) として $|o_p\rangle = (|3/2\rangle + p|-3/2\rangle)/\sqrt{2}$ 、 $|i_p\rangle = (|1/2\rangle + p|-1/2\rangle)/\sqrt{2}$ 。この順のブロックは

$$H_p = \begin{pmatrix} 9D/4 & \sqrt{3}\Omega/2 \\ \sqrt{3}\Omega/2 & D/4 + p\Omega \end{pmatrix}, \quad p = \pm 1.$$

- (3) 2×2 の特性方程式より $\Delta_p = \sqrt{(2D - p\Omega)^2 + 3\Omega^2}$ と置けば

$$E_{p,\pm} = \frac{5D}{4} + \frac{p\Omega}{2} \pm \frac{\Delta_p}{2}.$$

$\Omega = 0$ では内側 $|\pm 1/2\rangle$ がエネルギー $D/4$ で 2 重、外側 $|\pm 3/2\rangle$ が $9D/4$ で 2 重縮退する。

- (4) $0 < \Omega \ll D$ で低エネルギーの奇ブロック $p = -1$ が基底となる。 $\Delta_- = 2D + \Omega + 3\Omega^2/(4D) + O(\Omega^3/D^2)$ から

$$E_{\text{ground}} = \frac{D}{4} - \Omega - \frac{3\Omega^2}{8D} + O(\Omega^3/D^2).$$

非摂動の $|\pm 1/2\rangle$ 二重縮退空間では摂動は $\Omega\sigma_x$ となり一次固有値 $\pm\Omega$ 。高励起部分空間への結合 $\sqrt{3}\Omega/2$ とエネルギー差 $-2D$ から二次補正 $-3\Omega^2/(8D)$ を得る。

- (5) 偶ブロックを $\frac{1}{2}\text{tr}(H_+)I + \frac{1}{2}(2D - \Omega)\sigma_z + (\sqrt{3}\Omega/2)\sigma_x$ と書く。初期 $|i_+\rangle$ から $|o_+\rangle$ への遷移は

$$P_{i_+ \rightarrow o_+}(t) = \frac{3\Omega^2}{(2D - \Omega)^2 + 3\Omega^2} \sin^2\left(\frac{t}{2\hbar} \sqrt{(2D - \Omega)^2 + 3\Omega^2}\right).$$

$\Omega \rightarrow 0$ で 0 になり、すべての時刻で $0 \leq P \leq 1$ を満たす。

検算・適用条件

スピン 1 の旧問題とは異なり、4 次元の反転対称性を二つの 2×2 ブロックへ還元する。 $\Omega > 0$ は基底枝を特定するための (4) だけの条件である。

第1回 第2問の解答 光子と物質気体の混合断熱系

- (1)
- $U = aVT^4 + \frac{3}{2}Nk_B T$
- 、
- $P = aT^4/3 + Nk_B T/V$
- 。第一法則より

$$dS = \left(4aVT^2 + \frac{3Nk_B}{2T}\right) dT + \left(\frac{4}{3}aT^3 + \frac{Nk_B}{V}\right) dV.$$

積分して、固定した参照尺度 $T_0, V_0 > 0$ を用いると

$$S(T, V) = \frac{4}{3}aVT^3 + Nk_B \left[\ln \frac{V}{V_0} + \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_0} \right] + S_0.$$

- (2) 可逆断熱変化では
- $S_f = S_i$
- 。従って温度
- T_f
- は次の暗黙の式で決まる：

$$\frac{4}{3}a(V_f T_f^3 - V_i T_i^3) + Nk_B \left[\ln \frac{V_f}{V_i} + \frac{3}{2} \ln \frac{T_f}{T_i} \right] = 0.$$

- (3)
- $dS = 0$
- とし、
- $r = aVT^3/(Nk_B)$
- と定義すると

$$\left. \frac{d \ln T}{d \ln V} \right|_S = -\frac{(4/3)r + 1}{4r + 3/2}.$$

$r \gg 1$ の光子優勢極限では $-1/3$ 、 $r \ll 1$ の気体優勢極限では $-2/3$ となる。後者は単原子気体の $TV^{2/3} = \text{const}$ に一致する。

- (4) 温度微分で
- $C_V = 4aVT^3 + 3Nk_B/2$
- 。第1問で得た第一法則は
- $T dS = dU + P dV$
- だから、
- $dS = 0$
- に沿って厳密に
- $(dU/dV)_S = -P$
- となる。例えば
- $U(T, V)$
- を直接微分して上記の断熱傾きを代入しても同じ結果を得る。

- (5)
- $r \propto VT^3$
- なので

$$\left. \frac{d \ln r}{d \ln V} \right|_S = 1 + 3 \frac{d \ln T}{d \ln V} = -\frac{3/2}{4r + 3/2} < 0.$$

膨張に伴って、放射エネルギーと物質気体の熱エネルギーの比 $U_\gamma/U_m = 2r/3$ は減少する。このため断熱冷却則は光子支配から物質気体支配へ連続的に変わりうる。

検算・適用条件

光子数は保存されないが物質粒子数 N は固定する。対数の引数は $V/V_0, T/T_0$ と無次元化した。単独の黒体輻射とは異なる断熱経路である。

第 1 回 第 3 問の解答 Drude-Hall 応答

(1) $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (Bv_y, -Bv_x, 0)$ なので $\boxed{\gamma v_x + \omega_c v_y = -eE_x/m, \quad -\omega_c v_x + \gamma v_y = -eE_y/m}$ 、ただし $\gamma = 1/\tau$ 。

(2) $\mathbf{v} = -\frac{e}{m(\gamma^2 + \omega_c^2)} \begin{pmatrix} \gamma & -\omega_c \\ \omega_c & \gamma \end{pmatrix} \mathbf{E}$ 。よって $\boxed{\sigma = \frac{ne^2}{m(\gamma^2 + \omega_c^2)} \begin{pmatrix} \gamma & -\omega_c \\ \omega_c & \gamma \end{pmatrix}}$ 。

(3) 逆行列は $\boxed{\rho = \frac{m}{ne^2} \begin{pmatrix} \gamma & \omega_c \\ -\omega_c & \gamma \end{pmatrix}}$ 。 $j_y = 0$ なら $E_y = -Bj_x/(ne)$ より $\boxed{R_H = -1/(ne)}$ 。

(4) $B = 0$ で $\boxed{\sigma_{xx} = ne^2\tau/m}$ 。大磁場で $\sigma_{yx} \sim ne/B$ 、 $\sigma_{xy} \sim -ne/B$ 、 $\sigma_{xx} \sim ne^2/(m\omega_c^2\tau)$ 。

(5) $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma_{xx}(E_x^2 + E_y^2) \geq 0$ 。反対称成分 σ_H は $\mathbf{E}^T \sigma_H \mathbf{E} = 0$ なので Hall 電流は直接 Joule 発熱に寄与しない。

検算・適用条件

Hall 係数の符号は電子の負電荷による。 ρ_{yx} と ρ_{xy} を取り違えない。

第1回 第4問の解答 三変数 Gaussian と Schur 補行列

(1) 平方完成すると

$$\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = a \left(x_1 + \frac{u}{a} y \right)^2 + b \left(x_2 + \frac{v}{b} y \right)^2 + s y^2, \quad s = c - \frac{u^2}{a} - \frac{v^2}{b} > 0.$$

全係数が正だから A は正定値で $\det A = ab s$ 。(2) x_1, x_2 について Gaussian 積分した後、 y について平方完成する。 $J'_y = K - uJ_1/a - vJ_2/b$ として

$$Z(J_1, J_2, K) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{ab s}} \exp \left[\frac{J_1^2}{2a} + \frac{J_2^2}{2b} + \frac{(K - uJ_1/a - vJ_2/b)^2}{2s} \right].$$

(3) y を固定すると x_1 と x_2 は条件付きで独立となり

$$\mathbb{E}[(x_1, x_2)^\top | y] = (-uy/a, -vy/b)^\top, \quad \text{Cov}((x_1, x_2)|y) = \text{diag}(1/a, 1/b).$$

(4) 周辺の y は精度 s の正規分布だから $\text{Var}(y) = 1/s$ 。全共分散則より

$$\text{Cov}(x_1, y) = -\frac{u}{as}, \quad \text{Cov}(x_1, x_2) = \frac{uv}{ab s}.$$

 x_1, x_2 は y 固定では独立でも、 y を積分消去すると一般に相関する。(5) x_1, x_2 を消去すると $p(y) = \sqrt{s/(2\pi)} e^{-sy^2/2}$ 。 $s \rightarrow 0^+$ で $\text{Var}(y) = s^{-1} \rightarrow \infty$ 、 $\det A = ab s \rightarrow 0^+$ となる。これは正定値性の境界に接近する軟らかいモードを表す ($s = 0$ では積分は発散)。

検算・適用条件

二変数 Gaussian との解法上の重複を避け、二つの変数を周辺化した後の条件付き独立と周辺相関の差を問う。

第2回 | 詳解：正規モード・摂動展開・漏れ RC・円板拡散

第2回 第1問の解答 二次元振動子の結合

- (1) 直交座標変換は運動量も同様に $p_u = (p_x + p_y)/\sqrt{2}$, $p_v = (p_x - p_y)/\sqrt{2}$ と変換する。 $xy = (u^2 - v^2)/2$ であるため $H = \sum_{q=u,v} [p_q^2/(2m) + m\omega_q^2 q^2/2]$, $\omega_u = \omega\sqrt{1+\lambda}$, $\omega_v = \omega\sqrt{1-\lambda}$ 。
- (2) 二つの独立振動子なので $E_{n_u, n_v} = \hbar\omega_u(n_u + 1/2) + \hbar\omega_v(n_v + 1/2)$, $E_0 = \hbar(\omega_u + \omega_v)/2$ 。 $|\lambda| < 1$ は閉じ込めポテンシャルが正定値となる条件である。
- (3) $\lambda = 0$ の $(n_x, n_y) = (1, 0), (0, 1)$ は共に $2\hbar\omega$ 。結合後は $E_{10} = E_0 + \hbar\omega_u$, $E_{01} = E_0 + \hbar\omega_v$ となり分裂幅は $\hbar|\omega_u - \omega_v|$ 。
- (4) $xy = (u^2 - v^2)/2$, 各モードで $\langle q^2 \rangle_0 = \hbar/(2m\omega_q)$ より $\langle xy \rangle = \frac{\hbar}{4m}(\omega_u^{-1} - \omega_v^{-1})$ 。 $\lambda > 0$ なら $\omega_u > \omega_v$ で相関は負。
- (5) $\sqrt{1 \pm \lambda} = 1 \pm \lambda/2 - \lambda^2/8 + O(\lambda^3)$ から $E_0 = \hbar\omega[1 - \lambda^2/8 + O(\lambda^4)]$ 。非摂動基底は $x \rightarrow -x$ または $y \rightarrow -y$ で偶、 xy は奇なので一次期待値がゼロとなる。

検算・適用条件

対角化後の u, v は元の x, y とは異なる。 $\langle xy \rangle$ には両モードの零点揺らぎが寄与する。

第2回 第2問の解答 古典非調和振動子の正準展開

- (1) 連続相空間で基準単位 h_* を用いると $Z_0 = h_*^{-1} \sqrt{2\pi m/\beta} \sqrt{2\pi/(\beta k)} = 2\pi \sqrt{m/k/(\beta h_*)}$ 。熱容量などは h_* に依存しない。
- (2) 分散 $s^2 = 1/(\beta k) = k_B T/k$ の Gaussian だから $\langle x^2 \rangle_0 = s^2$, $\langle x^4 \rangle_0 = 3s^4$, $\langle x^6 \rangle_0 = 15s^6$ (Wick 則)。
- (3) $Z = Z_0 \langle \exp(-\beta \epsilon x^4) \rangle_0$ を展開し、 $\ln Z = \ln Z_0 - 3\epsilon/(\beta k^2) + O(\epsilon^2)$ 。小パラメータは $\beta \epsilon \langle x^4 \rangle_0 \sim \epsilon/(\beta k^2)$ 。
- (4) $U = -\partial_\beta \ln Z$ から $U = 1/\beta - 3\epsilon/(\beta^2 k^2) + O(\epsilon^2)$, $C_V = k_B - 6\epsilon k_B^2 T/k^2 + O(\epsilon^2)$ 。摂動展開の範囲のみ有効であり、高温で負の熱容量を意味しない。
- (5) $\langle x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_0 - \beta \epsilon (\langle x^6 \rangle_0 - \langle x^2 \rangle_0 \langle x^4 \rangle_0) + \dots$ なので $\langle x^2 \rangle = k_B T/k - 12\epsilon (k_B T)^2/k^3 + O(\epsilon^2)$ 。 $\epsilon > 0$ の硬化で変位揺らぎが小さくなる。

検算・適用条件

U では $\ln Z$ を微分するとき β 依存をすべて微分する。符号は非調和エネルギーの単純加算だけでは得られない。

第2回 第3問の解答 円筒コンデンサーの漏れ

- (1) 円筒対称性と $\int_a^b E_r dr = V$ から $E_r = V/[r\ell]$ 、 $\ell = \ln(b/a)$ 。内電極電荷 $Q = 2\pi\epsilon LrE_r = 2\pi\epsilon LV/\ell$ だから $C = 2\pi\epsilon L/\ell$ 。
- (2) $j_r = \sigma E_r$ より全漏れ電流 $I = 2\pi rLj_r = 2\pi\sigma LV/\ell$ 、 $G = 2\pi\sigma L/\ell$ 。電流は r に依存しない。
- (3) 電荷保存 $\dot{Q} = -I = -GV = -GQ/C$ 。 $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$ 、 $\tau = C/G = \epsilon/\sigma$ 。したがって $V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ 。
- (4) $U(t) = Q(t)^2/(2C) = U_0 e^{-2t/\tau}$ 、 $U_0 = CV_0^2/2$ 。 $P(t) = GV(t)^2 = GV_0^2 e^{-2t/\tau} = 2U_0 e^{-2t/\tau}/\tau$ 、 $\dot{U} = -P$ 。
- (5) $\int_0^\infty P dt = (2U_0/\tau)(\tau/2) = U_0$ 。 $\tau = \epsilon/\sigma$ は Maxwell 緩和時間で、同一媒体・準静的近似では幾何形状に依存しない。

検算・適用条件

電荷振幅は $e^{-t/\tau}$ 、エネルギーと発熱はその二乗 $e^{-2t/\tau}$ で減衰する。

第2回 第4問の解答 Bessel 固有関数による熱拡散

(1) $u(r, t) = R(r)T(t)$ として $T'/DT = (R'' + r^{-1}R')/R = -k^2$ 。 $R'' + r^{-1}R' + k^2R = 0$ の中心で有界な解は $J_0(kr)$ (Y_0 は発散)。

(2) 境界条件 $J_0(ka) = 0$ から $k_n = \alpha_n/a$ 、減衰率 $\lambda_n = D\alpha_n^2/a^2$ 、緩和時間 $\tau_n = a^2/(D\alpha_n^2)$ 。

(3) Sturm–Liouville の重み r に関する直交性は $\int_0^a r J_0(\alpha_m r/a) J_0(\alpha_n r/a) dr = \frac{a^2}{2} J_1(\alpha_n)^2 \delta_{mn}$ 。

(4) 定数の展開係数 $A_n = \frac{2}{a^2 J_1(\alpha_n)^2} \int_0^a r u_0 J_0(\alpha_n r/a) dr$ 。 $\int_0^a r J_0(\alpha_n r/a) dr = a^2 J_1(\alpha_n)/\alpha_n$ より $A_n = 2u_0/[\alpha_n J_1(\alpha_n)]$ 。したがって

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u_0}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} J_0(\alpha_n r/a) e^{-D\alpha_n^2 t/a^2}.$$

(5) $t \gg a^2/[D(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)]$ なら第一モード支配。 $u(0, t) \sim [2u_0/(\alpha_1 J_1(\alpha_1))] e^{-D\alpha_1^2 t/a^2}$ 。 $J_1(\alpha_1) > 0$ だから $u_0 > 0$ に対し中心温度は正。

検算・適用条件

初期一定温度と境界温度 0 は角点 ($r = a, t = 0$) で両立しないが、 $t > 0$ の熱方程式解は正しく定義できる。

第 3 回 | 詳解：Pauli 原理・超幾何分布・共振・Poisson 双対性

第 3 回 第 1 問の解答 同種フェルミ粒子の接触相互作用

- (1) ニフェルミ粒子では全状態が粒子交換に対して反対称。両方が同じ ϕ_0 なら空間部分是对称なので、スピン部分は $(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ (一重項) である。
- (2) 接触一次補正は $\Delta E_{00}^{(1)} = g \int |\phi_0(x)|^4 dx$ 。 $|\phi_0|^4 = (\pi a^2)^{-1} e^{-2x^2/a^2}$ だから $\Delta E_{00}^{(1)} = g/(\sqrt{2\pi} a)$ 。非摂動エネルギーは $\hbar\omega$ 。
- (3) ϕ_0, ϕ_1 は直交規格化される。 $\Psi_{\pm}(x_1, x_2) = [\phi_0(x_1)\phi_1(x_2) \pm \phi_1(x_1)\phi_0(x_2)]/\sqrt{2}$ 。+ は空間対称、- は反対称。
- (4) 接触点で $\Psi_{-}(x, x) = 0, \Psi_{+}(x, x) = \sqrt{2}\phi_0(x)\phi_1(x)$ 。 $\int |\phi_0|^2 |\phi_1|^2 dx = (1/2) \int |\phi_0|^4 dx$ より $\Delta E_{+}^{(1)} = g/(\sqrt{2\pi} a), \Delta E_{-}^{(1)} = 0$ 。対称空間はスピン一重項、反対称空間は三重項 (3 状態) に対応する。
- (5) $g > 0$ で同じ励起エネルギー $2\hbar\omega$ から、一重項の方が $g/(\sqrt{2\pi} a)$ だけ上昇し、三重項は不変。反対称空間状態は任意の x で $\Psi_{-}(x, x) = 0$ なので $\langle g\delta(x_1 - x_2) \rangle = 0$ が厳密に成立する。ただしより高次の別の相互作用や軌道混合は考えていない。

検算・適用条件

$\delta(x_1 - x_2)$ の係数 g の次元はエネルギー $\times$ 長さ。摂動条件は $g/a \ll \hbar\omega$ 。

第3回 第2問の解答 有限母集団と超幾何分布

(1) 部分系に k 個、外部に $N-k$ 個を置く配置数は $\binom{m}{k} \binom{M-m}{N-k}$ 。ゆえに $P(K=k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{M-m}{N-k}}{\binom{M}{N}}$ 、
範囲は $\max(0, N-(M-m)) \leq k \leq \min(m, N)$ 。

(2) $K = \sum_{i=1}^m X_i$ 、 $X_i \in \{0, 1\}$ とし、対称性で $\mathbb{E}X_i = N/M = p$ 。よって $\langle K \rangle = mp = mN/M$ 。

(3) $i \neq j$ で $\mathbb{E}X_i X_j = N(N-1)/[M(M-1)]$ 。 $\text{Cov}(X_i, X_j) = -p(1-p)/(M-1)$ となるから

$$\text{Var}(K) = mp(1-p) \frac{M-m}{M-1}.$$

(4) $m = M$ なら $K = N$ で分散ゼロ。 $M \rightarrow \infty$ 、 $N/M \rightarrow p$ 、 m 固定では二項分布へ収束する：

$$P(K=k) \rightarrow \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

(5) 独立サイト近似なら分散 $mp(1-p)$ 。厳密な固定 N 系では $(M-m)/(M-1)$ だけ縮小する。これは全系の粒子数保存によるサイト間の負の相関である。

検算・適用条件

有限母集団補正は $M=1$ で未定義だが問題は $M \geq 2$ 。部分系が全系なら揺らぎは必ずゼロ。

第3回 第3問の解答 Fabry-Pérot 共振器

- (1) 一回透過の振幅は $(1-R)e^{ikL}$ 。往復ごとに Re^{2ikL} 倍されるから $\sum_{n \geq 0} (1-R)e^{ikL}(Re^{2ikL})^n$ 。 $R < 1$ で収束し、問題の t_{FP} を得る。
- (2) $|1 - Re^{2ikL}|^2 = (1-R)^2 + 4R \sin^2(kL)$ だから $\mathcal{T}(k) = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2(kL)}$ 。 $0 \leq \mathcal{T} \leq 1$ 。
- (3) $\sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi$ で $\mathcal{T} = 1$ 。 $\omega_n = n\pi c/L$ なので $\Delta\omega_{\text{FSR}} = \pi c/L$ 。
- (4) 共鳴 k_n の近くで $\sin(kL) \simeq (k - k_n)L$ 。半値条件は $4R[(k - k_n)L]^2 = (1-R)^2$ 。両側の差から $\Delta\omega_{\text{FWHM}} \simeq c(1-R)/(L\sqrt{R})$ 。
- (5) よって $\mathcal{F} \simeq \pi\sqrt{R}/(1-R)$ 。 $R \rightarrow 1$ で鋭い共鳴となる。 $R \rightarrow 0$ では $\mathcal{T} \rightarrow 1$ のほぼ平坦な透過率となり、半値幅が定義できないので前問の近似値を外挿できない。

検算・適用条件

FWHM は半値となる両側の周波数差。片側幅の2倍が必要。

第3回 第4問の解答 Poisson 和公式と円周上の熱核

(1) Gaussian 平方完成で $\widehat{f}(k) = t^{-1/2} \exp[-k^2/(4\pi t)]$ 。

(2) Poisson 和公式に $k = 2\pi m$ を代入し $\sum_n e^{-\pi t n^2} = t^{-1/2} \sum_m e^{-\pi m^2/t}$ 。すなわち $\theta(t) = t^{-1/2} \theta(1/t)$ 。

(3) $t \gg 1$ では $n = 0, \pm 1$ が支配する：

$$\theta(t) = 1 + 2e^{-\pi t} + O(e^{-4\pi t}).$$

小 t では変換を使い

$$\theta(t) = t^{-1/2} [1 + 2e^{-\pi/t} + O(e^{-4\pi/t})].$$

(4) 周期固有関数は $\phi_n(x) = L^{-1/2} e^{2\pi i n x/L}$ 。 $-\partial_x^2$ の固有値は $(2\pi n/L)^2$ 。跡は

$$K(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-D(2\pi n/L)^2 \tau} = \theta(4\pi D\tau/L^2).$$

(5) $\tau \rightarrow 0$ では $K(\tau) \sim L/\sqrt{4\pi D\tau}$ 。 $\tau \rightarrow \infty$ では $n = 0$ 一つだけが残る $K(\tau) \rightarrow 1$ 。有限区間の周期境界では零モードが定常温度に対応する。

検算・適用条件

熱核の対角値そのものは $K(\tau)/L$ 。今回の K は空間積分した跡である。

第 4 回 | 詳解：双極子選択則・温度の符号・磁気力・対数積分

第 4 回 第 1 問の解答 水素原子の双極子遷移

(1) $1s$ は $4\pi/(\pi a^3) \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a} dr = 1$ 。 $2p_z$ では $\int \cos^2 \theta d\Omega = 4\pi/3$ 、 $\int_0^\infty r^4 e^{-r/a} dr = 24a^5$ を用いて $\int |\psi_{2p_z}|^2 d^3r = (1/(32\pi a^5))(4\pi/3)(24a^5) = 1$ 。

(2) $1s$ は偶パリティなので z の奇パリティで $\langle 1s|z|1s \rangle = 0$ 。 $2p_z$ との x, y 積分は ϕ 方位角について $\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0$ 。

(3) $d = \int \psi_{2p_z}^* r \cos \theta \psi_{1s} d^3r$ 。半径積分は $\int_0^\infty r^4 e^{-3r/(2a)} dr = 24(2a/3)^5$ 、角度積分は $4\pi/3$ 。係数を合わせて

$$d = \frac{256}{243\sqrt{2}} a > 0.$$

符号は波動関数の全体位相規約に依存するが $|d|^2$ は不変。

(4) $E_1 = -\hbar^2/(2ma^2)$ 、 $E_2 = -\hbar^2/(8ma^2)$ なので $\omega_0 = 3\hbar/(8ma^2)$ 。

(5) 共鳴項は $V_{21}(t) = e\mathcal{E}d \cos(\omega t)$ 。一次時間依存摂動で $A_{21} = -(i/\hbar) \int_0^t V_{21}(t') e^{i\omega_0 t'} dt'$ 。共鳴の定常項だけ残すと $A_{21} \simeq -ie\mathcal{E}dt/(2\hbar)$ 、

$$P_{1s \rightarrow 2p_z}(t) \simeq \left(\frac{e\mathcal{E}dt}{2\hbar} \right)^2.$$

成立条件は $e\mathcal{E}|d| \ll \hbar\omega_0$ (回転波近似) かつ $e\mathcal{E}|d|t/(2\hbar) \ll 1$ (一次摂動の短時間域)。

検算・適用条件

双極子行列要素の次元は長さ。強い駆動・長時間では Rabi 振動が必要で、上の t^2 則は無制限に続かない。

第4回 第2問の解答 二準位系の負温度

- (1) n 個の高準位を選ぶ状態数は $\Omega = \binom{N}{n}$ 。エネルギー $E = \epsilon(n - N/2) = N\epsilon(p - 1/2)$ は上下に有界である。
- (2) Stirling 公式を用い $S/(Nk_B) = -p \ln p - (1-p) \ln(1-p) + o(1)$ 。最大値は $p = 1/2$ で得られる。
- (3) $dS/dp = Nk_B \ln[(1-p)/p]$ 、 $dE/dp = N\epsilon$ から $1/T = (k_B/\epsilon) \ln[(1-p)/p]$ 。 $p > 1/2$ なら対数が負で $T < 0$ 。上限のあるスペクトルだから許される。
- (4) 一スピン分配関数 $z_1 = 2 \cosh(\beta\epsilon/2)$ 、全体 $Z = z_1^N$ 。平均エネルギー $U = -N\epsilon \tanh(\beta\epsilon/2)/2$ 。 $\beta < 0$ なら $U > 0$ (反転分布)。
- (5) $C = dU/dT$ を計算して $C = Nk_B(\beta\epsilon/2)^2 \operatorname{sech}^2(\beta\epsilon/2) \geq 0$ 。 β^2 が現れるため負温度でも熱容量は負にならない。 $T = \pm\infty$ は $\beta \rightarrow 0^\pm$ の極限として理解する。

検算・適用条件

負温度は絶対零度より低いという意味ではなく、有限上限エネルギー系の反転占有を表す。

第4回 第3問の解答 電流 pinch 効果と磁気エネルギー

(1) 円形 Ampère 経路について $2\pi r B_\phi = \mu_0 I_{\text{enclosed}}$ 。 $r < a$ では $I_{\text{enclosed}} = Ir^2/a^2$ だから $B_\phi = \mu_0 Ir/(2\pi a^2)$ 。
 $r > a$ では $B_\phi = \mu_0 I/(2\pi r)$ 。

(2) $\hat{z} \times \hat{\phi} = -\hat{r}$ なので $\mathbf{f} = -J_z B_\phi \hat{r} = -\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 a^4} \hat{r}$ (内部)。電流は自分の磁場により中心向きに圧縮される。

(3) $-dp/dr + f_r = 0$ より $dp/dr = f_r < 0$ 。 $p(0) - p(a) = \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 a^4} dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^2}$ 。中心圧力が高いほど pinch に抵抗できる。

(4) $U_{\text{in}}/L = \int_0^a (B^2/(2\mu_0)) 2\pi r dr$ 。 $B \propto r$ を代入して $U_{\text{in}}/L = \mu_0 I^2/(16\pi)$ 。

(5) $U_{\text{out}}/L = \int_a^R \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln(R/a)$ 。 $U/L = \frac{1}{2} \mathcal{L}' I^2$ から

$$\mathcal{L}' = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(R/a)。$$

外部打ち切り R は戻り電流の位置などによって物理的に定まる。

検算・適用条件

内部インダクタンスは電流密度一様という条件に依存する。交流表皮効果が強ければ内部の磁気エネルギーは変化する。

第4回 第4問の解答 Mellin 積分と対数モーメント

以下の $\ln x$ 、 $\ln a$ は問題文に従い無次元量の対数である。

(1) $x \rightarrow 0$ で x^{s-1}/a^2 だから $s > 0$ 、 $x \rightarrow \infty$ で x^{s-3} だから $s < 2$ 。よって $0 < s < 2$ 。

(2) $x = at$ と置くと $I(s, a) = a^{s-2}(\pi/2) \csc(\pi s/2)$ 。

(3) $s = 1$ を代入し $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}$ 。

(4) 収束領域内部では積分記号下の s 微分が可能。 $\partial_s I = I[\ln a - (\pi/2) \cot(\pi s/2)]$ 。 $s = 1$ で

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \ln a。$$

(5) $\partial_s^2 I/I = [\ln a - (\pi/2) \cot(\pi s/2)]^2 + (\pi^2/4) \csc^2(\pi s/2)$ 。 $s = 1$ より

$$\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \left[(\ln a)^2 + \frac{\pi^2}{4} \right]。$$

$a = 1$ なら $x \mapsto 1/x$ で $\ln x$ 積分は奇対称で 0、二乗は非負で $\pi^3/8$ となる。

検算・適用条件

$\ln x$ は無次元変数に対してのみ意味を持つ。次元のある x を扱う際は $\ln(x/x_*)$ を用いる。

第 5 回 | 詳解：局所位相推定・BEC の次元依存・軌道歳差・大偏差

第 5 回 第 1 問の解答 二準位位相推定と Fisher 情報

- (1) $\rho_\theta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 1 \end{pmatrix}$ 。 $\rho_\theta^2 = \rho_\theta$ なので $\text{Tr}\rho_\theta^2 = 1$ 。混合状態ではなく純粋状態である。
- (2) $\langle \pm | \psi_\theta \rangle = (1 \pm e^{i\theta})/2$ から $p_\pm = (1 \pm \cos \theta)/2$ 。和は常に 1。
- (3) $p'_\pm = \mp \sin \theta/2$ 。 $\sin \theta \neq 0$ で $F_{\text{cl}} = (\sin^2 \theta/4)(1/p_+ + 1/p_-) = 1$ 。 $\theta = 0, \pi$ では一方の確率がゼロとなり式に $0/0$ が現れるため、近傍からの極限 1 を用いる（正則条件は慎重に扱う）。
- (4) 独立 N 回では対数尤度が加法的なので $F_N = N$ 。正則な局所不偏推定では $\text{Var}(\hat{\theta}) \geq 1/N$ 。標準偏差の $N^{-1/2}$ スケーリングが通常のショット雑音限界である。
- (5) GHZ では $|\psi'\rangle = iN e^{iN\theta} |1\rangle^{\otimes N} / \sqrt{2}$ 、 $\langle \psi' | \psi' \rangle = N^2/2$ 、 $|\langle \psi | \psi' \rangle|^2 = N^2/4$ 。よって $F_Q = N^2$ 。局所精度の改善は可能だが、状態は $\theta \mapsto \theta + 2\pi/N$ で同一となるため大域的な位相の曖昧さやノイズに注意する。

検算・適用条件

第 5 小問は + α 。Fisher 情報の N^2 は「必ず全範囲で $1/N$ 精度が得られる」という保証ではない。

第 5 回 第 2 問の解答 ベキ型トラップと Bose 凝縮

- (1) $H \leq E$ の相空間領域で $p \sim E^{1/2}$ 、 $r \sim E^{1/q}$ 。位相体積 $\mathcal{N}(E) \propto E^{d/2+d/q}$ なので $g(E) = d\mathcal{N}/dE = CE^{\alpha-1}$ 、 $\alpha = d/2 + d/q$ 。
- (2) 励起数 $N_{\text{ex}} = \int_0^\infty g(E)[e^{\beta E} - 1]^{-1} dE$ 。 $x = \beta E$ と $\int_0^\infty x^{\alpha-1}/(e^x - 1) dx = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)$ を使い、
 $N_{\text{ex}} = CT\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)(k_B T)^\alpha$ ($\alpha > 1$)。
- (3) 低 E で被積分関数は $E^{\alpha-2}/\beta$ なので積分が有限なのは $\alpha > 1$ 。そのとき $k_B T_c = [N/(CT\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha))]^{1/\alpha}$ 。
 $\alpha \leq 1$ ではこの半古典・熱力学極限で有限温度凝縮がない。
- (4) $U_{\text{ex}} = CT\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)(k_B T)^{\alpha+1}$ 。よって凝縮相 $T < T_c$ で $C_V = (\alpha+1)CT\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)k_B^{\alpha+1}T^\alpha$
(外部トラップ固定)。
- (5) $d=3, q=2$ では $\alpha=3$ で凝縮可能。 $d=2, q \rightarrow \infty$ の硬い一様箱極限では $\alpha \rightarrow 1$ でこの理想気体の有限温度凝縮はない。有限箱は離散スペクトルなので、ここでの「なし」は熱力学・半古典極限の結論である。

検算・適用条件

有限サイズで見える基底占有の増大を、真の熱力学極限での Bose 凝縮と混同しない。

第5回 第3問の解答 補正中心力による近点歳差

(1) $F = -dV/dr$ より $V(r) = -k/r - \eta/(2r^2)$ 。有効ポテンシャルとエネルギーは

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2 - m\eta}{2mr^2} - \frac{k}{r}, \quad E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r).$$

(2) Binet 公式 $u'' + u = -mF(1/u)/(\ell^2 u^2)$ を代入し、 $u'' + u = mk/\ell^2 + (m\eta/\ell^2)u$ 。よって $\nu = \sqrt{1 - m\eta/\ell^2}$ 。

(3) 定数解 $u_c = (mk/\ell^2)/\nu^2 = mk/(\ell^2 - m\eta)$ より $r_c = (\ell^2 - m\eta)/(mk)$ 。 $\nu^2 > 0$ すなわち $\ell^2 > m\eta$ なら小振動は安定。

(4) $u(\phi) = \frac{mk}{\ell^2 - m\eta} [1 + e \cos\{\nu(\phi - \phi_0)\}]$ 。束縛楕円状運動には $0 \leq e < 1$ 。近点は $\cos$ の極大で、次の近点までの角度は $\Delta\phi = 2\pi/\nu$ 。

(5) Kepler 閉軌道との差は $\delta\phi = 2\pi(\nu^{-1} - 1) \simeq \pi m\eta/\ell^2$ 。 $\eta > 0$ なら前進歳差、 $\eta \rightarrow 0$ なら $\nu \rightarrow 1$ で $\delta\phi \rightarrow 0$ 。

検算・適用条件

近点から次の近点までの角度 $2\pi/\nu$ と、1 周に対する余分な近点移動 $2\pi(1/\nu - 1)$ を区別する。

第 5 回 第 4 問の解答 Bernoulli 和の大偏差

(1) 独立性から $\mathbb{E}e^{tS_n} = (1 - p + pe^t)^n$ 、対数は $n\lambda(t)$, $\lambda(t) = \ln(1 - p + pe^t)$ 。

(2) $\lambda'(t) = pe^t/(1 - p + pe^t)$ 。 $q = \lambda'(t_*)$ を解いて $e^{t_*} = q(1 - p)/[p(1 - q)]$ 。代入すると $I(q) = q \ln(q/p) + (1 - q) \ln[(1 - q)/(1 - p)]$ 。

(3) $I'(q) = \ln[q(1 - p)/(p(1 - q))]$, $I''(q) = 1/q + 1/(1 - q)$ 。 $I(p) = I'(p) = 0$, $I''(p) = 1/[p(1 - p)]$ 。

(4) $t > 0$ の Markov 不等式から $P(S_n \geq nq) = P(e^{tS_n} \geq e^{tnq}) \leq e^{-tnq}(1 - p + pe^t)^n$ 。 $q > p$ なら最適 $t_* > 0$ を代入し $P(\bar{X}_n \geq q) \leq e^{-nI(q)}$ 。

(5) $P(S_n = nq) = \binom{n}{nq} p^{nq} (1 - p)^{n(1-q)}$ を Stirling 展開すると

$$P(\bar{X}_n = q) \sim \frac{e^{-nI(q)}}{\sqrt{2\pi nq(1 - q)}} \quad (0 < q < 1 \text{ 固定}).$$

$q = p + \delta$ で $I(q) = \delta^2/[2p(1 - p)] + O(\delta^3)$ だから、 S_n の標準偏差は $\sqrt{np(1 - p)}$ 、標本平均は $\sqrt{p(1 - p)/n}$ である。

検算・適用条件

Chernoff 境界は上界であり、確率そのものではない。点確率の Stirling 漸近では $\sqrt{n}$ の前因子が必要。

学習後の確認と採点の観点

本書の予想順位は将来の出題確率ではない。出題題材が異なっても、基礎の運用法（保存則・変分・境界条件・統計重み・固有値・漸近展開）が通用するかを評価する。

1. **条件の理解**：計算前に近似条件、符号規約、境界条件、保存量を明記できるか。
2. **導出**：答だけでなく、問題文の式から途中式を論理的につなげられるか。
3. **検算**：単位、 $T \rightarrow 0$ 、 $B \rightarrow 0$ 、 $g \rightarrow 0$ 、 $\hbar \rightarrow 0$ などの極限を確かめたか。
4. **計算の効率**：対称性、直交変換、分配関数の微分、Fourier・Gaussian 構造を利用したか。
5. **解釈**：量子統計の適用範囲、保存粒子数、鋭い共振の条件、局所位相推定の条件を述べたか。

解答・検査の限界

本書は独自制作した学習用問題集であり、東京大学が作成した問題・模範解答ではない。数値例・記号・近似条件について独立検算を行ったが、全小問に対する外部査読を完了したわけではない。誤りが見つかった場合は正誤表を優先する。